Ассиметричные алгоритмы шифрования

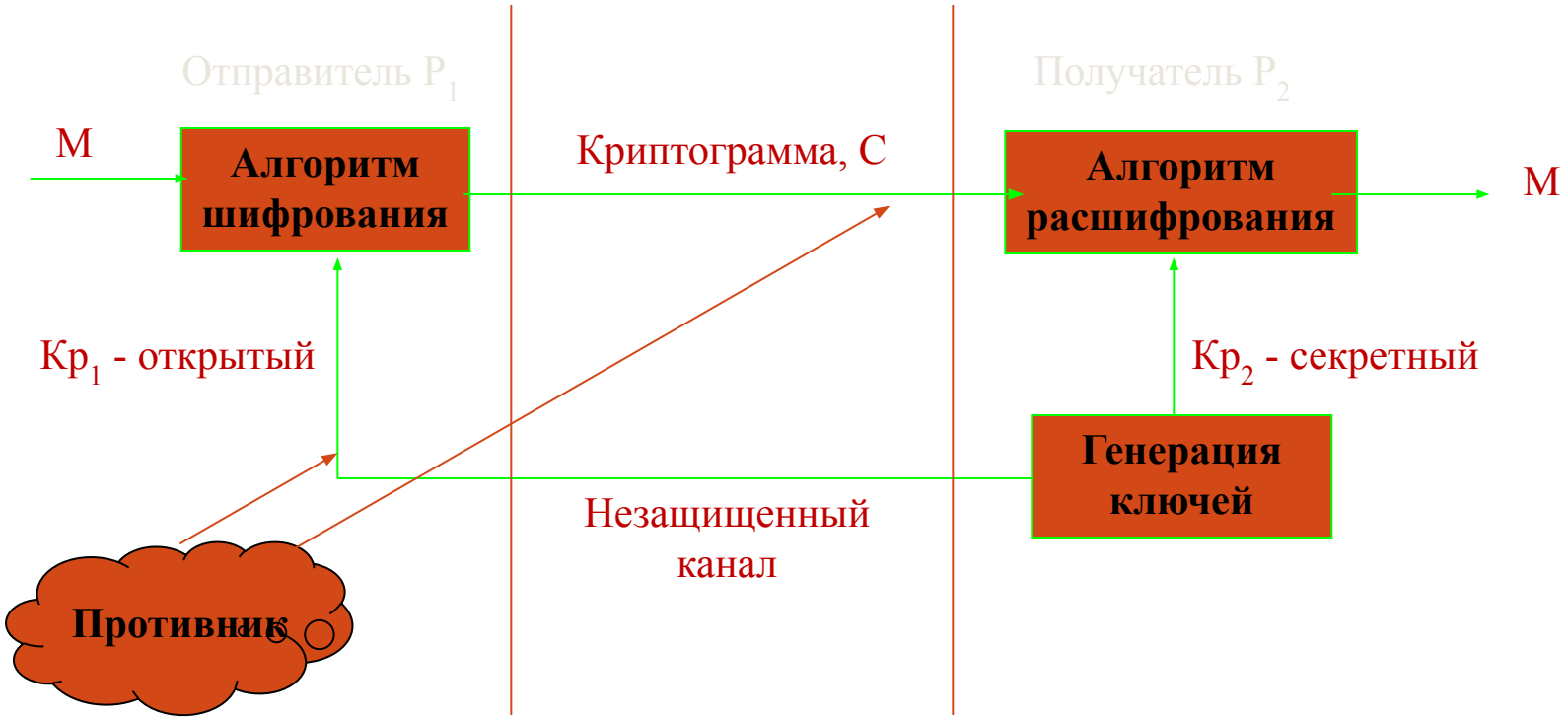
План

1. Концепция криптосистемы с открытым ключом
2. Элементы теории чисел
3. Односторонние функции
4. Алгоритм Диффи-Хелмана
5. RSA
6. Криптоалгоритмы на основе эллиптических кривых
7. Алгоритм Эль-Гамаля (El Gamal)

1 Концепция криптосистемы с открытым ключом

Ключевой обмен,
Электронно-цифровая подпись
Аутентификация

Обобщенная схема асимметричной криптосистемы с открытым ключом



*

2 Элементы теории чисел

Под простым числом понимают такое число, которое делится только на 1 и на само себя. Взаимно простыми числами называют такие числа, которые не имеют ни одного общего делителя, кроме 1. Под результатом операции $i \bmod j$ понимают остаток от целочисленного деления i на j.

