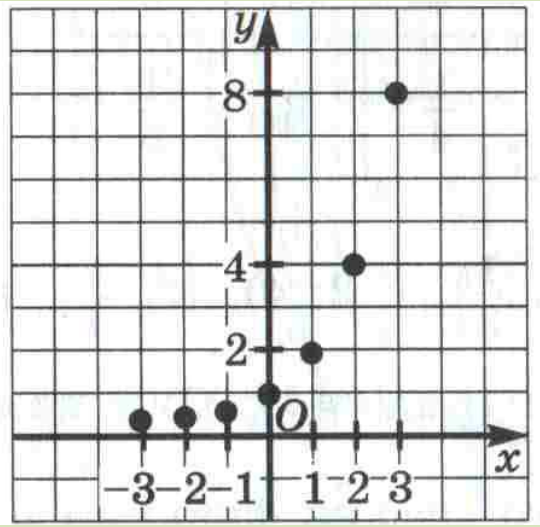
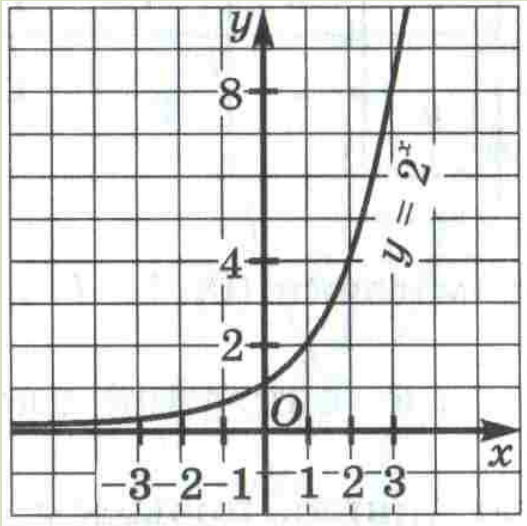
# *Показательная функция, ее свойства и график.*

Рассмотрим функцию вида $\boldsymbol{y = 2^x}$, определенную на множестве всех действительных чисел.

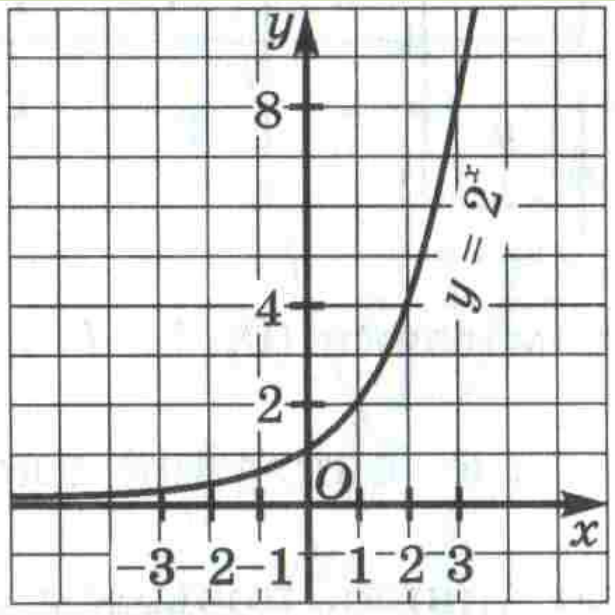
# *График*

| $x$ | 0 | 1 | −1 | 2 | −2 | 3 | −3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 2 | $\frac{1}{2}$ | 4 | $\frac{1}{4}$ | 8 | $\frac{1}{8}$ |



