


# **ТЕМА 3. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ**



**Линейное программирование** – раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума линейных функций нескольких переменных при линейных ограничениях, налагаемых на переменные.

По типу решаемых задач его методы разделяются на универсальные и специальные. С помощью универсальных методов могут решаться любые задачи *линейного программирования* (ЗЛП).

*Формы записи задачи линейного программирования:*

Общей задачей линейного программирования называют задачу

$$\max(\min) \quad Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m_1) \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = m_1 + 1, \dots, m_2) \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = m_2 + 1, \dots, m) \quad (4)$$


$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n_1}) \quad (5)$$

$$x_j - \text{произвольные } (j = n_1 + 1, \dots, n) \quad (6)$$

где  $c_j, a_{ij}, b_i$  - заданные действительные числа; (1) – целевая функция

(1) – (6) – ограничения;

$x = (x_1; \dots; x_n)$  - план задачи.




Наиболее часто используются оптимизационные модели принятия решений. Их общий вид таков:

$$F(X) \rightarrow \max;$$


$$X \in A,$$

где  $X$  - параметр, который менеджер может выбирать (управляющий параметр). Он может иметь различную природу - число, вектор, множество и т.п.



Цель менеджера - максимизировать целевую функцию  $F(X)$ , выбрав соответствующий  $X$ . При этом он должен учитывать ограничения  $X \in A$  на возможные значения управляющего параметра  $X$  - он должен лежать в множестве  $A$ . Рассмотрим примеры оптимизационных задач менеджмента.

Среди оптимизационных задач менеджмента наиболее известны задачи линейного программирования, в которых максимизируемая функция  $F(X)$  линейная, а ограничения  $A$  задаются линейными неравенствами.



**Производственная задача.** Цех может производить стулья и столы. На производство стула идет 5 единиц материала, на производство стола — 20 единиц (футов красного дерева). Стул требует 10 человеко- часов, стол — 15. Имеется 400 единиц материала и 450 человеко-часов. Прибыль при производстве стула — 45 дол. США, при производстве стола — 80 дол. Сколько надо сделать стульев и столов, чтобы получить максимальную прибыль?


Обозначим  $X_1$  число изготовленных стульев,  $X_2$  — число столов. Задача оптимизации имеет вид:

$$45X_1 + 80X_2 \rightarrow \max;$$

$$5X_1 + 20X_2 < 400;$$


$$10X_1 + 15X_2 < 450;$$

$$X_1 > 0; X_2 > 0.$$




В первой строке выписана целевая функция — прибыль при выпуске  $X_1$  стульев и  $X_2$  столов. Ее требуется максимизировать, выбирая оптимальные значения переменных  $X_1$  и  $X_2$ . При этом должны быть выполнены ограничения по материалу (вторая строчка) — истрачено не более 400 футов красного дерева. А также и ограничения по труду (третья строчка) — затрачено не более 450 ч.





Кроме того, нельзя забывать, что число столов и число стульев неотрицательны. Если  $X_1 = 0$ , то это значит, что стулья не выпускаются. Если же хоть один стул сделан, то  $X_1$  положительно. Но невозможно представить себе отрицательный выпуск —  $X_1$  не может быть отрицательным с экономической точки зрения, хотя с математической точки зрения такого ограничения усмотреть нельзя. В четвертой и пятой строчках задачи и констатируется, что переменные неотрицательны.



Условия производственной задачи можно изобразить на координатной плоскости. Будем по оси абсцисс откладывать значения  $X_1$ , а по оси ординат — значения  $X_2$ . Тогда ограничения по материалу и последние две строчки оптимизационной задачи выделяют возможные значения  $(X_1, X_2)$  объемов выпуска в виде треугольника (рис. 1).