Теорема 2.3 (основная теорема арифметики). *Любое целое положительное число может быть представлено в виде произведения простых чисел, причем единственным образом.*

Пример 2.4. $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3,\ 33 = 3 \cdot 11.$ □

Определение 2.3. Два числа называются *взаимно простыми*, если они не имеют ни одного общего делителя кроме единицы.

Пример 2.5. Числа 27 и 28 взаимно просты (у них нет общих делителей кроме единицы), числа 27 и 33 — нет (у них есть общий делитель 3). □

Определение 2.4 (функция Эйлера). Пусть дано целое число $N \geq 1$. Значение *функции Эйлера* $\varphi(N)$ равно количеству чисел в ряду $1, 2, 3, \ldots, N-1$, взаимно простых с N.

$\varphi(10) = ?$
$1, \not{2}, 3, \not{4}, \not{5}, \not{6}, 7, \not{8}, 9,$
$\varphi(10) = 4$

$\varphi(12) = ?$
$1, \not{2}, \not{3}, \not{4}, 5, \not{6}, 7, \not{8}, \not{9}, \not{10}, 11$
$\varphi(12) = 4$

Утверждение 2.4. *Если p — простое число, то $\varphi(p) = p - 1$.*

Утверждение 2.5. *Пусть p и q — два различных простых числа ($p \neq q$). Тогда $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$.*

Теорема 2.6 (Ферма). *Пусть p — простое число и $0 < a < p$. Тогда*

$$a^{p-1} \bmod p = 1.$$

Пример 2.7. $p = 13$, $a = 2$;

$$2^{12} \bmod 13 = \left(2^2\right)^2 \cdot \left(\left(2^2\right)^2\right)^2 \bmod 13 = 3 \cdot 9 \bmod 13 = 1,$$

$$10^{10} \bmod 11 = 10^2 \cdot \left(\left(10^2\right)^2\right)^2 \bmod 11 = 1 \cdot 1 = 1. \qquad \square$$

Теорема 2.7 (Эйлер). *Пусть a и b — взаимно простые числа. Тогда*

$$a^{\varphi(b)} \bmod b = 1.$$

Теорема 2.8. *Если p и q — простые числа, $p \neq q$ и k — произвольное целое число, то*

$$a^{k\varphi(pq)+1} \bmod (pq) = a. \tag{2.12}$$

Пример 2.9. Возьмем $p = 5$, $q = 7$. Тогда $pq = 35$, а функция Эйлера — $\varphi(35) = 4 \cdot 6 = 24$. Рассмотрим случай $k = 2$, т.е. будем возводить числа в степень $2 \cdot 24 + 1 = 49$. Получим

$$9^{49} \bmod 35 = 9, \quad 23^{49} \bmod 35 = 23.$$

Определение 2.5. Пусть a и b — два целых положительных числа. *Наибольший общий делитель* чисел a и b есть наибольшее число c, которое делит и a и b:

$$c = \gcd(a, b).$$

Алгоритм 2.1. Алгоритм Евклида

ВХОД: Положительные целые числа a, b, $a \geq b$.
ВЫХОД: Наибольший общий делитель $\gcd(a, b)$.
1. WHILE $b \neq 0$ DO
2. $r \leftarrow a \bmod b$, $a \leftarrow b$, $b \leftarrow r$.
3. RETURN a.

Теорема 2.9. *Пусть a и b — два целых положительных числа. Тогда существуют целые (не обязательно положительные) числа x и y, такие, что*

$$ax + by = \gcd(a, b). \tag{2.13}$$

Алгоритм 2.2. Обобщенный алгоритм Евклида

ВХОД: Положительные целые числа a, b, $a \geq b$.
ВЫХОД: $\gcd(a,b)$, x, y, удовлетворяющие (2.13).

