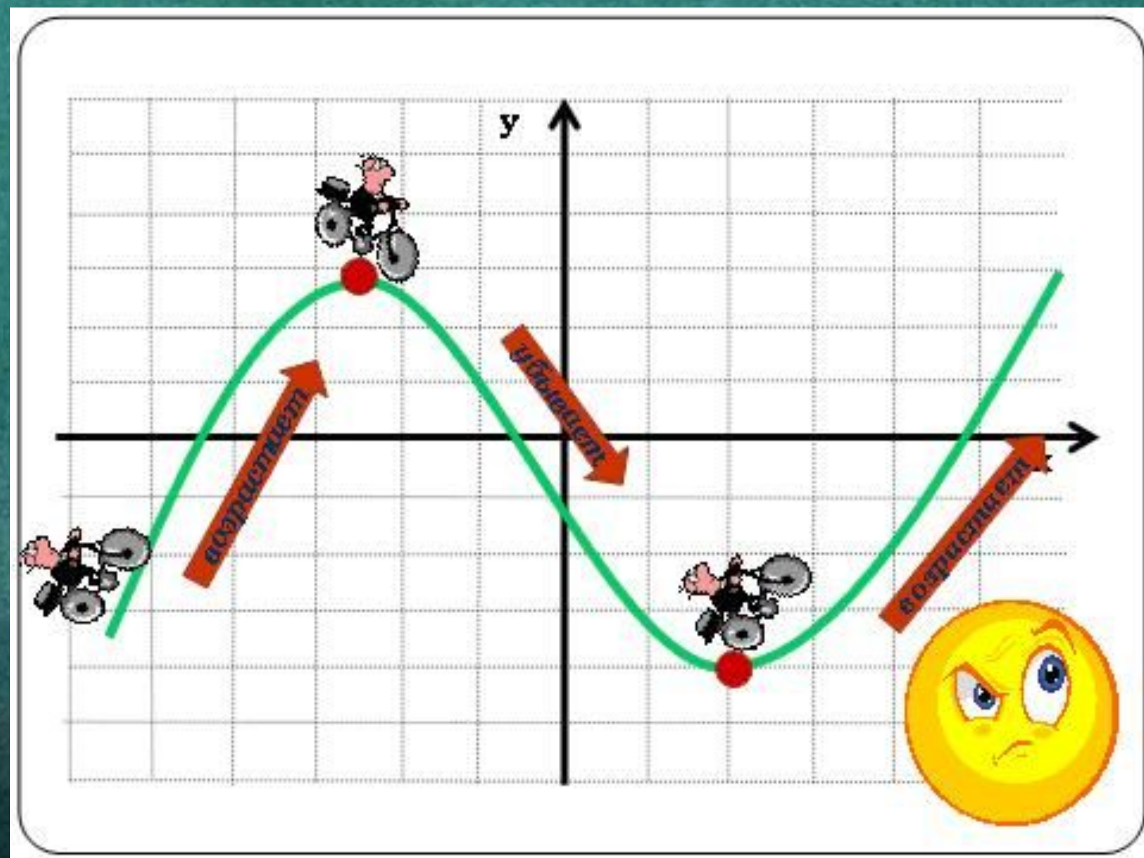
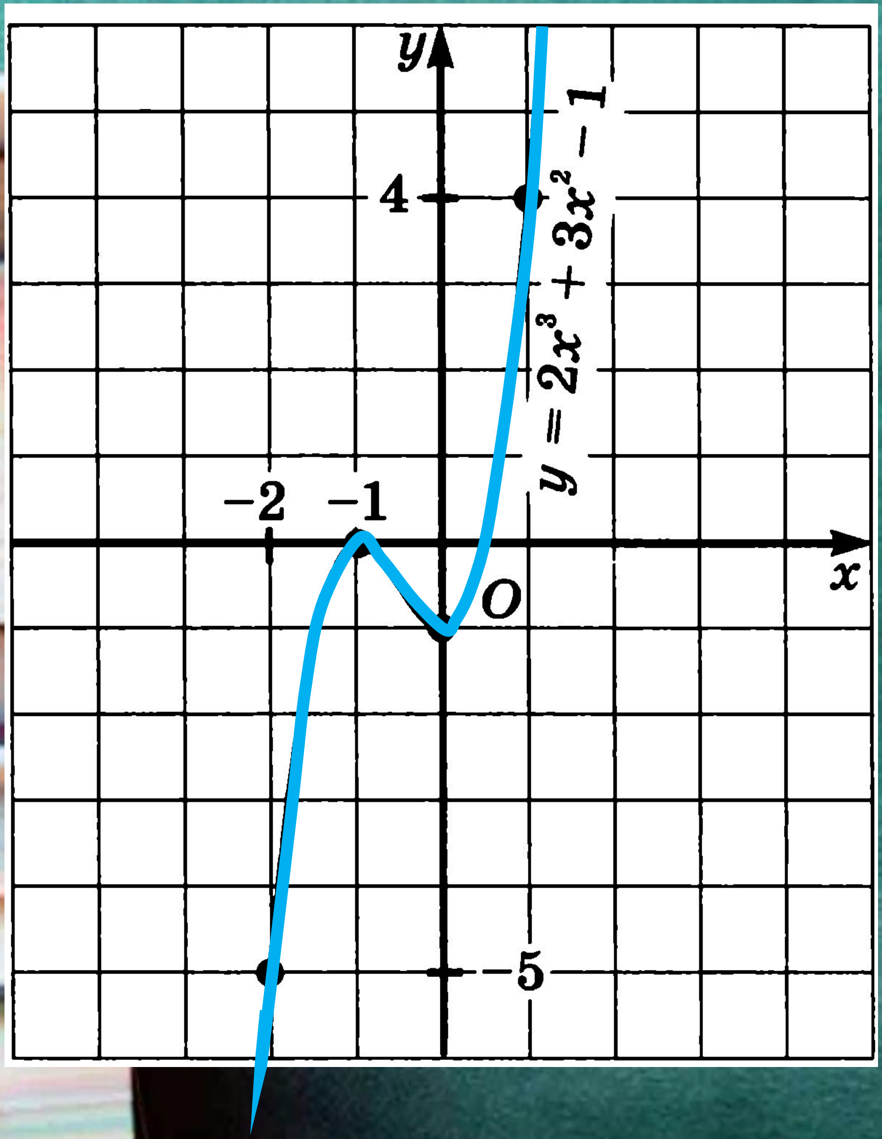
Отыскание точек экстремума