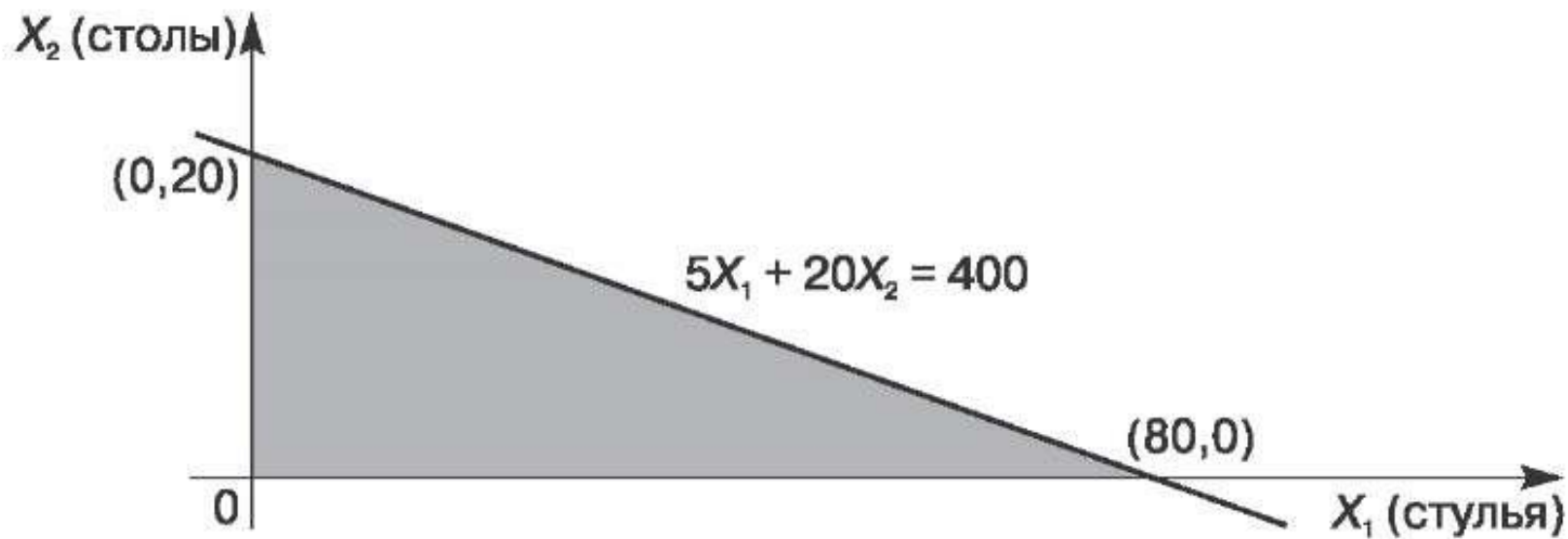




Рис. 1. Ограничения по материалу



Таким образом, ограничения по материалу изображаются в виде выпуклого многоугольника, в данном случае — треугольника. Этот треугольник получается путем отсечения от первого квадранта примыкающей к началу координат зоны. Отсечение проводится прямой, соответствующей второй строке исходной задачи, с заменой неравенства на равенство. Прямая пересекает ось  $X_1$ , соответствующую стульям, в точке  $(80,0)$ . Это означает, что если весь материал пустить на изготовление стульев, то будет изготовлено 80 стульев.



Та же прямая пересекает ось  $X_2$ , соответствующую столам, в точке  $(0,20)$ . Это означает, что если весь материал пустить на изготовление столов, то будет изготовлено 20 столов. Для всех точек внутри треугольника выполнено неравенство, что означает — материал останется. Аналогичным образом можно изобразить и ограничения по труду (рис. 2).