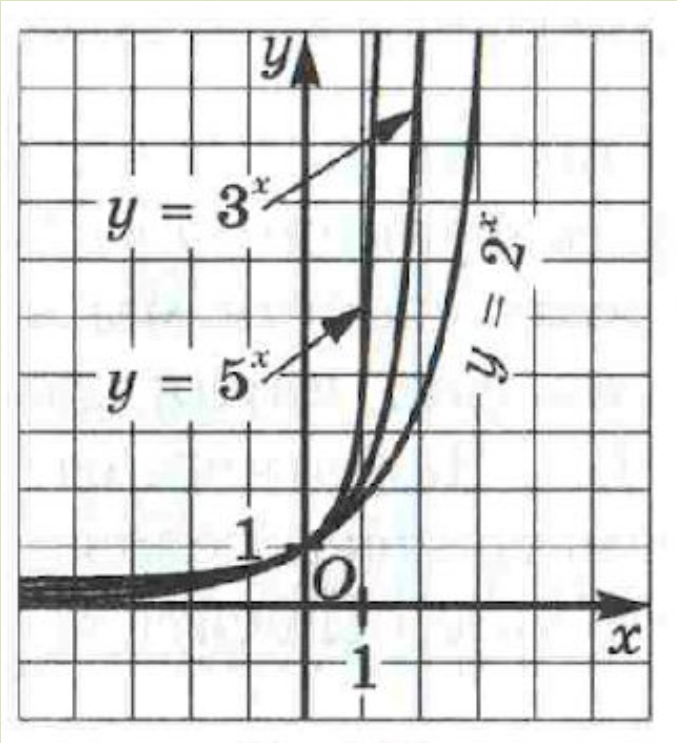
# Свойства функции $y = 2^x$




1. D(y): $x \in (-\infty; +\infty)$
2. Функция общего вида
3. Возрастает
4. Ограничена снизу и не ограничена сверху
5. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений
6. Непрерывна
7. E(y): $y \in (0; +\infty)$
8. Выпукла вниз

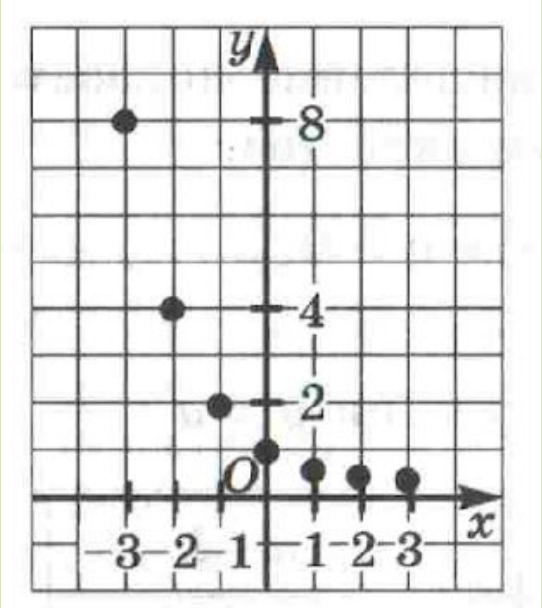
Точно такими же функциями обладает любая функция вида $\boldsymbol{y = a^x}$ , где $a > 1$.

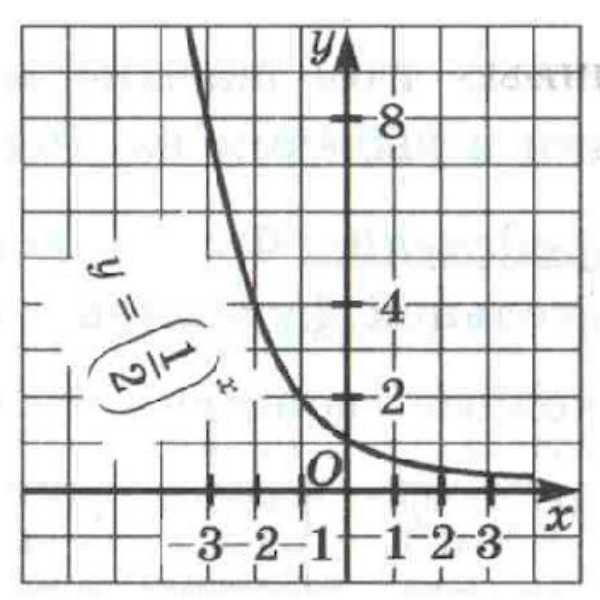
Построить в одной системе координат графики функций $y = 2^x$ $y = 3^x$ $y = 5^x$