1. $U \leftarrow (a, 1, 0)$, $V \leftarrow (b, 0, 1)$.
2. WHILE $v_1 \neq 0$ DO
3. $q \leftarrow u_1 \operatorname{div} v_1$;
4. $T \leftarrow (u_1 \bmod v_1, u_2 - qv_2, u_3 - qv_3)$;
5. $U \leftarrow V$, $V \leftarrow T$.
6. RETURN $U = (\gcd(a,b), x, y)$.

Пример 2.12. Пусть a=28, b=19. Найдем числа x и y, удовлетворяющие (2.13).

U				28	1	0	
V	U			19	0	1	
T	V	U		9	1	-1	$q=1$
	T	V	U	1	-2	3	$q=2$
		T	V	0	19	-28	$q=9$

Алгоритм 2.3. Возведение в степень (справа-налево)

ВХОД: Целые числа a, $x = (x_t x_{t-1} \dots x_0)_2$, p.
ВЫХОД: Число $y = a^x \bmod p$.

1. $y \leftarrow 1$, $s \leftarrow a$.
2. FOR $i = 0, 1, \dots, t$ DO
3. IF $x_i = 1$ THEN $y \leftarrow y \cdot s \bmod p$;
4. $s \leftarrow s \cdot s \bmod p$.
5. RETURN y.

i:	0	1	2	3	4	5	6
x_i:	0	0	1	0	0	1	1
y:	1	1	a^4	a^4	a^4	a^{36}	a^{100}
s:	a^2	a^4	a^8	a^{16}	a^{32}	a^{64}	a^{128}

Алгоритм 2.4. Возведение в степень (слева-направо)

ВХОД: Целые числа a, $x = (x_t x_{t-1} \dots x_0)_2$, p.
ВЫХОД: Число $y = a^x \bmod p$.

1. $y \leftarrow 1$.
2. FOR $i = t, t-1, \dots, 0$ DO
3. $y \leftarrow y \cdot y \bmod p$;
4. IF $x_i = 1$ THEN $y \leftarrow y \cdot a \bmod p$.
5. RETURN y.

3 Односторонние (однонаправленные) функции

Односторонние (однонаправленные) функции обладают следующим свойством:

- Если известно x , то вычислить f(x) относительно просто
- Если известно y=f(x) , то для вычисления x нет простого (эффективного) пути.

$$L_N(\alpha, \beta) = \exp\Big((\beta + o(1)) (\ln N)^{\alpha} (\ln \ln N)^{1-\alpha} \Big)$$

– *ПДЛ* — задача дискретного логарифмирования, о которой мы говорили выше. А именно, по данным $A, B \in G$ найти такой x, что $B = A^x$.

– *ЗДХ* — задача Диффи-Хеллмана, которая состоит в следующем: даны элементы $A \in G$, $B = A^x$ и $C = A^y$; требуется вычислить $D = A^{xy}$.

– *ПВДХ* — проблема выбора Диффи–Хеллмана. Дано:

$$A \in G, \quad B = A^x, \quad C = A^y \quad \text{и} \quad D = A^z;$$

требуется определить, является ли z произведением $z = x \cdot y$.

4 Алгоритм Диффи-Хелмана

Авторы публикации [DifH76] предложили использовать для шифрования одностороннюю функцию-ловушку. *Односторонняя функция* - это функция $f : A \longrightarrow B$ со следующими свойствами:

F1) $f(a)$ легко вычисляется для любого $a \in A$.

F2) вычислительно невозможно найти $f^{\leftarrow}(b)$ почти для всех $b \in B$.

Односторонняя функция-*ловушка* — это односторонняя функция с еще одним свойством

F3) $f^{\leftarrow}(b)$, $b \in B$, легко вычисляется, если известна некоторая дополнительная информация.

Свойство F1 делает такую функцию практичной в использовании, тогда как свойство F2 обеспечивает безопасность при использовании f в целях шифрования. Свойство F3 делает возможным дешифрование сообщений получателем.