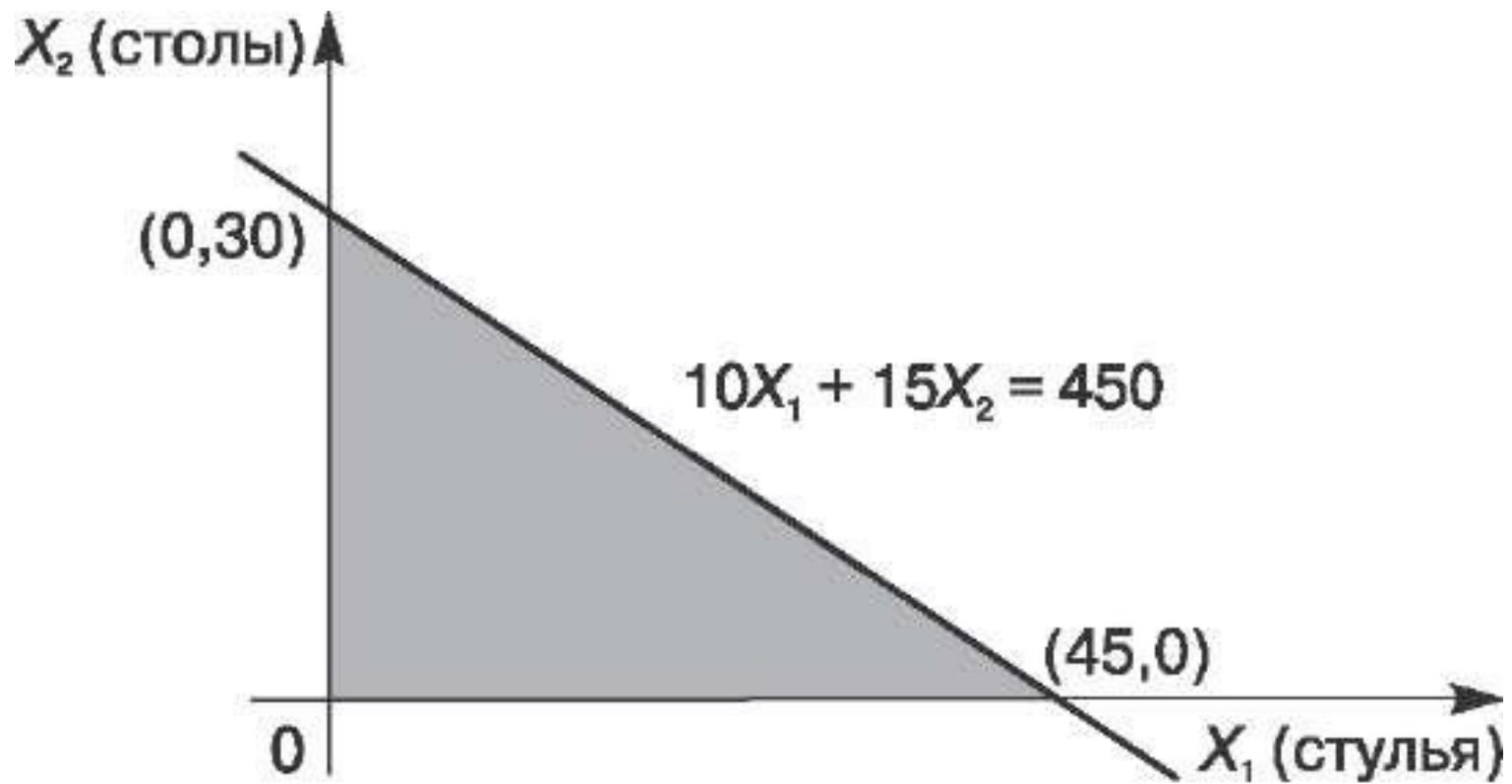




Рис. 2. Ограничения по труду



Ограничения по труду, как и ограничения по материалу, изображаются в виде треугольника, который получается аналогично — путем отсечения от первого квадранта примыкающей к началу координат зоны. Отсечение проводится прямой, соответствующей третьей строке исходной задачи, с заменой неравенства на равенство. Прямая пересекает ось  $X_1$ , соответствующую стульям, в точке  $(45,0)$ . Это означает, что если все трудовые ресурсы пустить на изготовление стульев, то будет сделано 45 стульев. Та же прямая пересекает ось  $X_2$ , соответствующую столам, в точке  $(0,30)$ . Это означает, что если всех рабочих поставить на изготовление столов, то будет сделано 30 столов. Для всех точек внутри треугольника выполнено неравенство, что означает — часть рабочих будет простаивать.



Мы видим, что очевидного решения нет — для изготовления 80 стульев есть материал, но не хватает рабочих рук, а для производства 30 столов есть рабочая сила, но нет материала, значит, надо изготавливать и то и другое. Но в каком соотношении?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо «совместить» рис. 1 и рис. 2, получив область возможных решений, а затем проследить, какие значения принимает целевая функция на этом множестве (рис. 3).