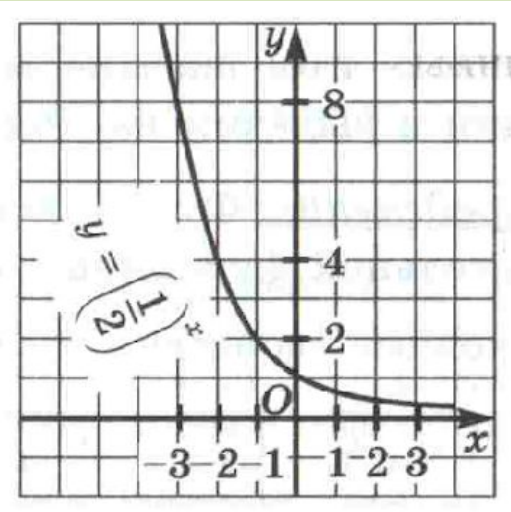


$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

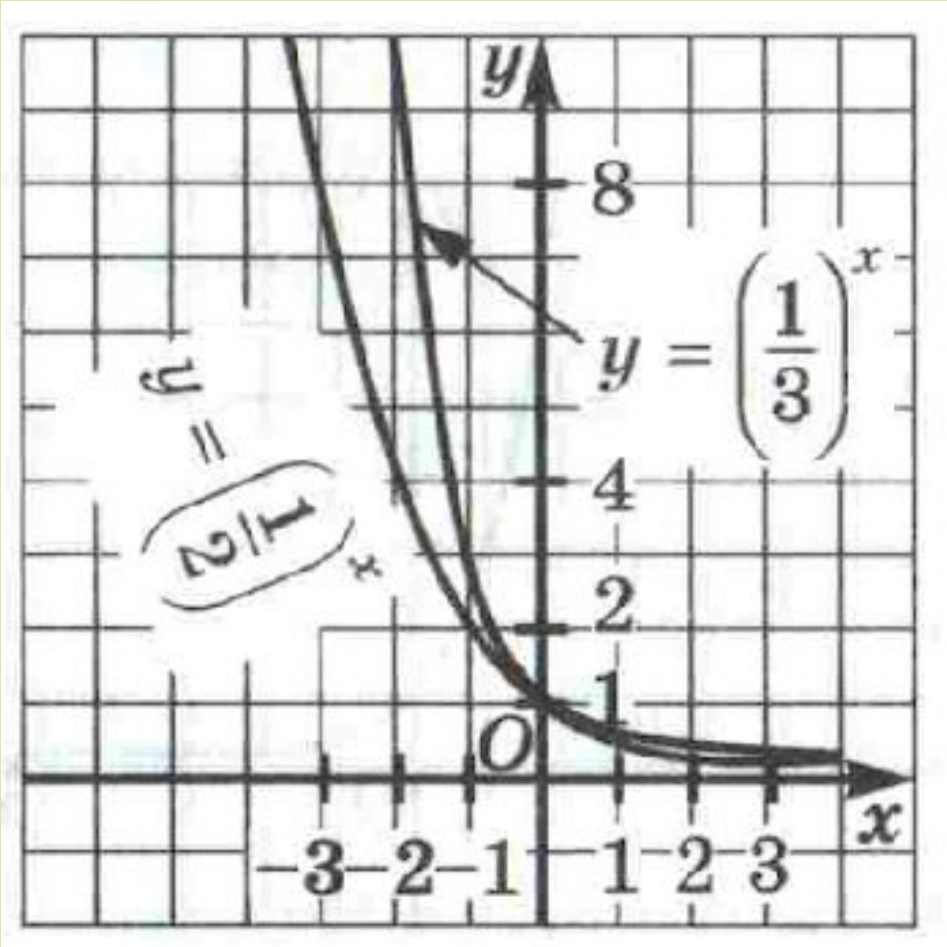
| $x$ | 0 | −1 | 1 | −2 | 2 | −3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 2 | $\frac{1}{2}$ | 4 | $\frac{1}{4}$ | 8 | $\frac{1}{8}$ |