Алгоритм Диффи – Хеллмана (Diffie - Hellman)

Отправитель P_1 | **Получатель P_2**

1. Генерация n, a (открытые: n — модуль, a — основание)

2. Случайное число X, вычисляет $A = a^x \pmod n$

A →

3. Случайное число Y, вычисляет $B = a^y \pmod n$

4. Вычисление ключа $Kp_1 = B^x \pmod n$

← B

5. Вычисление ключа $Kp_2 = A^y \pmod n$

Пример

n = 5, a = 7, x = 3, y = 2

$A = 7^3 \pmod 5 = 343 \pmod 5 = 3$

$Kp_1 = 4^3 \pmod 5 = 64 \pmod 5 = 4$

$B = 7^2 \pmod 5 = 49 \pmod 5 = 4$

$Kp_2 = 3^2 \pmod 5 = 4$

*

5 RSA

современной криптографии – *односторонней функцией с «лазейкой»* (trapdoor function).

Эта система базируется на следующих двух фактах из теории чисел:

1) задача проверки числа на простоту является сравнительно легкой;

2) задача разложения чисел вида $n = pq$ (p и q — простые числа) на множители является очень трудной, если мы знаем только n, а p и q — большие числа (это так называемая задача факторизации).

Алгоритм RSA

Чтобы использовать алгоритм RSA, надо сначала сгенерировать открытый и секретный ключи, выполнив следующие шаги.

1. Выбрать два очень больших простых числа p и q.
2. Определить n как результат умножения p на $q (n = pq)$.
3. Выбрать большое случайное число d. Оно должно быть взаимно простым с результатом умножения $(p-1)(q-1)$.
4. Определить такое число e, для которого является истинным следующее соотношение: $ed \bmod ((p-1)(q-1)) = 1$.
5. Назвать открытым ключом числа e и n, а секретным ключом — числа d и n.

Далее, чтобы зашифровать данные по известному ключу $\{e, n\}$, необходимо разбить шифруемый текст на блоки, каждый из которых может быть представлен в виде числа $M(i) = 0, 1, \ldots, n-1$; зашифровать текст, рассматриваемый как последовательность чисел $M(i)$ по формуле $C(i) = M(i)^e \bmod (n)$.

Чтобы расшифровать эти данные, используя секретный ключ $\{d, n\}$, необходимо выполнить следующие вычисления: $M(i) = C(i)^d \bmod (n)$. В результате будет получено множество чисел $M(i)$, которое представляет собой исходный текст.

АСИММЕТРИЧНЫЕ КРИПТОАЛГОРИТМЫ

Приведем простой пример использования метода RSA для шифрования сообщения «ЕДА». Для простоты будем использовать очень маленькие числа (на практике используются намного большие числа).

1. Выберем $p = 3$ и $q = 11$.
2. Определим $n = 3 \cdot 11 = 33$.
3. Найдем $(p-1)(q-1) = 20$. Следовательно, в качестве d выберем любое число, которое является взаимно простым с 20, например $d = 3$.
4. Выберем число e. В качестве такого числа может быть взято любое число, для которого удовлетворяется соотношение $e \cdot 3 \bmod(20) = 1$, например $e = 7$.
5. Представим шифруемое сообщение как последовательность целых чисел в диапазоне $0 \ldots 32$. Пусть буква Е изображается числом 6, буква Д — числом 5, а буква А — числом 1. Тогда сообщение можно представить в виде последовательности чисел 651. Зашифруем сообщение, используя ключ $\{7, 33\}$:

$$C_1 = 6^7 \bmod(33) = 279936 \bmod(33) = 30;$$
$$C_2 = 5^7 \bmod(33) = 78125 \bmod(33) = 14;$$
$$C_3 = 1^7 \bmod(33) = 1 \bmod(33) = 1.$$

Попытаемся расшифровать сообщение $\{30, 14, 1\}$, полученное в результате зашифрования по известному ключу, на основе секретного ключа $\{3, 33\}$:

$$M_1 = 30^3 \bmod(33) = 27000 \bmod(33) = 6;$$
$$M_2 = 14^3 \bmod(33) = 2744 \bmod(33) = 5;$$
$$M_3 = 1^3 \bmod(33) = 1 \bmod(33) = 1.$$

Таким образом, в результате расшифрования сообщения получено исходное сообщение «ЕДА».