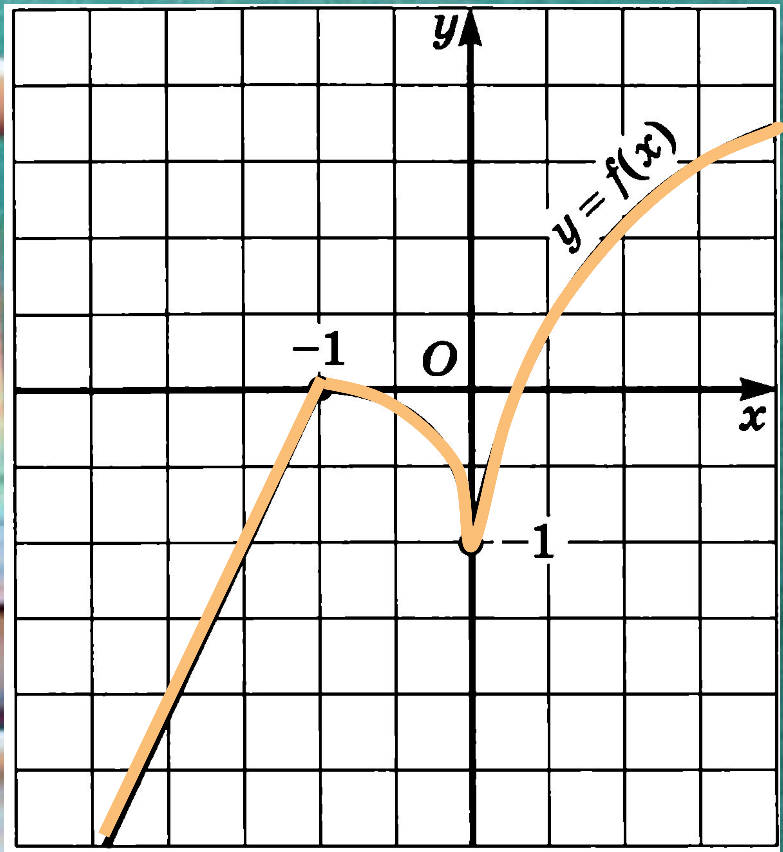
В точках (-1;0), (0; -1)

1) происходит изменение характера монотонности функции;

2) касательная к графику функции параллельна оси ОХ, т.е $f'(x)=0$;