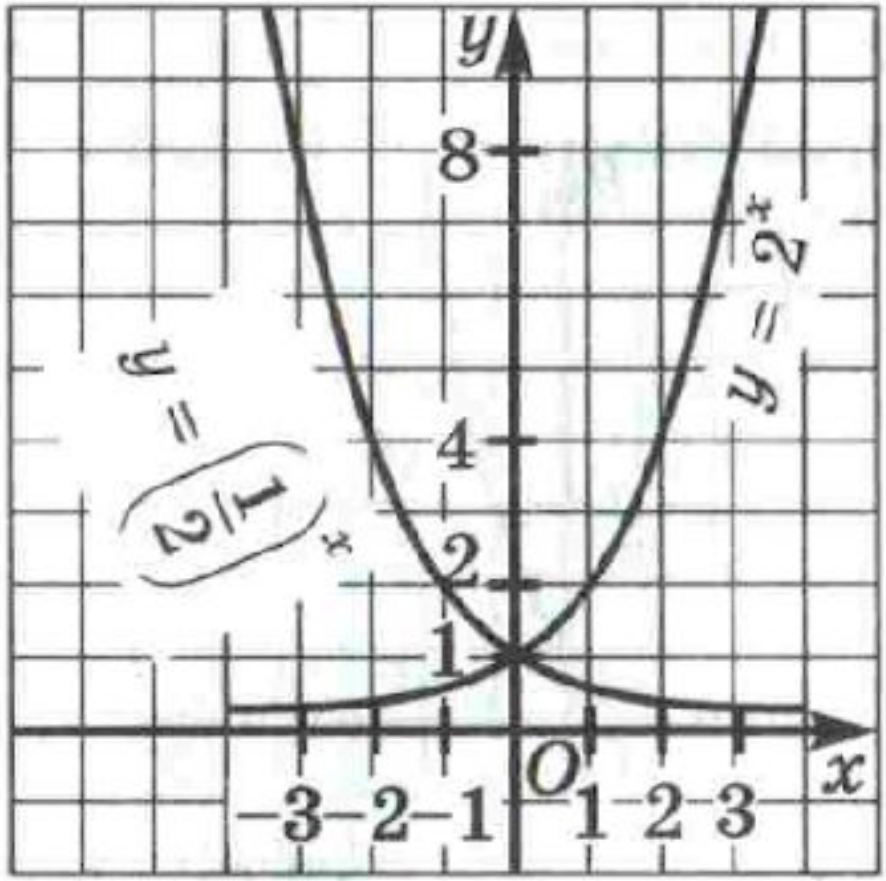





1. D(y): $x \in (-\infty; +\infty)$
2. Функция общего вида
3. Убывает
4. Ограничена снизу и не ограничена сверху
5. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений
6. Непрерывна
7. E(y): $y \in (0; +\infty)$
8. Выпукла вниз

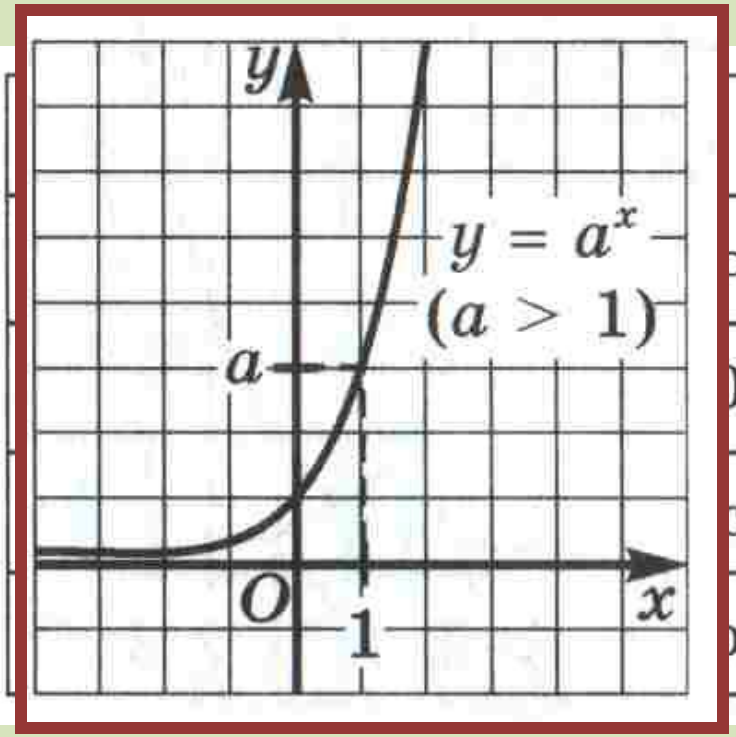

y
8
4
2
1
O
x
−3 −2 −1 1 2 3
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