Алгоритм RSA (Rivest-Shamir-Adleman)

Генерация ключей

Получатель 1. P, Q - простые, $N = P \cdot Q$

2. $\varphi(N) = (P-1) \cdot (Q-1)$, $\varphi(N)$ - функция Эйлера

Выбор открытого ключа Y:

$1<Y\leq \varphi(N)$, НОД(Y, $\varphi(N)$) = 1

Вычисление секретного ключа X:

$X \cdot Y \equiv 1 \pmod{\varphi(N)}$ (N,Y) → отправителю

Отправитель шифрование M (M_i = 0, 1, 2, …, N-1)

3. $C_i = M_i^Y \pmod N$

Получатель расшифрование $C(C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots)$

4. $M_i = C_i^X \pmod N$

Пример

Генерация ключей

1. P = 3, Q = 11, $N = P \cdot Q = 33$

2. $\varphi(N) = (P-1) \cdot (Q-1) = 2 \cdot 10 = 20$

Y = 7, НОД(Y, $\varphi(N)$) = 1

$X \cdot Y = 1 \pmod{20}$, $7 \cdot 3 = 1 \pmod{20}$, X = 3

Сообщение: $M_1M_2 \rightarrow 32$; $M_1 = 3<33$, $M_2 = 2<33$

Шифрование $C_i = M_i^Y \pmod N$

3. $C_1 = 3^7 \bmod 33 = 2187 \bmod 33 = 9$

$C_2 = 2^7 \bmod 33 = 128 \bmod 33 = 29$ Шифротекст 9,29

Расшифрование $M_i = C_i^X \pmod N$

4. $M_1 = 9^3 \bmod 33 = 729 \bmod 33 = 3$

$M_2 = 29^3 \bmod 33 = 24389 \bmod 33 = 2$ Восстановленный текст 3,2

6 КРИПТОАЛГОРИТМЫ НА ОСНОВЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Общие положения

Что такое Эллиптическая кривая?

В общем случае эллиптическая кривая описывается математическим уравнением вида:

$$y^2+axy+by=x^3+cx^2+dx+e\ ,$$

где a, b, c, d и e являются действительными числами, удовлетворяющими некоторым простым условиям.

КРИПТОАЛГОРИТМЫ НА ОСНОВЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Общие положения

В случае криптографии с использованием эллиптических кривых приходится иметь дело с редуцированной формой эллиптической кривой, которая определяется над конечным полем.

Особый интерес для криптографии представляет объект, называемый эллиптической группой по модулю p, где p является простым числом.

