Вырождение влияния критериев

Студент: Сорока З.С.
Группа: М-ТЭ-18

На основе теории подобия можно получить безразмерные величины и вывести условия точного подобия для любых процессов. Однако, в ряде случаев, в частности для процессов, развивающихся под действием нескольких физических эффектов, число безразмерных величин оказывается достаточно большим, а зависимости между ними – сложными. При этом, теория точного подобия не даёт рекомендаций по получению наиболее рациональной системы критериев и упрощению зависимостей между ними. Кроме того, для некоторых сложных процессов, оказывается затруднительно выполнить условия точного подобия, т.е. условия равенства для модели и оригинала сразу нескольких критериев

Для решения этих задач можно воспользоваться следующим широко используемым в науке и технике принципом приближения: если процесс развивается под действием нескольких физических эффектов одинаковой природы, но разной величины, то влияние на процесс эффекта малой по сравнению с остальными величинами должно быть незначительным, и влиянием такого эффекта можно пренебречь. В этом случае говорят о вырождении критериев подобия и проявлении свойства автомодельности. Независимость процесса от каких-либо критериев подобия упрощает построение модели и поэтому желательна.

Математически этот принцип можно выразить следующим образом: если в уравнении, выражающем условие равенства нулю суммы нескольких членов, имеются слагаемые несоизмеримо малые по сравнению с остальными, то этими малыми слагаемыми можно пренебречь.

Бесконечное уменьшение или увеличение численного значения критерия говорит о несоизмеримости сопоставляемых эффектов. Поэтому влияние на процесс бесконечно больших и малых критериев должно вырождаться.

С этой целью проанализируем закономерности процессов, развивающихся под действием трех каких-либо физических эффектов, и особенности описывающих такие процессы безразмерных зависимостей при различных соотношениях между эффектами.

Уравнение математической физики для процессов, развивающихся под действием трёх физических эффектов, в общем случае имеет такой вид:

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0 \qquad (1)$$

где D_1, D_2, D_3 - дифференциальные операторы, каждый из которых является математическим выражением соответствующих физических эффектов. При этом один из эффектов (эффект-функция) является результатом действия остальных (эффектов-параметров и эффектов-аргументов). Для определённости будем считать, что в (1) эффектом-функцией является D_1 .

Разделим уравнение (1) на один из независимых операторов, для определенности – на первый. При этом оператор, на который делят остальные, а, следовательно, и эффект, с которым сравниваются остальные, будем называть базовым.

В результате получим:

$$1+\frac{D_2}{D_1}+\frac{D_3}{D_1}=0. \qquad (2)$$

Уравнение вида (2) можно преобразовать в зависимости между безразмерными величинами, являющимися приближенной мерой порядка соответствующих относительных операторов:

$$\frac{D_2}{D_1}\sim\pi_{21}, \quad \frac{D_3}{D_1}\sim\pi_{31}$$

Знак ~ говорит о том, что сравниваемые величины имеют один порядок, т. е. соизмеримы между собой.

В результате преобразования из уравнения (2) получим:

$$F'(\pi_{21},\pi_{31})=0 \quad \text{или} \quad \pi_{31}=f\left(\pi_{21}\right) \qquad (3)$$

Рассмотрим случаи различных соотношений между эффектами:

1) Случай, когда все эффекты соразмерны между собой: $D_1 \approx D_2 \approx D_3$

При этом будут иметь место такие соотношения: $\dfrac{D_2}{D_1} \approx 1$, $\dfrac{D_3}{D_1} \approx 1$

Но так как критерии являются приближенной мерой соотношения эффектов, то и численные значения соответствующих критериев тоже должны быть соизмеримы с единицей:

$$\pi_{21} \approx 1, \quad \pi_{31} \approx 1$$

Так как влияние на процесс соизмеримых эффектов должно быть существенным, существенным должна быть и зависимость между критериями, соизмеримыми с единицей.

2) Случай, когда 1 из действующих независимых эффектов несоизмеримо мал по сравнению с остальными. Предположим, что мал второй эффект:

$$D_2 \ll D_1, \quad D_2 \ll D_3,$$

Тогда получим такие соотношения: $\dfrac{D_2}{D_1} \ll 1, \;\; \pi_{21} \ll 1$ или $\pi_{21} \to 0.$

Если какой-то из действующих эффектов становится малым по сравнению с другими, то безразмерный комплекс, числителем которого стоит такой эффект, становится малым по сравнению с единицей.