3) точки х=-1 –точка максимума,

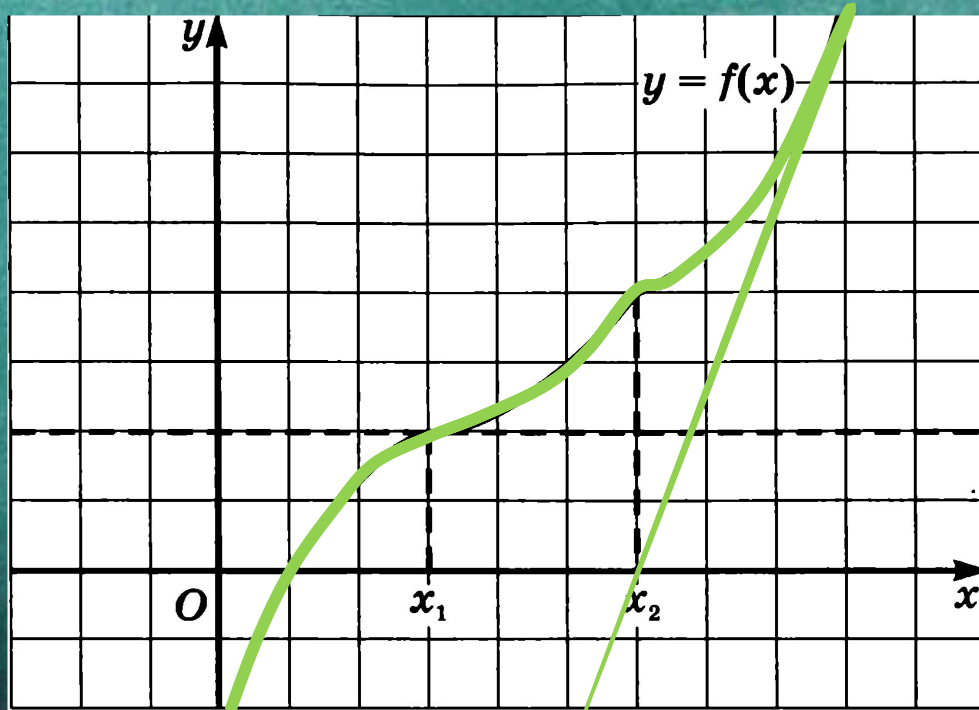
х=0 – точка минимума



В точках (-1;0), (0; -1) касательные не параллельны оси х. В обеих точках экстремума производная не существует.

Т. Если функция у= f(x) имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует

Точки, в которые производная равна нулю называют *стационарными*, а точки, в которых производная не существует - *критическими*



В точке x_1, в которой производная обращается в нуль, функция имеет *перегиб*;
а в точке x_2 , в которой производная не существует, функция имеет *излом*.

Теорема 4 (достаточные условия экстремума). *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:*

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) > 0$, то $x = x_0$ — точка минимума функции $y = f(x)$;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ — точка максимума функции $y = f(x)$;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.

Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки.
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
4. Опираясь на теоремы 1, 2 и 4, сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.

Найдите промежутки монотонности:

1. $y = 3x^2 - 2x$; $\quad y' = 6x - 2$;

а) $y' \geqslant 0$; $6x - 2 \geqslant 0$; $x \geqslant \dfrac{1}{3}$,

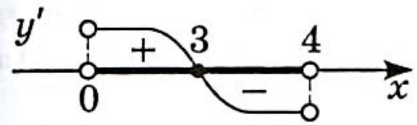
т. е. на $\left[\dfrac{1}{3}; \infty\right)$ $\quad y \uparrow$.

б) $y' \leqslant 0$; $\quad 6x - 2 \leqslant 0$; $\quad x \leqslant \dfrac{1}{3}$,

т. е. на $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right]$ $\quad y \downarrow$.

4. $y = x\sqrt{4x - x^2}$; $\quad y' = \sqrt{4x - x^2} + x\dfrac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} =$

$$= \frac{4x - x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{-2x\,(x - 3)}{\sqrt{4x - x^2}}.$$



$y' \geqslant 0$ на $(0; 3]$; $\quad y = f(x) \uparrow$, $\quad y' \leqslant 0$ на $[3; 4)$; $\quad y = f(x) \downarrow$.

Так как $y(0) = 0$ и $y(4) = 0$ (т. е. в этих точках функция определена), то

$y = f(x) \uparrow$ на $[0; 3]$; $\quad y = f(x) \downarrow$ на $[3; 4]$.

Достаточные условия существования экстремумов

Рассмотрим $y = f(x)$ для которой выполняются следующие условия:

а) $D(f) = (a; b)$;

б) $y = f(x)$ непрерывна в любой внутренней точке $x_0 \in (a; b)$;

в) в δ-окрестности x_0 на $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ производная меняет свой знак на противоположный.