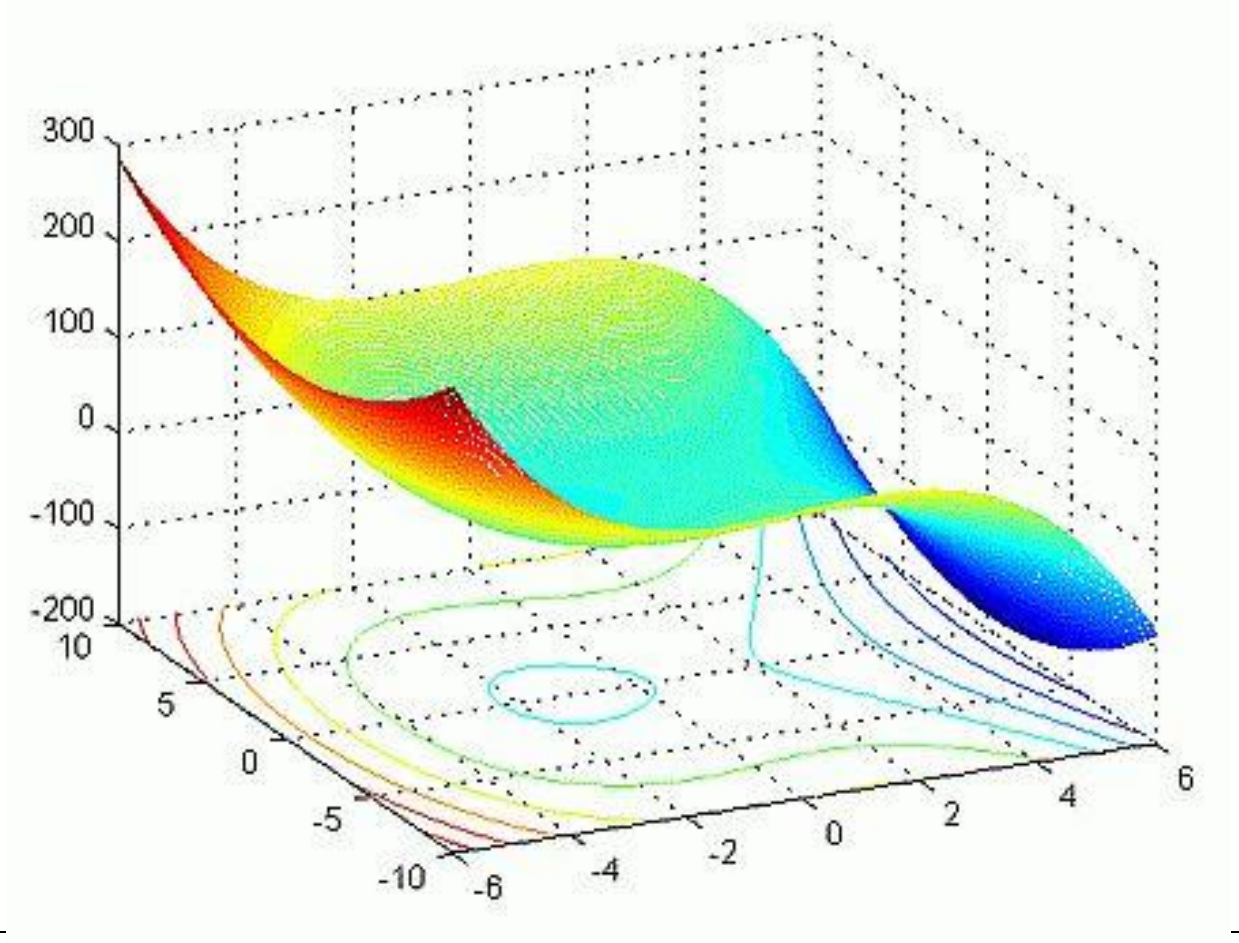
Эллиптическая кривая над конечным полем задаётся уравнением

$$y^2=x^3+ax+b \pmod p.$$

КРИПТОАЛГОРИТМЫ НА ОСНОВЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Общие положения

Пространственный график эллиптической кривой $y^2=x^3-5x+1$



КРИПТОАЛГОРИТМЫ НА ОСНОВЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Общие положения

Криптоалгоритм основан на “**Проблеме Дискретного Логарифма Эллиптической Кривой**” (Elliptic Curve Discrete Logarithm Problem – **ECDLP**):

“Даны “базовая точка” P и расположенная на кривой точка kP; найти значение k”.

Для эллиптических кривых и базовых точек решение таких уравнений представляет весьма и весьма большую трудность!

С точки же зрения криптографии имеется возможность определить новую криптографическую систему на основе эллиптических кривых.

Любая стандартная система, основанная на проблеме дискретного логарифма, аналогична системе основанной на ECDLP. Например, Эллиптическая Кривая DSA (ECDSA) уже стандартизирована (ANSI X9.62 – Ref. 4) и на ее основе может быть реализован протокол открытого обмена ключами Diffie-Hellman.

КРИПТОАЛГОРИТМЫ НА ОСНОВЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Общие положения

размеры параметров эллиптических систем и RSA, обеспечивающих одинаковую стойкость шифра

Система на основе эллиптической кривой (базовая точка P)	RSA (длина модуля n)
106 бит 132бит 160бит 224бит	512бит 768бит 1024бит 2048бит

КРИПТОАЛГОРИТМЫ НА ОСНОВЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Общие положения

Использование эллиптических кривых позволяет строить высоко защищенные системы с ключами явно меньших размеров по сравнению с аналогичными “традиционными” системами типа RSA или DSA.

В частности такие системы менее требовательны к вычислительной мощности и объему памяти оборудования и потому хорошо подходят, например, для смарт-карт или портативных телефонов.

Разумеется существуют и проблемы, которые ограничивают повсеместное распространение криптографических систем на основе эллиптических кривых.

