Задание 19

Профиль

Задание 19 № 517744

С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.

б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?

в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трехзначного числа?

Признак делимости на 11

число делится на 11, если знакочередующаяся сумма его цифр делится на 11.

Решение:

Решение.

а) Например, из числа 2847 получается 2108124117.

б) Заметим, что если в изначальном числе была цифра 9 (не в последнем разряде), то в получившемся числе справа от нее должна стоять цифра 1 или 9. Значит, цифра 9 в числе 37494128 могла получиться только в результате сложения соседних цифр. Но сумма 4 + 4 не равна 9, поэтому такое число не могло получиться.

в) Пусть изначальное трехзначное число равно $100a+10b+c$, где a, b и c — цифры. Получившееся число будет семизначным, только если $a+b\geq 10$ и $b+c\geq 10$, а во всех остальных случаях полученное число будет меньше 1 000 000.

Если $a+b\geq 10$ и $b+c\geq 10$, то полученное число будет равно

$$a\cdot 10^6+1\cdot 10^5+(a+b-10)\cdot 10^4+b\cdot 10^3+1\cdot 10^2+(b+c-10)\cdot 10+c.$$

Знакочередующая сумма цифр полученного числа равна

$$a-1+(a+b-10)-b+1-(b+c-10)+c=2a-b.$$

При $a=9$ получившееся число будет больше, чем при любом другом a, вне зависимости от b и c. В этом случае $2a-b$ делится на 11 только при $b=7$ и любом c. При $a=9$ и $b=7$ максимальное число получится для $c=9$.

Таким образом, максимальное число получается из числа 979 и равно 9167169.

Ответ: а) 2847; б) нет; в) 9167169.

назад

Каждый из 28 студентов писал или одну из двух контрольных работ, или написал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 15. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов равно S.

а) Приведите пример, когда $S < 15$.
б) Могло ли оказаться, что только два студента написали обе контрольные работы, если $S = 13$?
в) Какое наименьшее количество студентов могло написать обе контрольные работы, если $S = 13$?

Решение:

Решение.

а) Например, если 20 студентов писали обе контрольные работы и получили по 18 баллов за каждую, 4 студента писали только первую контрольную работу и получили по 0 баллов, 4 студента писали только вторую контрольную работу и получили по 0 баллов, то средний балл по каждой из контрольных работ в отдельности составил 15, а $S = \frac{20 \cdot 18 + 0}{28} = \frac{90}{7} < 15.$

б) Поскольку средние баллы по каждой контрольной в отдельности равны 15, средний балл по обеим контрольным работам тоже равен 15. Всего было написано 28 + 2 = 30 контрольных работ. Значит, общее количество набранных студентами баллов равно $15 \cdot 30 = 450$. При этом сумма наивысших баллов равна 13 · 28 = 364. Следовательно, сумма наименьших баллов, набранных двумя студентами, писавшими обе работы, равна 450 − 364 = 86. Но сумма наименьших баллов двух студентов не может превосходить 40. Противоречие.

в) Пусть k — количество студентов, писавших обе контрольные работы, a — сумма баллов студентов, которые писали только одну контрольную работу, b — сумма наибольших баллов студентов, которые писали обе контрольные работы, c — сумма наименьших баллов студентов, которые писали обе контрольные работы.

Тогда сумма всех набранных баллов: $a+b+c = 15 \cdot (28+k) = 420+15k$, сумма наивысших баллов $a+b = 13 \cdot 28 = 364$. Тогда $c = 56+15k$. С другой стороны, $c \le 20k$, поэтому $56+15k \le 20k$, откуда $k \ge 12$.

Приведём пример, когда $k = 12$, то есть если $c = 236$, $b = 240$, $a = 124$. Например, 11 студентов написали обе контрольные работы на 20 баллов, один студент написал обе контрольные, получив за первую 20 баллов, а за вторую 16 баллов, 8 студентов писали только первую контрольную, причем 3 из них написали ее на 20 баллов, а 5 из них — на 0 баллов, и 8 студентов писали только вторую контрольную, каждый на 8 баллов. Тогда обе контрольные писали по 20 студентов, набрав за первую 3 · 20 + 12 · 20 = 300 баллов и за вторую 8 · 8 + 11 · 20 + 16 = 300 баллов.

