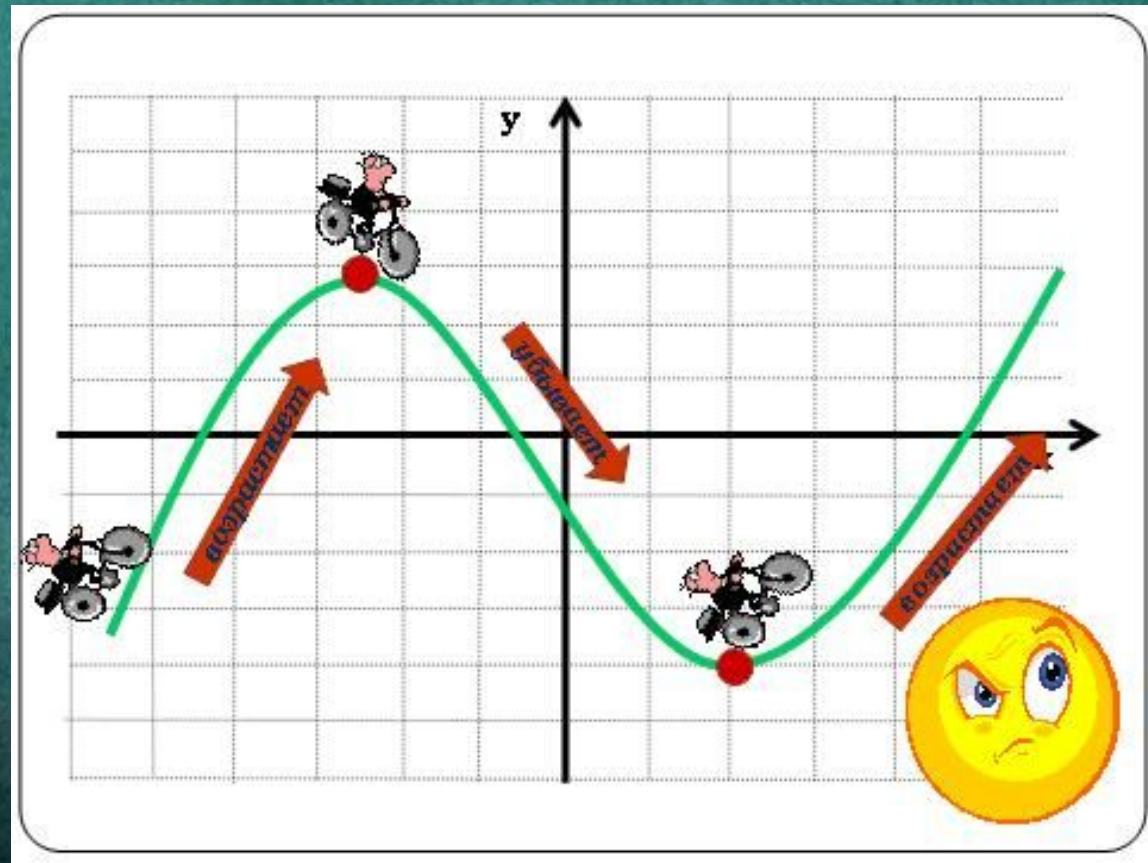
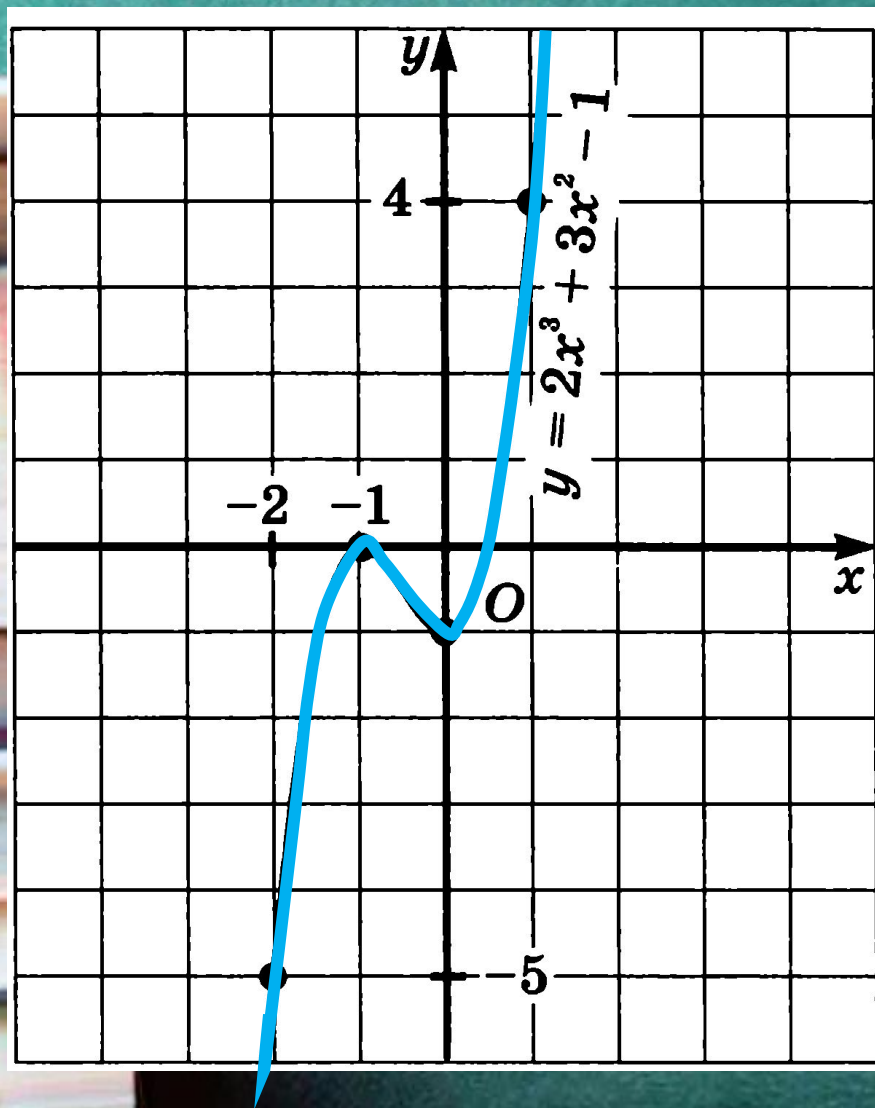