КРИПТОАЛГОРИТМЫ НА ОСНОВЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Некоторые проблемы и трудности в использовании систем на основе Эллиптической Кривой

1. Истинная сложность ECDLP ещё не осознана полностью. Исследования показывают, что некоторые использовавшиеся для отработки алгоритмов шифрования эллиптические кривые, фактически не подходят для таких операций. Такие кривые называются «**аномальными**».

2. Чрезвычайно трудно создать подходящую кривую и точку P. Координаты базовой точки P должны иметь достаточно большое значение, чтобы гарантировать трудность взлома ECDLP.

3. Относительно медленная проверка цифровой подписи.

4. Проблема лицензирования и патентования криптосистем на основе эллиптической кривой еще не решена. В этой области существует множество патентов, но главным образом для применения в частных случаях.

КРИПТОАЛГОРИТМЫ НА ОСНОВЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Скорость обработки

Сравнительные характеристики алгоритмов RSA и ECDSA при создании и проверки подписей.

Алгоритмы выполнялись на параллельных процессорах Motorola 56303 DSP (66 МГЦ).

	Создание подписи	**Проверка подписи**
RSA (1024 бита)	**25 ms**	**< 2 ms**
ECDSA (160 бит)	**32 ms**	**33 ms**
RSA (2048 битов)	**120 ms**	**5ms**
ECDSA (216 битов)	**68 ms**	**70 ms**

КРИПТОАЛГОРИТМЫ НА ОСНОВЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Заключительные замечания

Криптосистемы на основе эллиптической кривой получают все большее распространение скорее
как альтернатива, **а не замена**
системам на основе RSA, поскольку системы на основе ECDLP имеют некоторые преимущества, особенно при использовании в устройствах с маломощными процессорами и/или маленькой памятью.

7 Алгоритм Эль-Гамаля (El Gamal)

Генерация ключей

1. P, G - простые (P>G)
2. X - секретный ключ, (случайное целое X<P)
3. Y - открытый ключ $Y = G^X \bmod P$

Шифрование M

4. K - случайное целое, 1<K<(P-1), НОД(K, P-1) = 1

   $a = G^K \bmod P$ $b = Y^K M \bmod P$ (a, b) - шифротекст

Расшифрование (a, b)

5. $M = (b / a^X) \bmod P$

Пример p=19 G=2 x=3 k=5 M=10

Шифрование M = 5

1. P = 11, G = 2 (P>G)
2. X<P, X = 8 - секретный ключ
3. $Y = G^X \bmod P = 2^8 \bmod 11 = 256 \bmod 11 = 3$

   Y = 3 - открытый ключ
4. K = 9, НОД(K, P-1) = 1, НОД(9, 10) = 1

   $a = G^K \bmod P = 2^9 \bmod 11 = 512 \bmod 11 = 6$

   $b = Y^K M \bmod P = 3^9 \cdot 5 \bmod 11 = 19683 \cdot 5 \bmod 11 = 9$

   (a, b) = (6, 9) - шифротекст

Расшифрование

5. $M = (b / a^X) \bmod P = 9 / 6^8 \bmod 11$

   $6^8 M = 9 \bmod 11$

   $1679619 \cdot M = 9 \bmod 11$

   M = 5

*

ЭЦП RSA

Генерация ключей

1. P, Q - большие простые числа.
2. Модуль $N = P \cdot Q$; $\varphi(N) = (P-1) \cdot (Q-1)$, $\varphi(N)$ - функция Эйлера
3. Открытый ключ $E \leq \varphi(N)$; НОД$(E, \varphi(N)) = 1$
4. Секретный ключ $D < N$; $E \cdot D = 1 \pmod{\varphi(N)}$

Постановка подписи

5. Вычисление хэш-функции $H = h(M)$, M - сообщение
6. Подпись $(M,S) \rightarrow S = H^D \pmod{N}$

Проверка подписи

7. Вычисление хэш-функции $H' = h(M)$
8. Вычисление $H'' = S^E \pmod{N}$
9. $H' = H''$?