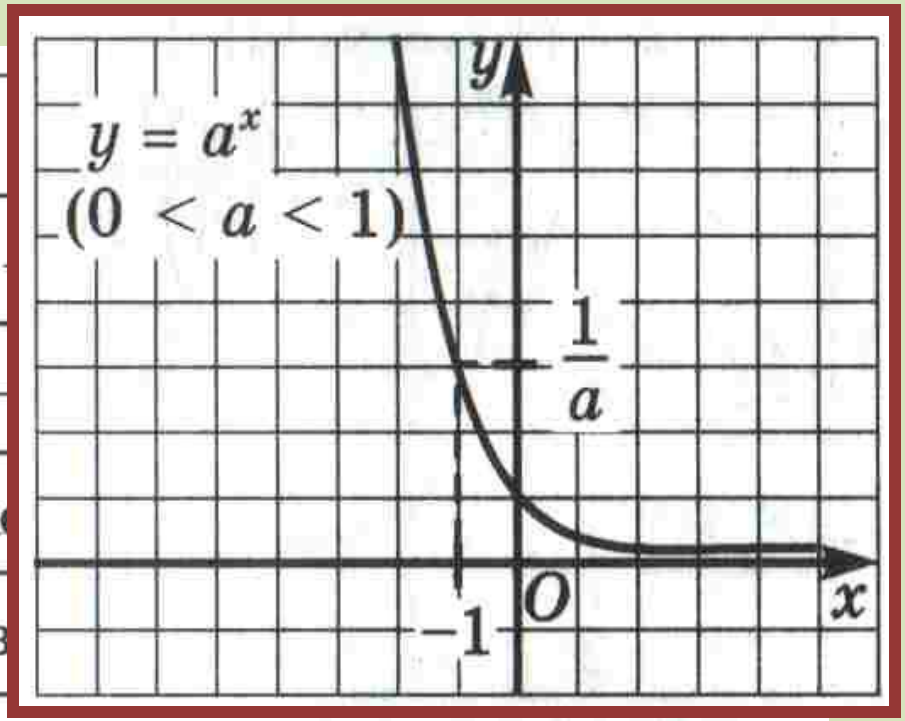

y
8
4
2
1
O
x
−3 −2 −1 1 2 3
y = 2^x
y = (1/2)^x

# *Определение*

Функцию вида $\boldsymbol{y = a^x}$ , где $a > 0$, $a \neq 1$ называют *показательной функцией*.

Основные свойства показательной функции:



Первое важное замечание. Школьники часто путают термины: степенная функция, показательная функция. Сравните: $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{-2,5}$ — это примеры степенных функций; $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = (2,5)^x$ — это примеры показательных функций. Вообще $y = x^r$, где $r$ — конкретное число, — *степенная функция* (аргумент $x$ содержится в основании степени); $y = a^x$, где $a$ — конкретное число (положительное и отличное от 1), — *показательная функция* (аргумент $x$ содержится в показателе степени).

А такую «экзотическую» функцию, как $y = x^x$, не считают ни показательной, ни степенной (ее иногда называют показательно-степенной).

# Устная работа.

Среди заданных функций укажите те, которые являются показательными:

**11.8.** а) $y = 3^x$; б) $y = x^3$; в) $y = x^{\frac{5}{3}}$; г) $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$.

**11.9.** а) $y = \pi^x$; б) $y = x^\pi$; в) $y = \left(\sqrt{x}\right)^5$; г) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^x$.

Второе важное замечание. Обычно не рассматривают показательную функцию с основанием $a = 1$ или с основанием $a$, удовлетворяющим неравенству $a \leqslant 0$, показательная функция $y = a^x$ при $a = 1$ «вырождается» в постоянную функцию $y = 1$ — это неинтересно. Если $a = 0$, то $0^x = 0$ для любого положительного значения $x$, т. е. мы получаем функцию $y = 0$, определенную при $x > 0$, — это тоже неинтересно. Если, наконец, $a < 0$, то выражение $a^x$ имеет смысл лишь при целых значениях $x$, а мы все-таки предпочитаем рассматривать функции, определенные на сплошных промежутках.