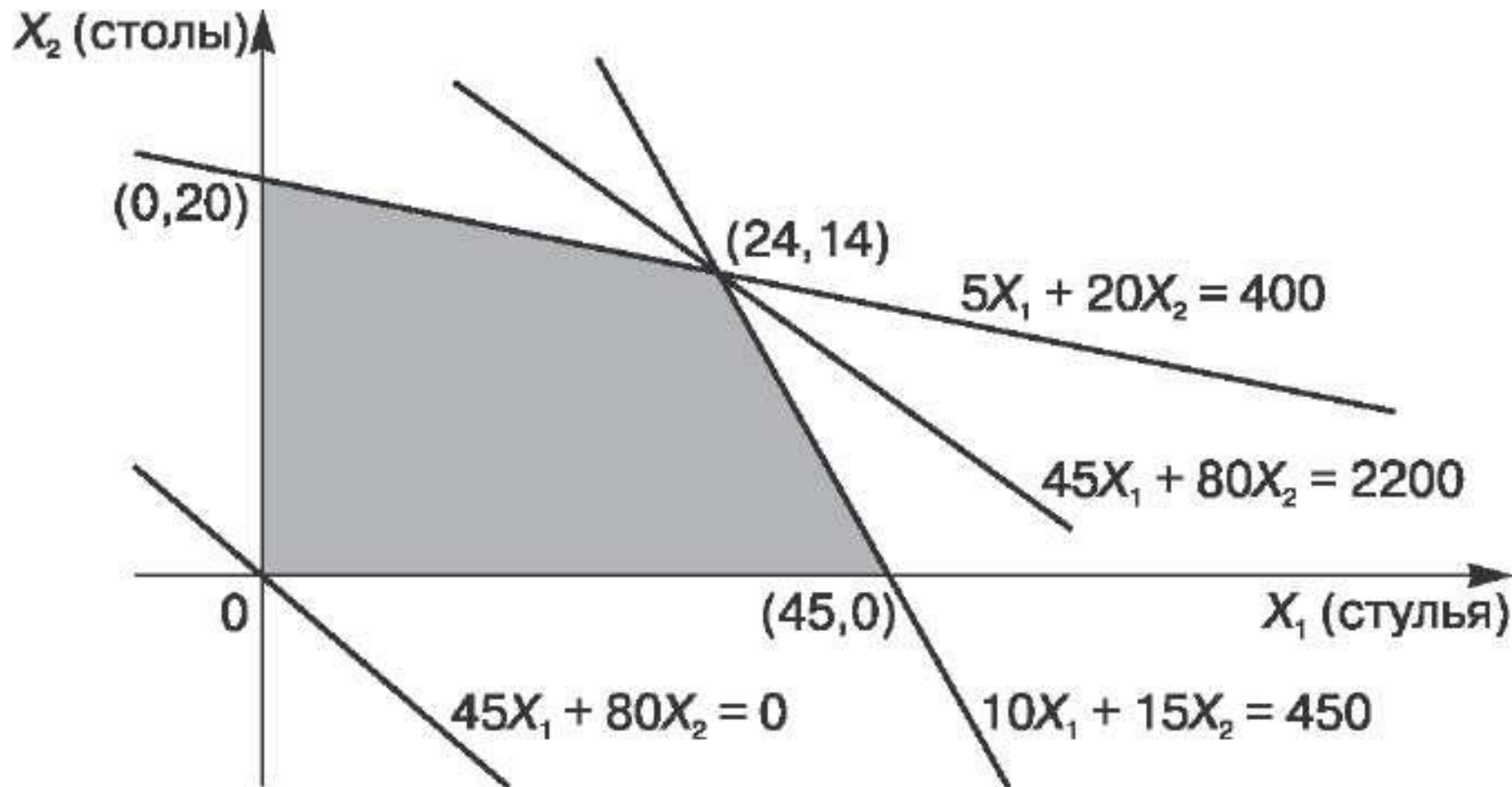



Рис. 3. Основная идея линейного программирования

Таким образом, множество возможных значений объемов выпуска стульев и столов  $(X_1, X_2)$ , или, в других терминах, множество  $A$ , задающее ограничения на параметр управления в общей оптимизационной задаче, представляет собой пересечение двух треугольников, т.е. выпуклый четырехугольник, показанный на рис. 3. Три его вершины очевидны — это  $(0,0)$ ,  $(45,0)$  и  $(0,20)$ . Четвертая — это пересечение двух прямых — границ треугольников на рис. 1 и рис. 2, т.е. решение системы уравнений

$$5X_1 + 20X_2 = 400;$$


$$10X_1 + 15X_2 = 450.$$




Из первого уравнения:  $5X_1 = 400 - 20 X_2$ ,  $X_1 = 80 - 4X_2$ . Подставляем значение  $X_1$ , выраженное через  $X_2$ , во второе уравнение:

$$10(80 - 4X_2) + 15X_2 = 800 - 40X_2 + 15X_2 = 800 - 25X_2 = 450,$$

следовательно,  $25X_2 = 350$ ,  $X_2 = 14$ , откуда  $X_1 = 80 - 4 \times 14 = 80 - 56 = 24$ . Итак, четвертая вершина четырехугольника — это  $(24, 14)$ .



Надо найти максимум линейной функции на выпуклом многоугольнике. (В общем случае линейного программирования — максимум линейной функции на выпуклом многограннике, лежащем в конечномерном линейном пространстве.) Основная идея линейного программирования состоит в том, что максимум достигается в вершинах многоугольника. В общем случае — в одной вершине, и это — единственная точка максимума. В частном — в двух, и тогда отрезок, их соединяющий, тоже состоит из точек максимума.



Целевая функция  $45X_1 + 80X_2$  принимает минимальное значение, равное 0, в вершине (0,0). При увеличении аргументов эта функция увеличивается. В вершине (24, 14) она принимает значение 2200. При этом прямая  $45X_1 + 80X_2 = 2200$  проходит между прямыми ограничениями  $5X_1 + 20X_2 = 400$  и  $10X_1 + 15X_2 = 450$ , пересекающимися в той же точке. Отсюда, как и из непосредственной проверки двух оставшихся вершин, вытекает, что максимум целевой функции, равный 2200, достигается в вершине (24, 14).

Таким образом, оптимальный выпуск таков: 24 стула и 14 столов. При этом используется весь материал и все трудовые ресурсы, а прибыль равна 2200 дол.