Ответ: а) Например, если 20 студентов написали обе контрольные работы и получили по 18 баллов, а по 4 студента написали только одну из двух контрольных работ и получили по 0 баллов; б) нет; в) 12.

назад

Задание 19 № 517583
На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5120.
а) Может ли быть записано число 230?
б) Можно ли обойтись без числа 14?
в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

Решение:

Решение.

а) Пусть на доске написано число 230 и 99 других различных натуральных чисел. Минимально возможная сумма чисел на доске достигается при условии, что сумма 99 различных натуральных чисел минимальна. А это, в свою очередь, возможно, если 99 различных натуральных числа - арифметическая прогрессия с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 1$. Сумма S_{99} этих чисел, по формуле суммы арифметической прогрессии, составит:

$$S_{99} = \frac{1+99}{2} \cdot 99 = 4950.$$

Сумма всех чисел на доске S будет равна:

$$S = S_{99} + 230 = 4950 + 230 = 5180.$$

Нетрудно заметить, что полученная сумма больше, чем 5120, а это значит, что и любая сумма 100 различных натуральных чисел, среди которых есть 230, больше 5120, следовательно, числа 230 на доске быть не может.

б) Пусть на доске не записано число 14. В таком случае, минимально возможная сумма S чисел на доске будет состоять из двух сумм арифметических прогрессий: суммы S_1 первых 13 членов прогрессии с первым членом $a_1 = 1$, разностью $d = 1$ (то есть ряда 1,2,3,..13) и суммы первых 87 членов прогрессии с первым членом $a_1 = 15$, разностью $d = 1$ (то есть ряда 15,16,17,..101). Найдем эту сумму:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1+13}{2} \cdot 13 + \frac{15+101}{2} \cdot 87 = 91 + 5046 = 5137.$$

Нетрудно заметить, что полученная сумма больше, чем 5120, а это значит, что и любая сумма 100 различных натуральных чисел, среди которых нет 14, больше 5120, следовательно, без числа 14 на доске обойтись нельзя.

в) Допустим, что на доске выписаны все числа от 1 до 100. Тогда получается, что полученный ряд составляет арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$, разностью $d = 1$. По формуле для суммы арифметической прогрессии найдем сумму S_0 всех чисел на доске:

$$S_0 = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050.$$

Полученная сумма не удовлетворяет условию задачи. Теперь, чтобы увеличить сумму всех чисел, написанных на доске до обозначенной в условии, попробуем заменить числа, кратные 14 на другие числа, следующие за сотней: 70 заменим на 110, 84 - на 104, а 98 - на 108. Полученная сумма S будет равна:

$$S = S_0 - (70 + 84 + 98) + (110 + 104 + 108) = 5120.$$

При дальнейшей замене чисел, кратных 14 на числа, большие 100, сумма будет увеличиваться и не соответствовать условию задачи. Таким образом, наименьшее количество чисел, кратных 14 равно 4.

назад

Задание 19 № 516804
На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.
а) Может ли на доске быть 5 чисел?
б) Может ли на доске быть 6 чисел?
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Решение:

Решение.

а) Для выполнения условий задачи достаточно, чтобы произведение двух меньших чисел было больше 40, а произведение двух больших чисел было меньше 100. Пять чисел 6, 7, 8, 9, 10 удовлетворяют условию задачи.

б) Пусть числа на доске записаны в порядке возрастания: $a < b < c < d < e < f$. Заметим, что $b \geq 7$, $e \leq 9$, иначе произведение ab будет меньше 40, а произведение ef будет больше 100. Другими словами, на доске может быть только одно число $a < 7$ и только одно число $f > 10$. Но тогда четырьмя различными числами b, c, d, e должны быть три числа 7, 8 и 9, что невозможно.

в) Пусть на доске написаны числа a, b, c и d, причём $a < b < c < d$. Как было показано в предыдущем пункте, соседние с крайними числа подчиняются условию $7 \leq b < c \leq 9$. Следовательно, возможны только три случая.