Тогда, двигаясь слева направо, получим:

1) если $f'(x)$ меняет знак с «$-$» на «$+$», то x_0 — точка минимума, если $f'(x)$ меняет знак с «$+$» на «$-$», то x_0 — точка максимума;

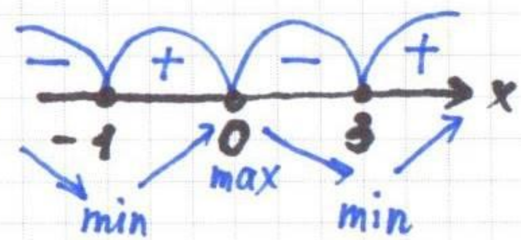
2) если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума, если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума.

Найдите экстремумы функции:

$$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$$

$$y'(x)=x^3-2x^2-3x$$

$$y'(x)=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$$



$x_{min}=-1;3$

$x_{max}=0$

С помощью $y''(x)$:

$$y''(x)=3x^2-4x-3$$

$y''(-1)=4>0$

$y''(3)=12>0$ $\Rightarrow$ $-1;3$ – точки минимума

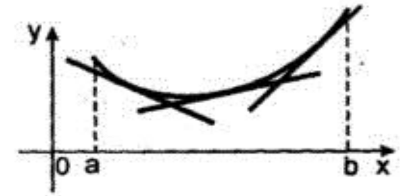
$y''(0)=-3<0$, $\Rightarrow$ 0 – точка максимума

Точки перегиба и промежутки выпуклости, вогнутости

Теоремы о выпуклости функции и точках перегиба:

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$ и имеет непрерывную, не равную нулю в точке $x_0 \in (a; b)$ вторую производную. Тогда, если $f''(x) > 0$ всюду на интервале $(a; b)$, то функция имеет *вогнутость на этом интервале*, если $f''(x) < 0$, то функция имеет *выпуклость.*

Точкой перегиба графика функции называется точка $M(x_1; f(x_1))$, разделяющая промежутки выпуклости и вогнутости.

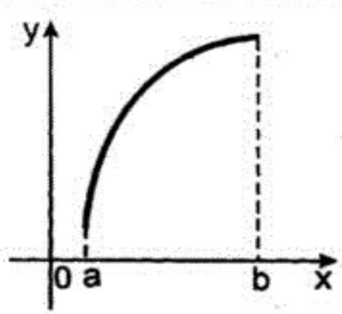
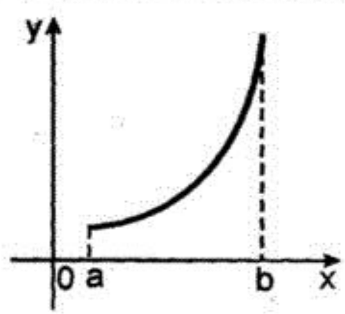
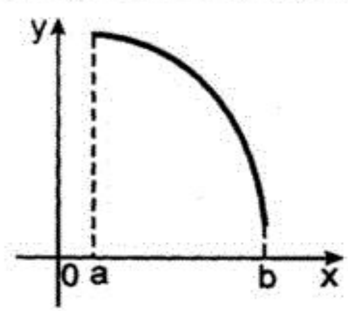
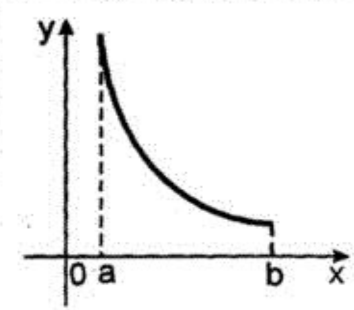
Кривая, выпуклая на (a, b).	$\Longleftrightarrow$	Кривая размещена ниже любой своей касательной.	
Кривая, вогнутая на (a, b).	$\Longleftrightarrow$	Кривая размещена выше любой своей касательной.	

Достаточные признаки выпуклости и вогнутости

$f''(x) > 0$ на (a, b).	$\Longrightarrow$	Кривая, вогнутая на (a, b).	$f''(x) < 0$ на (a, b).	$\Longrightarrow$	Кривая, выпуклая на (a, b).

Для построения графика целесообразно проанализировать, какой вид имеет график функции на интервале (a, b) в зависимости от знаков первой и второй производных.

Результат удобно свести в таблицу:

$y' > 0$, $y'' < 0$	$y' > 0$, $y'' > 0$	$y' < 0$, $y'' < 0$	$y' < 0$, $y'' > 0$
			
возрастает, выпуклая.	возрастает, вогнутая.	убывает, выпуклая.	убывает, вогнутая.

Пример. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Находим первую производную $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$;

Вторая производная $f''(x) = 2\frac{3x^2+1}{(x-1)^3(x+1)^3}$.

график кривой вогнутый $f''(x) > 0,\ x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$

график кривой выпуклый $f''(x) < 0,\ x \in (-1;+1)$