Функции нескольких переменных

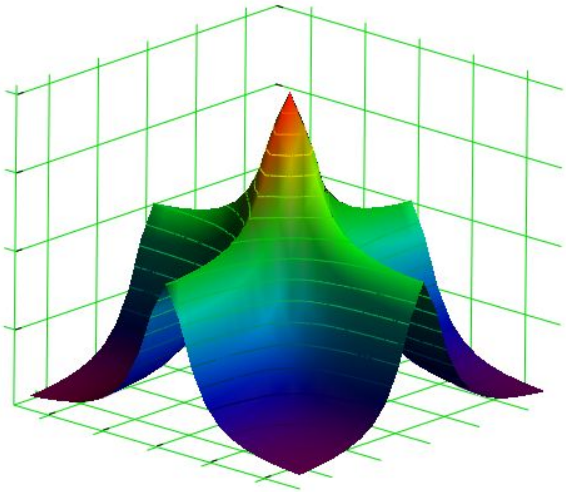
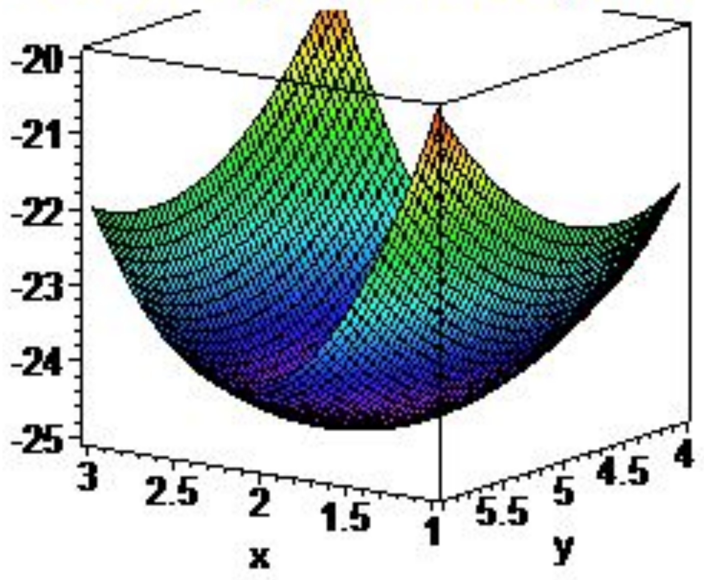


График функции $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}$



Иванова М.К., старший преподаватель
кафедры прикладной математики МФ ЧелГУ

Переменная u называется функцией n переменных (аргументов) $x, y, z, \ldots, t$, если каждой системе значений $x, y, z, \ldots, t$, из области их изменения, соответствует определенное значение u.

Функциональная зависимость u от $x, y, z, \ldots, t$ символически обозначается: $u = f(x, y, z, \ldots, t)$, где после символа функции (которым может быть не только буква f, но и другие буквы) в скобках указываются все переменные, от которых зависит данная функция.

Частное значение функции $P(x, y, z, \ldots, t)$ при $x = a$, $y = b$, $z = c, \ldots, t = l$ обозначается $P(a, b, c, \ldots, l)$. Например, если $F(x, y, z) = \frac{3x}{y - \lg z}$, то $F(-2; 3; 10) = \frac{-6}{3-1} = -3$.

Геометрически каждая система значений двух переменных x, y изображается точкой на плоскости, а функция двух переменных $z = f(x, y)$ — некоторой поверхностью в пространстве; система значений трех переменных x, y, z изображается точкой в пространстве. (Обычно значения переменных рассматриваются как абсцисса, ордината и апликата точки в прямоугольной системе координат.)