Так как влияние эффекта D_2 является сравнительно малым по сравнению с другими эффектами, а, следовательно, $\pi_{21} \to 0,$ то таким критерием (и эффектом) можно пренебречь.

В результате уравнение (1) приобретает вид:

$$D_1 + D_3 = 0, \qquad (4)$$

Такое уравнение соответствует случаю, когда существенными для процесса являются только два физических эффекта, причём один можно рассматривать как результат действия второго.

В этом случае обязательно выполняется условие:

$$|D_1| = |D_3|, \qquad \left|\frac{D_3}{D_1}\right| = 1. \qquad (5)$$

Следовательно, если для процесса существенны только два эффекта, один из которых является результатом действия другого, то численные значения их должны быть равны.

Из уравнения (4) можно получить лишь один безразмерный комплекс

$$\pi_{31} = \frac{D_3}{D_1}$$

и этот комплекс должен быть равен постоянной величине $\pi_{31} = const$
Причём, численное значение такого комплекса должно быть соизмеримо с единицей, т.е. иметь порядок единицы $\pi_{31} \sim 1$

Т.о., при бесконечном уменьшении численного значения критерия $\pi_{21} \to 0$ влияние такого критерия в приведенной системе вырождается.

3) Случай, когда малым по сравнению с остальными становится другой эффект, а именно . Очевидно, что влиянием на процесс такого эффекта в этом случае можно пренебречь. Однако, при преобразовании, аналогичном предыдущему случаю, получим такие соотношения:

$$\frac{D_2}{D_1} \to \infty, \quad \frac{D_3}{D_1} \to \infty \;=> \pi_{21} \to \infty, \pi_{31} \to \infty,$$

Зависимость (3) в этом случае становится неопределённой, т.к. входящие в неё величины стремятся к бесконечности. Для получения рациональной безразмерной зависимости сопоставлять эффекты нужно не с самым малым, а с одним из существенных. Так как результат действия остальных независимых эффектов за базовый эффект примем независимый D_2.

Тогда уравнение (1) примет вид: $$\frac{D_1}{D_2} + 1 + \frac{D_3}{D_2} = 0 \qquad (6)$$

Отсюда вытекает: $\frac{D_1}{D_2} \ll 1$, $\pi_{12} \ll 1$ или $\pi_{12} \to 0$

Влиянием критерия π_{12} так же можно пренебречь, в результате чего получим постоянство значения нового критерия $\pi_{32} = const \ll 1$

Следовательно, при новой форме критериев опять получается вырождение безразмерной зависимости и влияния одного из критериев.

Сравним полученный новый критерий со старым. Легко доказать, что:

$$\pi_{32} = \frac{\pi_{31}}{\pi_{21}}.$$

Поэтому, если выразим безразмерную зависимость в исходных комплексах, то получим при $D_1 \to 0, \pi_{21} \to \infty$

$$\frac{\pi_{31}}{\pi_{21}} = const.$$

На практике нередко используются критерии с различными степенями одних и тех же физических величин. С физической точки зрения такие критерии представляют преобразование вида:

$$\pi_{21} \boxtimes \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^n ,$$

где – показатель степени, обычно имеющий такие показатели как:

$$n = 1, 2, 3, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}.$$

Если $n_x \to \infty$ безразмерная зависимость может иметь более общий вид:

$$\frac{\pi_x}{\pi_y{}^n} = const.$$

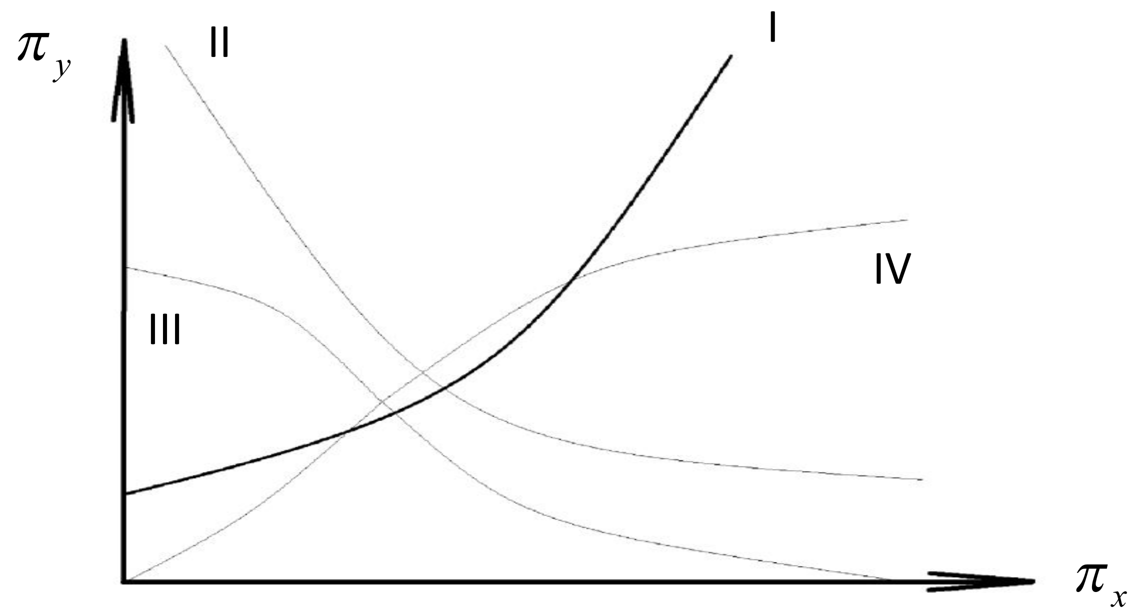
Таким образом, при рассмотренных вариантах преобразования безразмерная зависимость между двумя критериями вырождается в зависимость $n_y = const$, что отражает постоянство исходной безразмерной функции в одном из крайних случаев, например, при $n_x \to 0.$

$$n_x / \mathrm{n}_y{}^n = const$$

И в зависимость $\pi_x / \pi_y{}^n = const,$ отражающую постоянство другой безразмерной функции в крайнем случае, например, при $n_x \to \infty,$ причем, в этом крайнем случае так же оказывается постоянным значение безразмерной функции, но не исходной, а той которая получена путём объединения исходных критериев.

Практически это означает, что влияние любого критерия в одной из предельных областей становится несущественным, а в противоположной предельной области влияние такого критерия становится несамостоятельным.

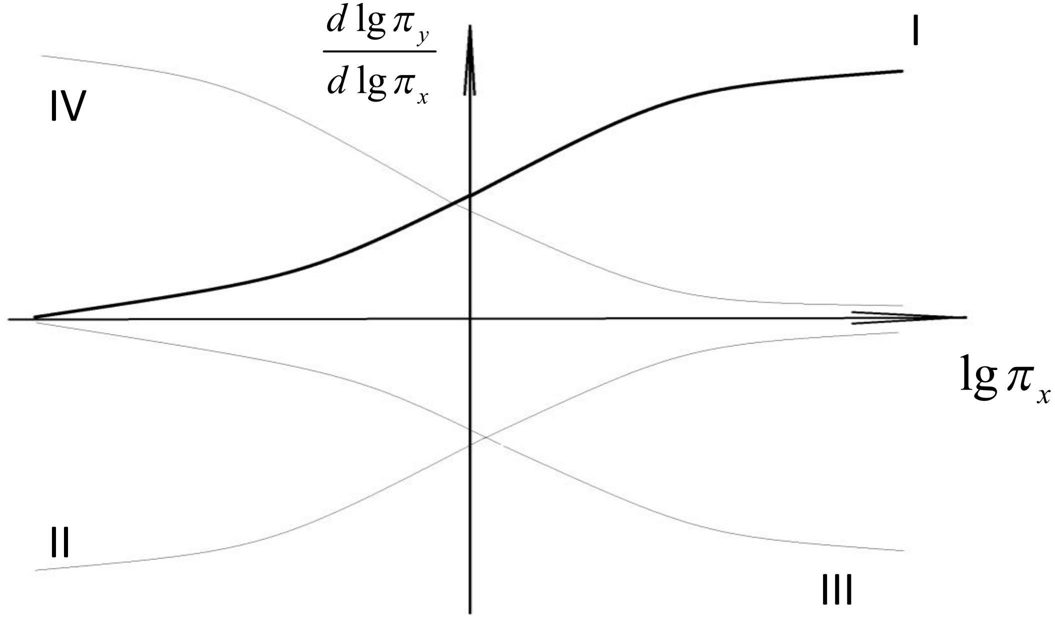
Графически безразмерная зависимость $\pi_y = f(\pi_x)$, где π_x - безразмерный аргумент, а π_y - безразмерная функция, имеет следующий вид (I):