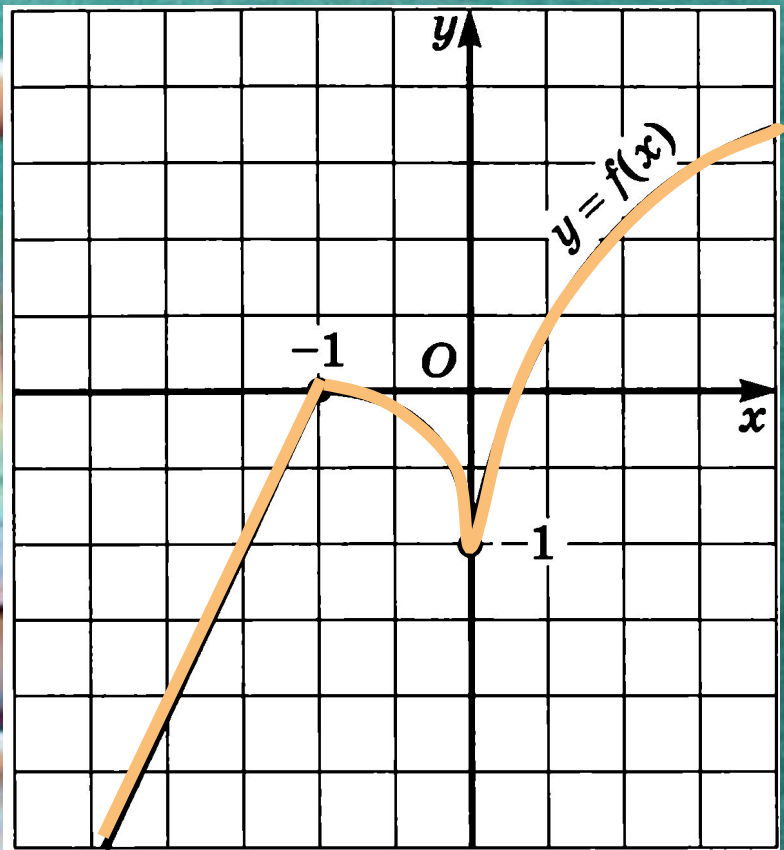
Отыскание точек экстремума





В точках $(-1;0)$, $(0; -1)$

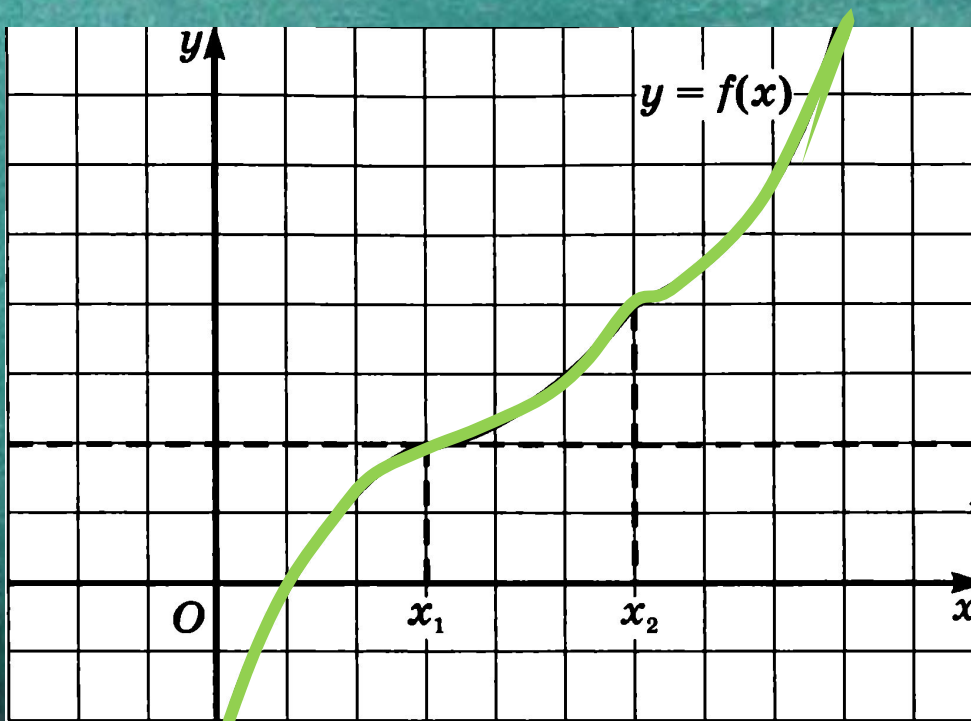
- 1) происходит изменение характера монотонности функции;
- 2) касательная к графику функции параллельна оси Ox , т.е $f'(x)=0$;
- 3) точки $x=-1$ – точка максимума, $x=0$ – точка минимума



В точках $(-1; 0)$, $(0; -1)$ касательные не параллельны оси x . В обеих точках экстремума производная не существует.

Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует

Точки, в которые производная равна нулю называют *стационарными*, а точки, в которых производная не существует - *критическими*



В точке x_1 , в которой производная обращается в нуль, функция имеет *перегиб*;
а в точке x_2 , в которой производная не существует, функция имеет *излом*.

Теорема 4 (достаточные условия экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) > 0$, то $x = x_0$ — точка минимума функции $y = f(x)$;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ — точка максимума функции $y = f(x)$;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.

**Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$
на монотонность и экстремумы**

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки.
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