Система значений четырех и большего числа переменных не имеет геометрического изображения. Однако, в целях общности, для упрощения записей и рассуждений, *систему значений любого числа n переменных $x, y, z, \ldots, t$ называют точкой n-мерного пространства $M(x, y, z, \ldots, t)$, а функцию u, зависящую от n переменных, называют функцией точки n-мерного пространства $u=f(x, y, z, \ldots, t)=f(M)$.*

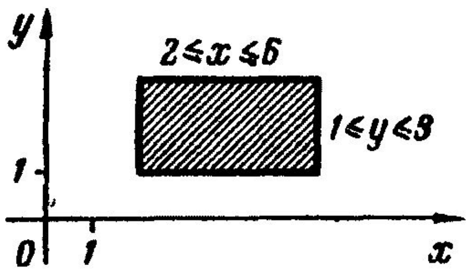
Областью определения (существования) функции называется совокупность всех точек, в которых она имеет определенные действительные значения.

Для функции двух переменных $z=f(x, y)$ область определения представляет некоторую совокупность точек плоскости, а для функции трех переменных $u=F(x, y, z)$ — некоторую совокупность точек пространства.

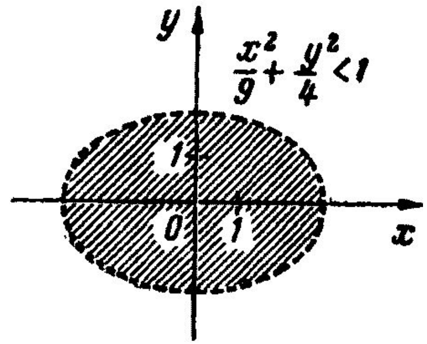
708. Построить область D изменения переменных x и y, заданную следующими неравенствами:

1) $2 \leqslant x \leqslant 6,\ 1 \leqslant y \leqslant 3$; 2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$;

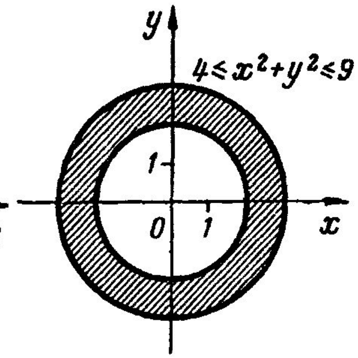
3) $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9$; 4) $0 < y < x$.



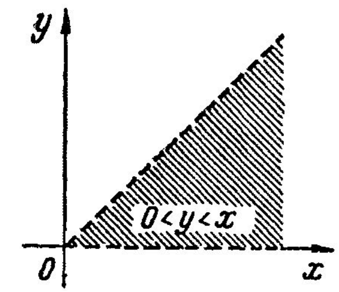
Черт .135



Черт. 136



Черт. 137



Черт. 138

709. Найти области определения следующих функций:

1) $z = 4 - x - 2y$; 2) $p = \frac{3}{x^2 + y^2}$; 3) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

4) $q = \frac{1}{\sqrt{xy}}$; 5) $u = \frac{x^2 y}{2x + y}$; 6) $v = \arcsin(x + y)$.

Предел и непрерывность функций нескольких переменных

Число A называется пределом функции $f(M)$ в точке M_0.

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A,$$

если абсолютное значение разности $f(M) - f(M_0)$ будет меньше любого заранее данного положительного числа ε, когда расстояние MM_0 меньше некоторого положительного числа δ (зависящего от ε).

Функция $f(M)$ называется непрерывной, в точке M_0, если

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = \lim x \cdot \lim \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} = 3 \cdot 1 = 3$, так как $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1$.

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x}{x+y} = \lim \frac{1}{1+\frac{y}{x}}$ — не существует, ибо отношение $\frac{y}{x}$ не имеет предела при произвольном стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(0; 0)$. Так, если $M \longrightarrow M_0$ вдоль различных прямых $y = kx$, то $\frac{y}{x} = k$, т. е. зависит от углового коэффициента прямой, по которой движется точка M.

Для непрерывности функции $f(M)$ в точке M_0 необходимо выполнение следующих условий:

1) $f(M)$ должна быть определена в точке M_0 и вблизи этой точки;

2) $f(M)$ должна иметь предел, когда точка $M \longrightarrow M_0$ произвольным способом;

3) этот предел должен быть равен $f(M_0)$.

Функция $f(M)$, непрерывная в каждой точке некоторой области D, называется непрерывной в этой области.