# Устная работа.

**11.11.** Найдите значение аргумента $x$, при котором функция $y = 2^x$ принимает заданное значение:

а) 16; б) $8\sqrt{2}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{1}{32\sqrt{2}}$.

**11.12.** Найдите значение аргумента $x$, при котором функция $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ принимает заданное значение:

а) $\frac{1}{25}$; б) $\frac{1}{25\sqrt{5}}$; в) 125; г) $625\sqrt{5}$.

# Решить уравнения и неравенства

а) $2^x = 1$;

б) $2^x = 4$;

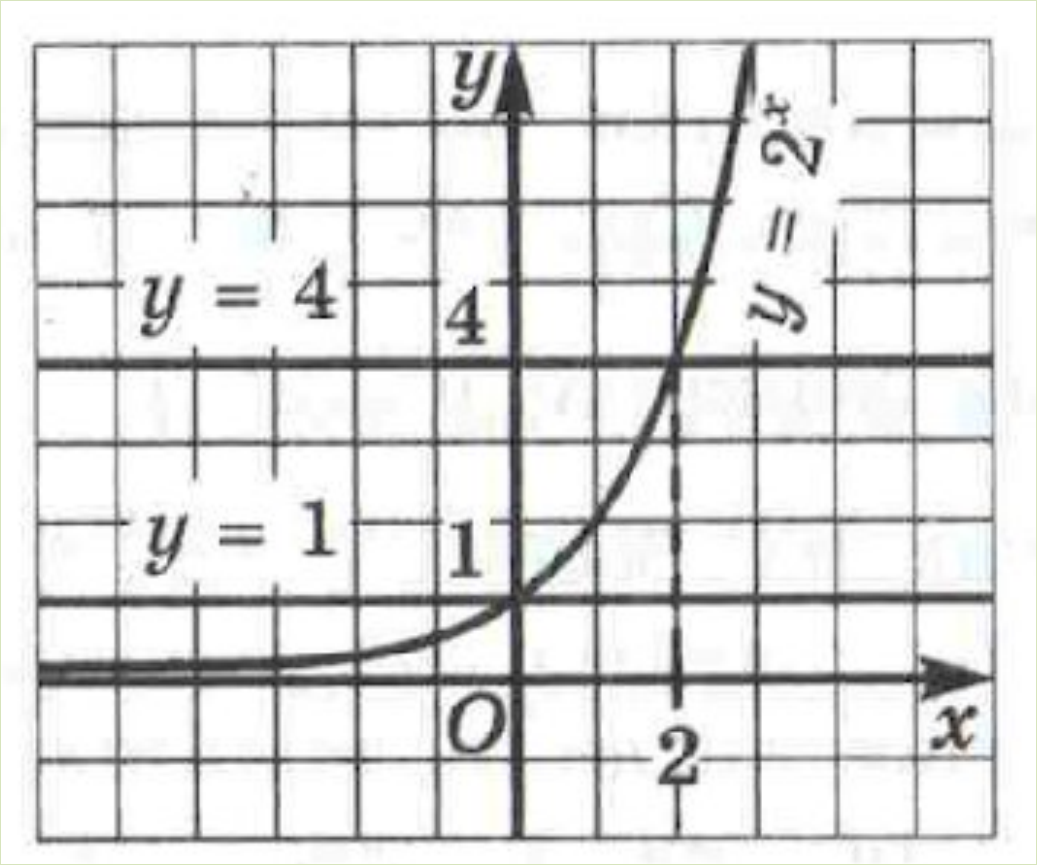
в) $2^x = 8$;

г) $2^x = \frac{1}{16}$;