Пример

Генерация ключей

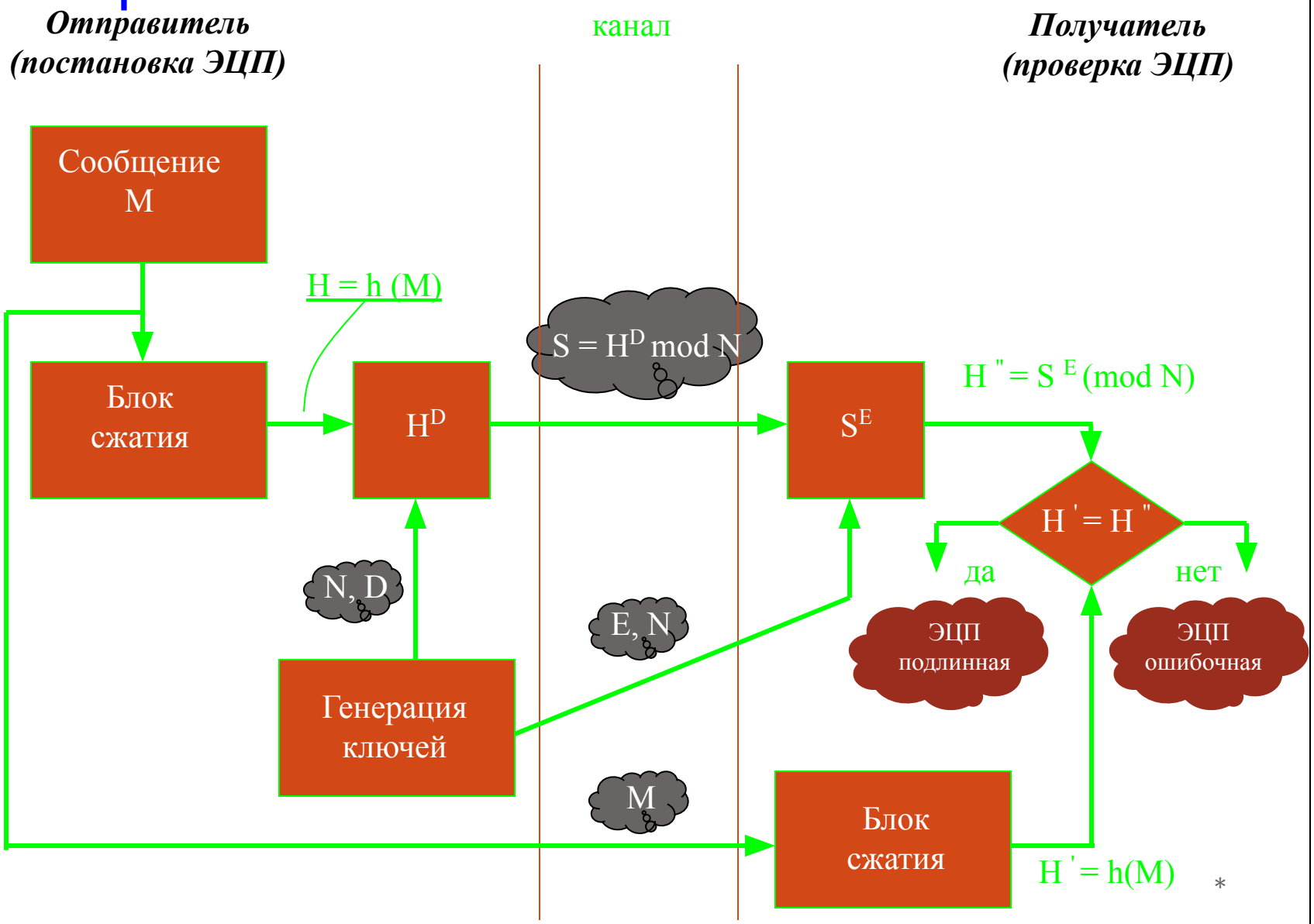
1. P = 3, Q = 11
2. N = 33; $\varphi(N) = 20$
3. E = 7, НОД(7, 20) = 1
4. D = 3, $7 \cdot 3 = 1 \pmod{20}$

Постановка подписи

5. H = 4
6. $S = 4^3 \pmod{33} = 31$

Проверка подписи

7. H ' = 4
8. $H'' = 31^7 \pmod{33} = 27512614111 \pmod{33} = 4$
9. H ' = H" = 4 – подпись верна

*

Обобщенная схема формирования ЭЦП