715. В каких случаях функция многих переменных $f(M)$ будет разрывна в точке M_0? Пояснить их примерами.

Решение. 1) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке M_0, если она определена вблизи этой точки, но не определена в самой точке M_0.

Например, функция $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ определена на всей плоскости xOy, но не определена в точке $M_0(0;\ 0)$, поэтому в этой точке функция разрывна. Во всех других точках числовой плоскости она непрерывна.

2) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке M_0, если она определена вблизи этой точки и в самой точке, но не имеет предела, когда точка $M\longrightarrow M_0$.

Например, функция

$$u=\begin{cases}\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{при } x\neq 0,\ y\neq 0\\ 3 & \text{при } x=y=0\end{cases}$$

разрывна в точке $M_0(0;\ 0)$, так как она определена вблизи этой точки и в самой точке (на всей плоскости xOy), но не имеет предела при $M\longrightarrow M_0$. В остальных точках плоскости xOy она непрерывна.

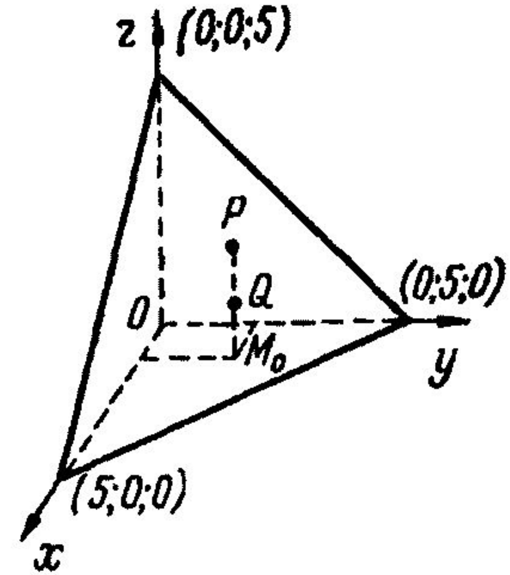
3) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке M_0, если она определена вблизи этой точки и в самой точке, но $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) \neq f(M_0)$.

Например, функция

$$z = \begin{cases} 5 - x - y & \text{при } x \neq 1,\ y \neq 2 \\ 1 & \text{при } x = 1,\ y = 2 \end{cases}$$

разрывна в точке $M_0(1;\ 2)$, ибо она определена вблизи этой точки и в самой точке, но ее предел при $M \longrightarrow M_0$ не совпадает с частным значением в точке M_0; $\lim\limits_{M \to M_0} z = 2 \neq z(M_0) = 1$.

Графиком этой функции является вся плоскость $z = 5 - x - y$ без точки $P(1;\ 2;\ 2)$, вместо которой графику принадлежит точка $Q(1;\ 2;\ 1)$ (черт. 141).



Черт. 141

Функция двух переменных $z = f(x, y)$ может иметь множество точек разрыва; если они составляют линию, то она называется линией разрыва функции.

Например, функция $z = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$ разрывна в каждой точке окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Функцию $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ можно дифференцировать по каждому из ее аргументов, считая при этом все остальные аргументы постоянными.

Производная от функции $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ по x, взятая в предположении, что все остальные аргументы $y, z, \ldots, t$ являются постоянными, называется частной производной от u по x

и обозначается $\frac{\partial u}{\partial x}$ или u'_x, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z, \ldots, t) - f(x, y, z, \ldots, t)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные от функции u по каждому из остальных ее аргументов.

Простейшие формулы дифференцирования:

1) $(c)' = 0$;
2) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;
3) $(uv)' = u'v + v'u$;
3а) $(cu)' = cu'$;
4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$;
4а) $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$;
4б) $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$;
5) $(x^n)' = nx^{n-1}$;
6) $(\sin x)' = \cos x$;
7) $(\cos x)' = -\sin x$;
8) $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$;
9) $(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$.

721. $z=(5x^3y^2+1)^3$. **722.** $r=\sqrt{ax^2-by^2}$.

723. $v=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$. **724.** $p=\arcsin\frac{x}{t}$.