Математически степень влияния одной величины на другую удобно оценивать по виду дифференциальной зависимости между ними. Учитывая, что в одном из предельных случаев зависимости между безразмерными величинами имеют вид $\pi_x / \pi_y^{\,n} = const$, при $\pi_x = const$, для оценки значимости критериев предлагается использовать графики дифференциальной зависимости между логарифмами критериев в виде:

$$\frac{d\lg\pi_y}{d\lg\pi_x} = f\left(\lg\pi_x\right) \qquad (8)$$

Для рассмотренного варианта преобразования дифференциальная зависимость будет иметь следующий вид:



Однако, поскольку из системы одних и тех же размерных величин можно получить, как известно, разные безразмерные комплексы, то из уравнения (1) можно получить разные безразмерные зависимости.

В качестве безразмерной функции здесь выступает $\pi_y = \pi_{31}$, а в качестве безразмерного аргумента для I - $\pi_x = \pi_{21}$, II - $\pi_x = \pi_{12}$;

В качестве безразмерной функции здесь выступает $\pi_y = \pi_{13}$, а в качестве безразмерного аргумента для III - $\pi_x = \pi_{21}$, IV - $\pi_x = \pi_{12}$;

Из приведённых данных видно, что зависимости между двумя безразмерными величинами в широком диапазоне изменения численных значений критерия от 0 до ∞ имеют 3 различные области.

1. Область существенного влияния критерия, соответствующая переменному значению производной

$$\frac{d \lg \pi_y}{d \lg \pi_x} = \mathrm{var}.$$

Численные значения критерия в этой области соизмеримы с единицей $\left(n_x \approx 1\right)$.

2. Область несущественного влияния критерия, соответствующая равенству нулю или пренебрежимо малому значению производной

$$\frac{d \lg \pi_y}{d \lg \pi_x} = 0.$$

Следовательно

$$\frac{d\pi_y}{d\pi_x} = 0 \quad \text{и} \quad \pi_y = const$$

Численные значения независимого критерия при этом находятся в одной из предельных областей: либо $\pi_x = 0$, либо $\pi_x = \infty$.

3. Область несамостоятельного или формального влияния критерия, соответствующая практически постоянному значению производной

$$\frac{d\lg\pi_y}{d\lg\pi_x} = const,$$

следовательно

$$\frac{\pi_y}{\pi_x^{\,n}} = const \quad \text{при} \quad n = const.$$

Численные значения независимого критерия при этом находятся в противоположной от «Случая 2» области.

Аналогичные закономерности присущи и зависимостям между большим числом безразмерных величин. В этих случаях получим, что при несоизмеримости с единицей нескольких критериев безразмерная зависимость так же сводится к постоянству критериев – функций.

Пример безразмерной зависимости из области аэродинамики и теплообмена:

Потери напора при длине трубы Δh при движении несжимаемой жидкости.

Согласно формуле Дарси – Вейсбаха: $\Delta h = (\lambda * \mathrm{l}/\mathrm{d}) * (w^2 / 2 * g)$,

где λ -безразмерный коэффициент трения.