4. Опираясь на теоремы 1, 2 и 4, сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.

Найдите промежутки монотонности:

1. $y = 3x^2 - 2x; \quad y' = 6x - 2;$

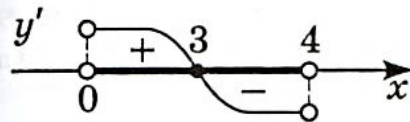
а) $y' \geq 0; \quad 6x - 2 \geq 0; \quad x \geq \frac{1}{3},$

т. е. на $\left[\frac{1}{3}; \infty\right)$ $y \uparrow$.

б) $y' \leq 0; \quad 6x - 2 \leq 0; \quad x \leq \frac{1}{3},$

т. е. на $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$ $y \downarrow$.

4. $y = x\sqrt{4x - x^2}; \quad y' = \sqrt{4x - x^2} + x \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} =$
 $= \frac{4x - x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{-2x(x - 3)}{\sqrt{4x - x^2}}.$



$y' \geq 0$ на $(0; 3]$; $y = f(x) \uparrow$, $y' \leq 0$ на $[3; 4)$; $y = f(x) \downarrow$.

Так как $y(0) = 0$ и $y(4) = 0$ (т. е. в этих точках функция определена), то

$y = f(x) \uparrow$ на $[0; 3]$; $y = f(x) \downarrow$ на $[3; 4]$.

Достаточные условия существования экстремумов

Рассмотрим $y = f(x)$ для которой выполняются следующие условия:

- а) $D(f) = (a; b)$;
- б) $y = f(x)$ непрерывна в любой внутренней точке $x_0 \in (a; b)$;
- в) в δ -окрестности x_0 на $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ производная меняет свой знак на противоположный.