725. $f(m, n)=(2m)^{3n}$; вычислить f'_m и f'_n в точке $A\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

726. $p(x, y, z)=\sin^2(3x+2y-z)$; вычислить $p'_x(1; -1; 1)$, $p'_y(1; 1; 4)$, $p'_z\left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right)$.

727. Проверить, что функция $v=x^y$ удовлетворяет уравнению $\frac{x}{y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial v}{\partial y}=2v$.

728. Проверить, что функция $w=x+\frac{x-y}{y-z}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=1$.

Частным дифференциалом функции $u=f(x, y, \ldots, t)$ *по* x *называется главная часть соответствующего частного приращения* $\Delta_x u=f(x+\Delta x, y, \ldots, t)-f(x, y, \ldots, t)$, *линейная относительно приращения* Δx (или, что то же, дифференциала dx).

Аналогично определяются частные дифференциалы функции u по каждому из остальных ее аргументов. Частные дифференциалы функции u по x, по y, ..., по t обозначаются, соответственно, $d_x u$, $d_y u$, ..., $d_t u$.

Из определения частных производных следует, что

$$d_x u=\frac{\partial u}{\partial x}dx; \quad d_y u=\frac{\partial u}{\partial y}dy; \quad \ldots; \quad d_t u=\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Полным дифференциалом функции $u=f(x, y, \ldots, t)$ *называется главная часть ес полного приращения*

$$\Delta u=f(x+\Delta x, y+\Delta y, \ldots, t+\Delta t)-f(x, y, \ldots, t),$$

линейная относительно приращений $\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta t$ (или, что то же, дифференциалов $dx, dy, \ldots, dt$).

Полный дифференциал du *функции* u *(если он существует) равен сумме всех ее частных дифференциалов*

$$du=d_xu+d_yu+\ldots+d_tu=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\ldots+\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Функция $u(x, y, \ldots, t)$ *называется дифференцируемой в точке* $(x, y, \ldots, t)$, *если в этой точке она имеет полный дифференциал.*

При достаточно малых (по абсолютному значению) приращениях аргументов полное приращение функции можно с как угодно малой относительной погрешностью заменить ее полным дифференциалом

$$\Delta u \approx du.^*$$

731. Вычислить приближенное значение:

1) $1{,}08^{3,96}$; 2) $\dfrac{\sin 1{,}49 \cdot \operatorname{arc\,tg} 0{,}07}{2^{2,95}}$.

Решение. Если требуется вычислить значение функции $f(x, y, \ldots, t)$ в точке $M_1(x_1, y_1, \ldots, t_1)$ и если проще вычислить значения этой функции и ее частных производных в точке $M_0(x_0, y_0, \ldots, t_0)$, то при достаточно малых, по абсолютной величине, значениях разностей $x_1 - x_0 = dx$, $y_1 - y_0 = dy$, ..., $t_1 - t_0 = dt$ можно заменить полное приращение функции ее полным диффереициалом:

$$f(M_1) - f(M_0) \approx f'_x(M_0)\,dx + f'_y(M_0)\,dy + \ldots + f'_t(M_0)\,dt,$$

и отсюда найти приближенное значение искомой величины по формуле

$$f(M_1) \approx f(M_0) + f'_x(M_0)\,dx + f'_y(M_0)\,dy + \ldots + f'_t(M_0)\,dt. \quad (a)$$

1) Полагая, что $1{,}08^{3{,}96}$ есть частное значение функции $f(x,\ y)=x^y$ в точке $M_1\,(1{,}08;\ 3{,}96)$ и что вспомогательная точка будет $M_0\,(1;\ 4)$, получим

$$f(M_0)=1^4=1;\ f'_x(M_0)=yx^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\y=4}}=4;\ f'_y(M_0)=x^y\ln x\Big|_{\substack{x=1\\y=4}}=0;$$

$$dx=1{,}08-1=0{,}08;\ dy=3{,}96-4=-0{,}04.$$

Подставляя в формулу (a), найдем

$$1{,}08^{3{,}96}\approx f(M_0)+f'_x(M_0)\,dx+f'_y(M_0)\,dy=1+4\cdot 0{,}08=1{,}32.$$