Если записаны числа a, 7, 8, d, то наибольшие возможные числа $a = 6$, $d = 12$. Сумма четырех записанных чисел равна 33.

Если записаны числа a, 7, 9, d, то $a = 6$, $d = 11$, сумма 33.

Если записаны числа a, 8, 9, d, то $a = 7$, $d = 11$, сумма 35.

Таким образом, наибольшее значение суммы четырех чисел равна 35.

Ответ: а) да; б) нет; в) 35.

назад

19. Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 5$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Решение.

а) Например, подходит последовательность 7, 5, 4, 4, 5.

б) При всех натуральных $k \le n-1$ положим $b_k = a_{k+1} - a_k$. Тогда равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$ равносильно равенству $b_{k+1} = b_k + 1$. Следовательно, последовательность b_k при $1 \le k \le n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью 1.

Предположим, что некоторое натуральное число встретилось в последовательности a_k три раза. Значит, для некоторых индексов $p < q < r$ выполнены равенства $a_p = a_q = a_r$.

Поэтому выполнены равенства $0 = a_q - a_p = b_p + b_{p+1} + \ldots + b_{q-1} = (q-p)b_p + \frac{(q-p)(q-p-1)}{2}$ и, следовательно, равенство $b_p = -\frac{q-p-1}{2}$. Аналогично получаем $b_p = -\frac{r-p-1}{2}$. Приходим к противоречию, так как $q < r$.

в) Как доказано в решении пункта б, последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k$ при $1 \le k \le n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью 1.

Если существует такое k, что $b_k = 0$, то разобьём последовательность $\{a_1; \ldots; a_n\}$ на две подпоследовательности $\{a_1; \ldots; a_k\}$ и $\{a_{k+1}; \ldots; a_n\}$. Первая монотонно убывает, так как для каждого $i < k$ выполняется соотношение $a_{i+1} - a_i = b_i < 0$. Аналогично вторая последовательность монотонно возрастает. Имеем

$$10 \le a_k = a_1 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1}) = a_1 - (1 + 2 + \ldots + k - 1) = a_1 - \frac{k(k-1)}{2} \le 99 - \frac{k(k-1)}{2};$$

$\frac{k(k-1)}{2} \le 89$, следовательно, $k \le 13$.

$$10 \le a_k = a_n - (b_{k+1} + b_{k+2} + \ldots + b_{n-1}) = a_n - (1 + 2 + \ldots + n - k - 1) =$$

$$= a_n - \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \le 99 - \frac{(n-k)(n-k-1)}{2};$$

$\frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \le 89$, следовательно, $n - k \le 13$. Значит, $n = (n-k) + k \le 26$.

Если же такого k, что $b_k = 0$, нет, то последовательность $\{a_1; \ldots; a_n\}$ либо монотонно возрастает, если все b_j положительны, либо монотонно убывает, если все b_j отрицательны.

В первом случае

$$10 \le a_1 = a_n - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}) \le a_n - (1 + 2 + \ldots + n - 1) = a_n - \frac{n(n-1)}{2} \le 99 - \frac{n(n-1)}{2}.$$

Во втором же

$$99 \ge a_1 = a_n - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}) \ge a_n - (-(n-1) - \ldots - 2 - 1) = a_n + \frac{n(n-1)}{2} \ge 10 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

В обоих случаях $n \le 13$.

Пример последовательности $a_k = 88 + 13(1-k) + \frac{k(k-1)}{2}$ при $1 \le k \le 26$ показывает, что n может равняться 26. Действительно, тогда последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k = k - 13$ при $1 \le k \le 25$ образует арифметическую прогрессию с разностью 1. Значит, при всех натуральных $k \le n-2$ выполнены равенства $b_{k+1} = b_k + 1$ и $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$. Кроме того, при $1 \le k \le 13$ выполнены неравенства $10 = a_{13} \le a_k \le a_1 = 88$, а при $14 \le k \le 26$ выполнены неравенства $10 = a_{14} \le a_k \le a_{26} = 88$ и, следовательно, все члены последовательности a_k являются двузначными числами.

Значит, $n = 26$.

Ответ: а) например, подходит последовательность 2, 4, 5, 5, 4; **б)** нет; **в)** при $n = 26$.