Тогда, двигаясь слева направо, получим:

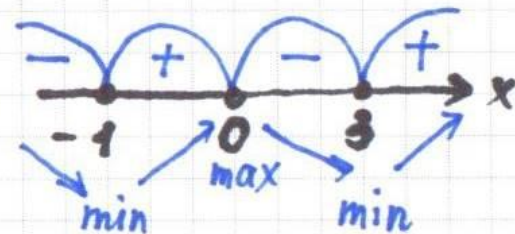
- 1) если $f'(x)$ меняет знак с « $-$ » на « $+$ », то x_0 — точка минимума, если $f'(x)$ меняет знак с « $+$ » на « $-$ », то x_0 — точка максимума;
- 2) если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума, если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума.

Найдите экстремумы функции:

$$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$$

$$y'(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$$

$$y'(x) = 0; \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$



$$x_{\min} = -1; 3$$

$$x_{\max} = 0$$

С помощью $y''(x)$:

$$y''(x) = 3x^2 - 4x - 3$$

$$y''(-1) = 4 > 0$$

$$y''(3) = 12 > 0$$

$$y''(0) = -3 < 0$$

$\Rightarrow -1; 3$ - точки минимума

$\Rightarrow 0$ - точка максимума

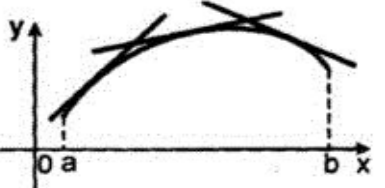
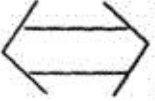
Точки перегиба и промежутки выпуклости, вогнутости

Теоремы о выпуклости функции и точках перегиба:

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$ и имеет непрерывную, не равную нулю в точке $x_0 \in (a; b)$ вторую производную.

Тогда, если $f''(x) > 0$ всюду на интервале $(a; b)$, то функция имеет *вогнутость на этом интервале*, если $f''(x) < 0$, то функция имеет *выпуклость*.

Точкой перегиба графика функции называется точка $M(x_1; f(x_1))$, разделяющая промежутки выпуклости и вогнутости.

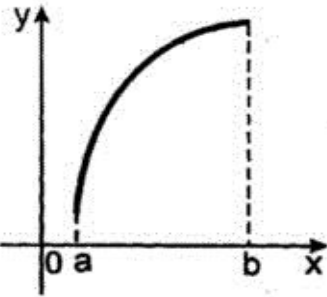
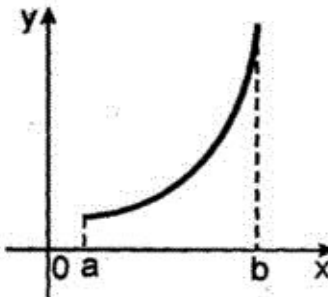
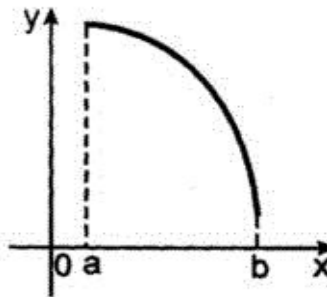
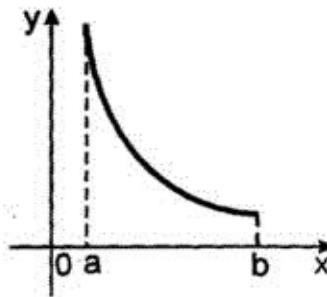
Кривая, выпуклая на (a, b) .		Кривая размещена ниже любой своей касательной.	
Кривая, вогнутая на (a, b) .		Кривая размещена выше любой своей касательной.	

Достаточные признаки выпуклости и вогнутости

$f''(x) > 0$ на (a, b) .	\Rightarrow	Кривая, вогнутая на (a, b) .	$f''(x) < 0$ на (a, b) .	\Rightarrow	Кривая, выпуклая на (a, b) .
----------------------------	---------------	--------------------------------	----------------------------	---------------	--------------------------------

Для построения графика целесообразно проанализировать, какой вид имеет график функции на интервале (a, b) в зависимости от знаков первой и второй производных.

Результат удобно свести в таблицу:

$y' > 0$ $y'' < 0$	$y' > 0$ $y'' > 0$	$y' < 0$ $y'' < 0$	$y' < 0$ $y'' > 0$
			
возрастает, выпуклая.	возрастает, вогнутая.	убывает, выпуклая.	убывает, вогнутая.

Пример. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Находим первую производную $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2};$

Вторая производная $f''(x) = 2 \frac{3x^2 + 1}{(x - 1)^3 (x + 1)^3}.$

график кривой вогнутый $f''(x) > 0, x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

график кривой выпуклый $f''(x) < 0, x \in (-1; +1)$