2) Пусть $\frac{\sin 1,49 \cdot \operatorname{arc\,tg} 0,07}{2^{2,95}}$ есть частное значение функции трех переменных $\varphi(x, y, z) = 2^x \sin y \operatorname{arc\,tg} z$ в точке $M_1(-2,95;\ 1,49;\ 0,07)$ и пусть вспомогательная точка будет $M_0\left(-3;\ \frac{\pi}{2};\ 0\right)$. Тогда $dx = -2,95 - (-3) = 0,05$; $dy = 1,49 - 1,57 = -0,08$; $dz = 0,07$;

$\varphi(M_0) = 2^{-3} \sin \frac{\pi}{2} \operatorname{arc\,tg} 0 = 0$; $\varphi'_x(M_0) = 2^x \ln 2 \cdot \sin y \operatorname{arc\,tg} z \,|_{M_0} = 0$;

$$\varphi'_y(M_0) = 2^x \cos y \operatorname{arc\,tg} z \,|_{M_0} = 0;\ \varphi'_z(M_0) = \left.\frac{2^x \sin y}{1+z^2}\right|_{M_0} = 2^{-3}.$$

Подставляя в формулу (a), получим

$$\frac{\sin 1,49 \cdot \operatorname{arc\,tg} 0,07}{2^{2,95}} \approx 2^{-3} \cdot 0,07 \approx 0,01.$$

Найти полные дифференциалы функций:

732. $z = y \ln 2x$. **733.** $u = \sin^2 t \cos^2 x$.

734. $v = \frac{xy}{z}$. **735.** $f(m, n, p) = e^{am} \cos \frac{bn}{p}$.

Переменная z называется сложной функцией от независимых переменных $x, y, \ldots, t$, если она задана через посредство промежуточных аргументов $u, v, \ldots, w$:

$$z = F(u, v, \ldots, w),$$
$$u = f(x, y, \ldots, t), \quad v = \varphi(x, y, \ldots, t), \quad \ldots, \quad w = \psi(x, y, \ldots, t).$$

Частная производная сложной функции по одной из независимых переменных равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные этих аргументов по независимой переменной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}. \qquad (*)$$

Если, в частности, все аргументы $u, v, \ldots, w$ будут функциями от одной независимой переменной x, то и z будет сложной функцией только от x. Производная такой сложной функции (от одной независимой переменной) называется полной производной и определяется формулой

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}. \qquad (**)$$

741. $u=e^{z-2y}$, $z=\sin x$, $y=x^3$; $\frac{du}{dx}$?

742. $z=\ln(e^x+e^t)$; найти 1) $\frac{\partial z}{\partial t}$, 2) $\frac{dz}{dt}$, если $x=t^3$

743. $p=u^2\ln v$, $u=\frac{x}{y}$. $v=3x-2y$; $\frac{\partial p}{\partial x}$? $\frac{\partial p}{\partial y}$?

744. $f(x)=\arcsin\frac{x}{y}$, $y=\sqrt{x^2+1}$; $\frac{df}{dx}$?

Переменная u называется неявной функцией от независимых переменных $x, y, \ldots, t$, если она задана уравнением $f(x, y, \ldots, t, u) = 0$, которое не разрешено относительно u. При этом, если функция $f(x, y, \ldots, t, u)$ и ее частные производные $f'_x, f'_y, \ldots, f'_t, f'_u$ определены и непрерывны в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, \ldots, t_0, u_0)$ и вблизи нее и если $f(M_0) = 0$, а $f'_u(M_0) \neq 0$, то уравнение $f(x, y, \ldots, t, u) = 0$ вблизи точки $P(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ и в самой этой точке определяет u как однозначную, непрерывную и дифференцируемую функцию от $x, y, \ldots, t$.