19 На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 3. Сумма написанных чисел равна 1062.

а) Может ли на доске быть ровно 27 чётных чисел?

б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 3?

в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 3, может быть на доске?

Решение.

а) Например, следующий набор чисел удовлетворяет условию задачи:

3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 2, 4, ..., 50, 52, 56.

б) Пусть на доске написано ровно два числа, оканчивающихся на 3. Тогда на доске 33 чётных числа. Их сумма не меньше, чем сумма 33 наименьших чётных чисел:

$$2+4+...+66=\frac{68\cdot 33}{2}=1122>1062.$$

Это противоречит тому, что сумма написанных чисел равна 1062.

в) Пусть на доске написано n чисел, оканчивающихся на 3, и $35-n$ чётных чисел. Тогда сумма чисел, оканчивающихся на 3, не меньше

$$3+13+...+(3+10(n-1))=\frac{(6+10(n-1))\cdot n}{2}=5n^2-2n,$$

а сумма чётных чисел не меньше

$$2+4+...+2(35-n)=(35-n)(36-n)=n^2-71n+1260.$$

Таким образом,

$$1062\geq 6n^2-73n+1260;\ 6n^2-73n+198\leq 0,$$

откуда, учитывая, что n — целое, получаем $n\geq 5$.

Если на доске написано пять чисел, оканчивающихся на 3, и 30 чётных чисел, то их сумма нечётна. Значит, чисел, оканчивающихся на 3, больше пяти.

Приведём пример шести чисел, оканчивающихся на 3, и 29 чётных чисел, сумма которых равна 1062:

3, 13, 23, 33, 43, 53, 2, 4, ..., 54, 56, 82.

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

19 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{10}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{5}{12}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 8 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

Решение.

а) Если группа состоит из 3 мальчиков, посетивших только театр, 5 мальчиков, посетивших только кино, и 8 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 16 учащихся могло быть 8 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 9 или больше. Тогда девочек было 7 или меньше. Театр посетило не более 3 мальчиков, поскольку если бы их было 4 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{4}{4+7}=\frac{4}{11}$, что больше $\frac{3}{10}$. Аналогично кино посетило не более 5 мальчиков, поскольку $\frac{6}{6+7}=\frac{6}{13}>\frac{5}{12}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 16 учащихся могло быть 8 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 8.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d}\le\frac{3}{10}$, $\frac{m_2}{m_2+d}\le\frac{5}{12}$, значит, $\frac{m_1}{d}\le\frac{3}{7}$, $\frac{m_2}{d}\le\frac{5}{7}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d}\le\frac{8}{7}$,

поэтому доля девочек в группе: $\frac{d}{m_1+m_2+d}=\frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1}\ge\frac{1}{\frac{8}{7}+1}=\frac{7}{15}$.

Если группа состоит из 3 мальчиков, посетивших только театр, 5 мальчиков, посетивших только кино, и 7 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{7}{15}$.

Ответ: а) да; б) 8; в) $\frac{7}{15}$.

19 В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

Решение.

а) Каждый сотрудник должен получить 15 000 рублей. Выдадим 33 сотрудникам по 3 пятитысячных купюры, одному — пятитысячную и 10 тысячных, шестерым — по 15 тысячных.

б) Каждый сотрудник, кроме ведущего специалиста, должен получить 8000 рублей, поэтому нужно будет выдать каждому не менее трёх тысячных купюр, значит, всего их нужно не менее 210 штук. Следовательно, без сдачи и размена выдать премии не удастся.

в) Если сотрудников 27 или больше, то распределим премии так: 26 человек должны получить по 4 тысячи, один — всё остальное, остальные — ничего. Тогда выдать премии будет нельзя по тем же причинам, что и в пункте «б».

Если же их не больше 26, то выберем всех, кроме одного. Будем выдавать им премии, используя не более 4 тысячных купюр, пока не кончатся пятитысячные.

Если пятитысячные купюры закончились, то оставшиеся премии выдать точно удастся. Если же нет, то все премии, кроме одной, будут выданы, а последний просто заберёт все оставшиеся деньги.

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.