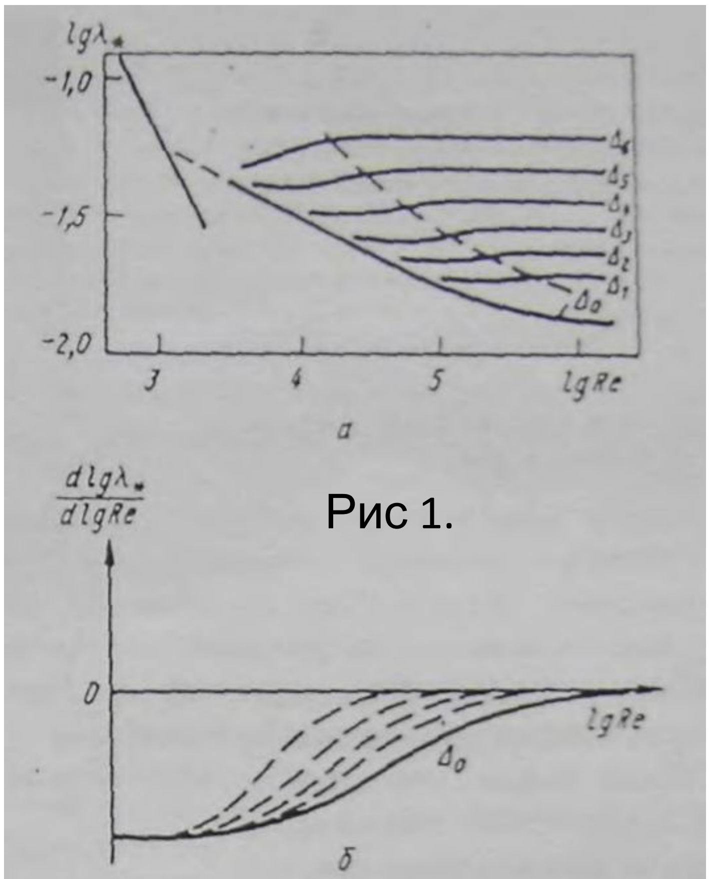


Рис 1.

На рисунке 1а показаны полученные Л. Никурадзе и Г.А. Муриным данные для зависимости $\lambda = f(\text{Re})$. В дифференциальной форме эти данные можно представить в виде, показанном на рис.1б. Видно что зависимость совпадает по виду с зависимостью типа $\lambda = f(\text{Re})$.