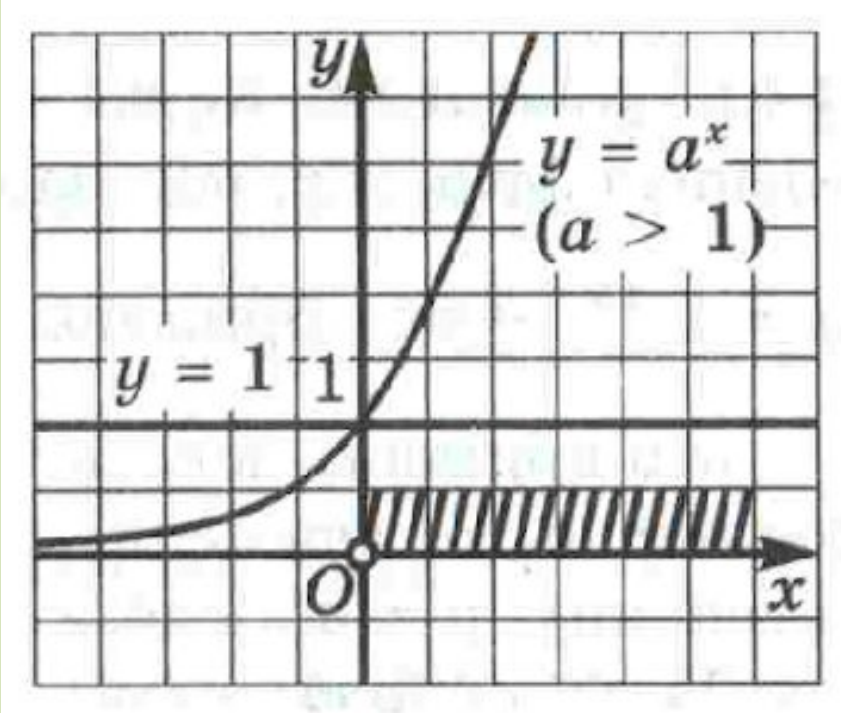
# Решить уравнения и неравенства

д) $2^x > 1$;

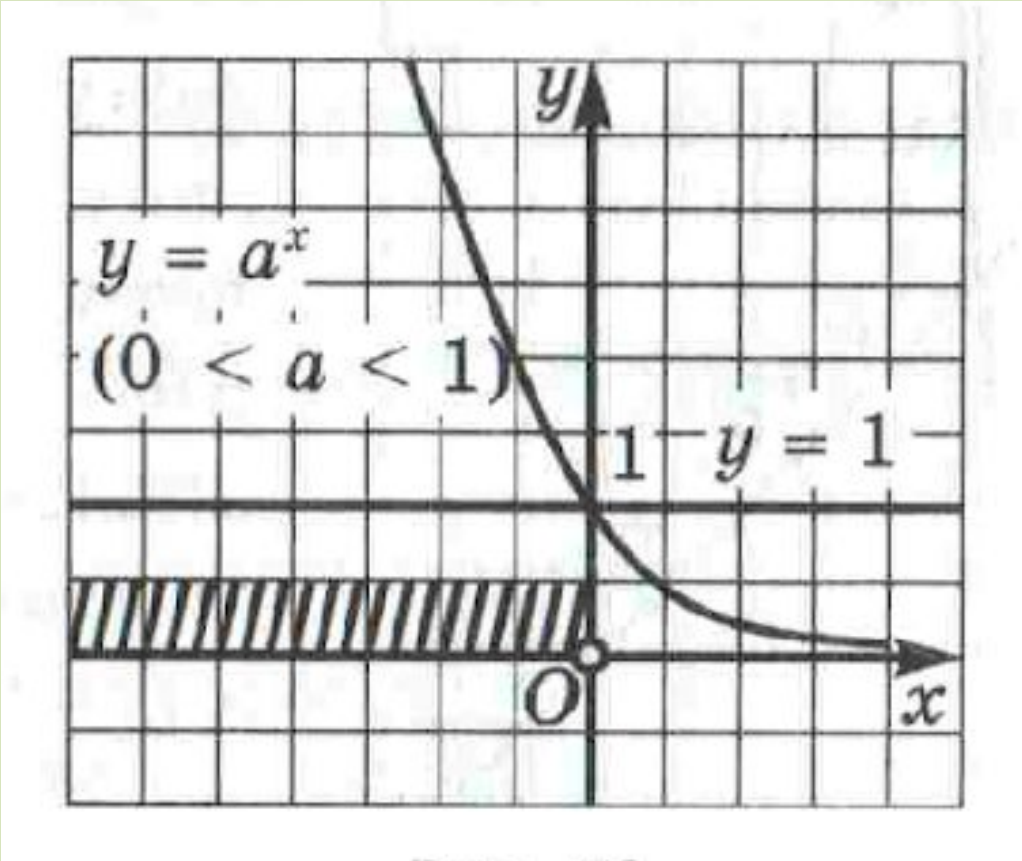
е) $2^x < 4$.