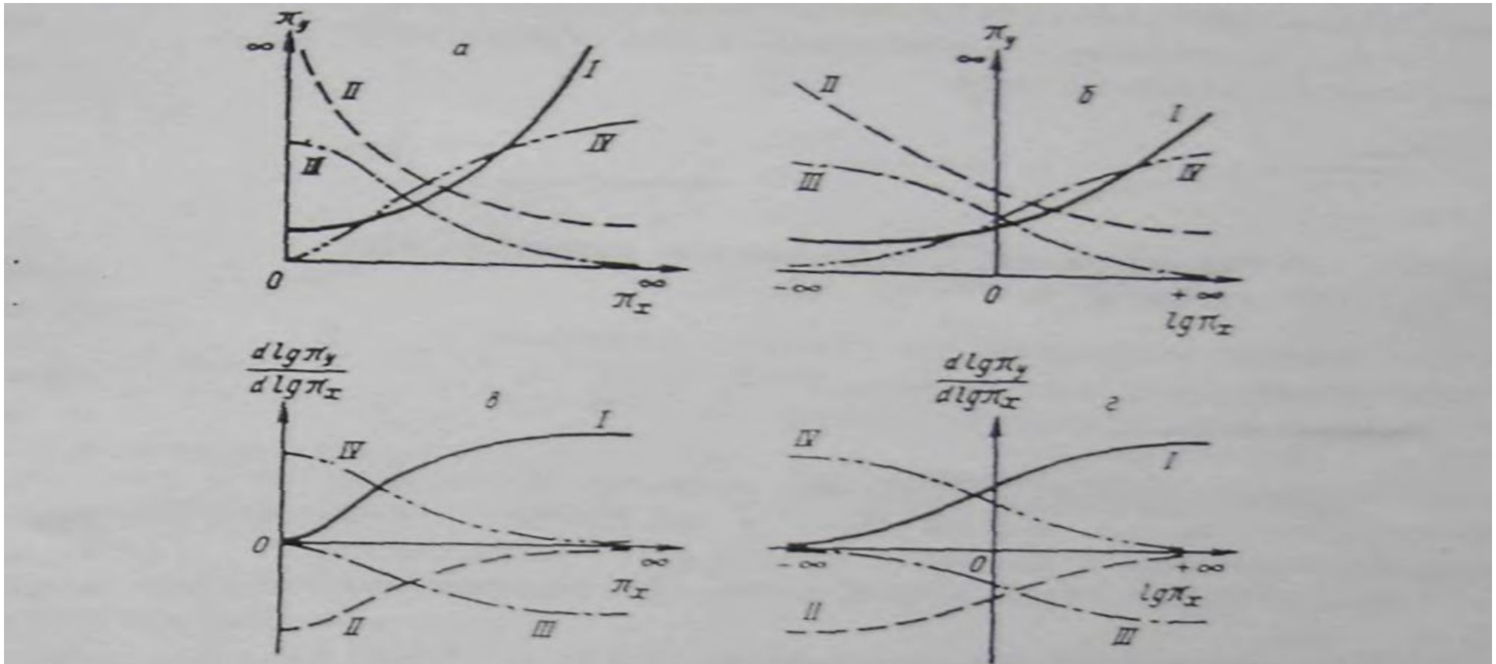


Рис. 5. Возможные типы зависимостей между двумя безразмерными величинами в обычных (а) и полулогарифмических (б) координатах, в дифференциальной форме (в) и дифференциальной форме в логарифмических координатах (г): I–IV — тип зависимости

Для предельных случаев получим:

а) $\mathrm{Re} \to 0$ (ламинарный режим) $\left(\Delta h * g * d^2\right)/\left(\nu / w\right) = const = 32$

Течение при малых значениях Re (Re<<1) называют ползущим. Такое течение имеет место, в частности при смазке элементов машин, аппаратов и приборов;

б) $\mathrm{Re} \to \infty$ (развитый турбулентный режим в квадратичной области сопротивления)

$\lambda = const$ или $\left(\Delta h * g * d\right)/\left(l * w^2\right) = const$

С учётом выявленных областей безразмерных зависимостей все критерии по значимости для процесса целесообразно подразделять на такие группы:

1) Существенные;
2) Вырожденные несущественные;
3) Вырожденные формальные (несамостоятельные).

Существенными следует считать такие критерии, которые отражают соотношение между соизмеримыми физическими эффектами, а изменение численного значения которых при неизменности любых других существенно влияет на значение безмерной функции.

Признаком существенности критерия является соизмеримость его с единицей.

При физическом моделировании выполнение равенства численных значений существенных критериев для модели и образца является обязательным.

Вырожденными следует считать критерии, отражающие соотношения между несоизмеримыми эффектами.

Признаком вырожденности является несоизмеримость критерия с единицей.

Любой критерий при обоих предельных значениях ($n \to 0$ и $n \to \infty$) вырождается. Однако влияние и роль вырожденных критериев в противоположных предельных областях различны. Если изменение численного значения вырожденного критерия при неизменности остальных критериев данной системы практически не влияет на изменение безразмерной функции, то этот критерий в рассматриваемой системе является несущественным.

Внешние признаки несоизмеримости: а) несоизмеримость с единицей конкретного критерия, в который входит несоизмеримо малый по сравнению с остальными физический эффект; б) соизмеримость с единицей остальных критериев системы.

Если соизмеримо малый по сравнению с остальными (вырожденный) физический эффект входит не в один, а сразу в несколько критериев, то его изменение приводит к изменению значений сразу нескольких критерий. Поэтому хотя вырожденный эффект фактически не может влиять на процесс, формально можно получить зависимость безразмерной функции от больших или малых критериев, как в областях

$$\frac{d\lg \pi_y}{d\lg \pi_x} = const,$$

В связи с этим такие большие или малые критерии, изменение численных значений которых при неизменности остальных в исходной форме приводит к стабильному изменению значения безразмерной функции, следует считать несамостоятельными, или формальными.

Признаком несамостоятельности, т.е. формальности критериев в рассматриваемой совокупности, является несоизмеримость с единицей не одного, а сразу двух или более критериев, имеющих общую группу физических величин. Причем, формальными следует считать все такие несоизмеримые с единицей величины.

Приведенный пример подтверждает вывод о вырождении безразмерных зависимостей и влияния критериев при бесконечном уменьшении и увеличении их численных значений

Таким образом, определение вырожденности критерия, в конечном счете, связано с вопросом о требуемой степени точности решения поставленной задачи, а моделирование в предположении о вырождении того или иного критерия является приближенным.