**Теорема 2.** *Если $a > 1$, то неравенство $a^x > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x > 0$* (рис. 51), *неравенство $a^x < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$.*



**Теорема 3.** *Если* $0 < a < 1$, *то равенство* $a^t = a^s$ *справедливо тогда и только тогда, когда* $t = s$.



# Примеры решения задач по теме

С помощью графиков функций (используя соответствующие свойства функций) можно решать показательные уравнения и неравенства, находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

**№ 1.** Решите уравнение $2^{3x} = 128$

$2^{3x} = 2^{7}$ воспользуемся тем, что функция $y = 2^{t}$ монотонна (возрастает), поэтому из равенства следует

$$3x = 7$$

$$x = 2\frac{1}{3}$$

**№ 2.** Решите неравенство $8^x > 64$

$$8^x > 8^2$$

так как функция $y = 8^t$ возрастает при $t \geq 0$, то $x > 2$.

# Графическое решение уравнений

**Задача 3.**

**б)** Решить графически уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = x+3$$

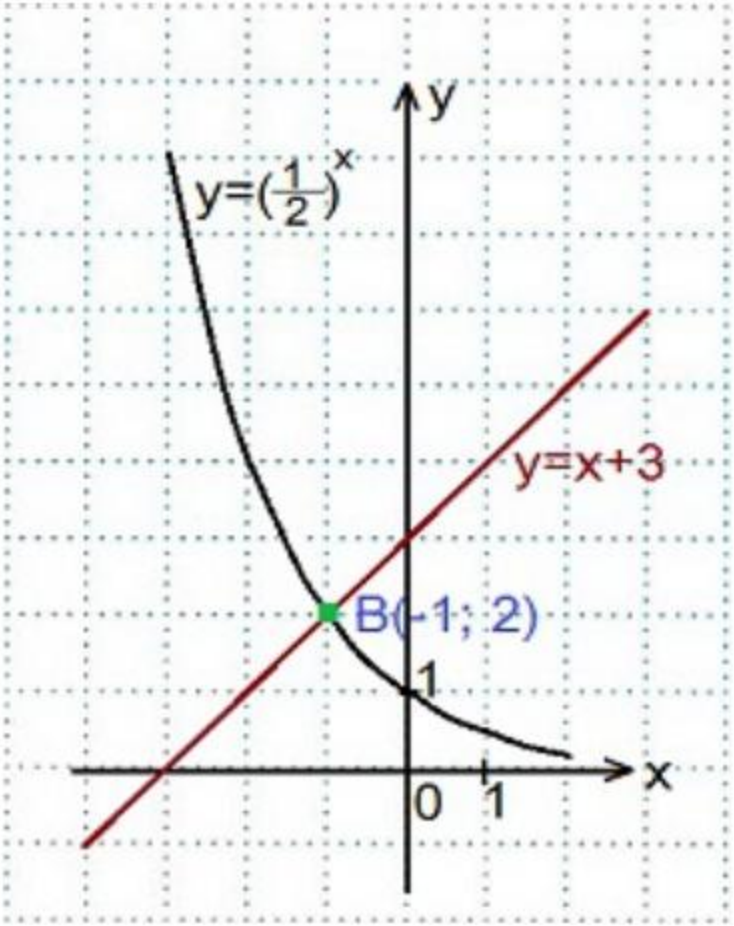
**Решение:**

В одной системе координат построим графики функций

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{и} \quad y=x+3$$

Графики функций пересеклись в точке B(-1; 2). Решением уравнения является

$$x=-1$$



# Домашнее задание

Решите уравнение:.

1) $(0,2)^x = x + 6$

2) $3^x = 4-x$

3) $2^x = x+2$