Производные неявной функции u, заданной уравнением $f(x, y, \ldots, t, u) = 0$, при соблюдении указанных условий определяются формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_u}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_u}; \quad \ldots; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{f'_t}{f'_u}. \qquad \text{(A)}$$

В частности, если y есть неявная функция одной переменной x, заданная уравнением $f(x, y) = 0$, то

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{f'_x}{f'_y}. \qquad \text{(Б)}$$

Найти производные неявных функций:

747. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$; $\frac{dy}{dx}$? **748.** $uv=-\ln(uv)$; $\frac{dv}{du}$?

749. $y^2=\frac{x+y}{x-y}$; $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=2}$? **750.** $x\sin y+\cos 2y=\cos y$; $y'|_{y=\frac{\pi}{2}}$?

751. $x^2+y^2+z^2+2xz=1$; z'_x? z'_y? **752.** $e^u=\cos v\cos t$; $\frac{\partial u}{\partial v}$? $\frac{\partial u}{\partial t}$?

753. Проверить, что функция $4\sin(3x+2y+5z)=3x+2y+5z$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+1=0$.

Функцию многих аргументов $u=f(x, y, \ldots, t)$ можно дифференцировать по каждому аргументу. Полученные частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial t}$ (первого порядка) обычно зависят от тех же аргументов и каждую из них также можно дифференцировать по каждому аргументу.

Частные производные от частных производных первого порядка называются частными производными второго порядка. Они обозначаются:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u''_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}=u''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}=u''_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u''_{yy};$$

. . . .

Частные производные от частных производных второго порядка называются частными производными третьего порядка. Они обозначаются:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=f'''_{xxx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}=f'''_{xxy};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}=f'''_{xyy}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial x}=f'''_{xyx}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные четвертого, пятого и других высших порядков.

Частные производные высших порядков, отличающиеся только последовательностью дифференцирования, равны, если они непрерывны. Например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x};\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial x}.$$

Согласно этому положению, функция двух переменных $z=f(x,y)$ имеет три различных частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

четыре различных частных производных третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

и вообще $n+1$ различных частных производных n-го порядка.

Частные производные высших порядков находятся путем последовательного нахождения одной производной вслед за другой по правилам дифференцирования функции одной переменной (гл. II).

757. Найти частные производные второго порядка следующих функций: 1) $z=\frac{x^2}{2y-3}$; 2) $u=e^x \ln y+\sin y \ln x$.

758. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}$, если $u=\ln(x+y)$.

759. Найти u'''_{xyy}, если $u=\sin(xy)$.

760. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$, если $u=2^{xyz}$.

761. Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функций:

$$1)\ z=\ln\frac{x}{y};\quad 2)\ z=\operatorname{arc\,ctg}(x+2y).$$

762. Проверить, что $\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^3 v}{\partial y\,\partial x^2}$ для функции $v=\frac{t}{xyz}$.

763. Проверить, что функция $p=\ln(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0$.

764. Проверить, что функция $u=e^{\frac{x}{y}}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0$.

Экстремум функции нескольких переменных

Значение функции $f(M)$ в точке M_0 называется ***максимумом*** *(минимумом), если оно является наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках.*

Функция многих переменных может иметь максимум или минимум (экстремум) только в точках, лежащих внутри области определения функции, в которых все ее частные производные первого порядка равны нулю или не существуют *. Такие точки называются к р и т и ч е с к и м и.

Критическая точка M_0 будет точкой экстремума функции $f(M)$, если для всех точек M, достаточно близких к M_0 (в окрестности M_0), приращение функции $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ не изменяет знака. При этом, если Δf сохраняет положительный знак, то M_0 есть точка минимума, а если Δf сохраняет отрицательный знак, то M_0 есть точка максимума функции.

Для функции двух переменных $f(x, y)$ вместо исследования знака Δf можно исследовать каждую критическую точку M_0, в которой функция дважды дифференцируема, по знаку определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,$$

где

$$A = f''_{xx}(M_0), \quad B = f''_{xy}(M_0), \quad C = f''_{yy}(M_0).$$

При этом:

1) если $\Delta > 0$, то M_0 есть точка экстремума: при $A < 0$ (или $C < 0$) точка максимума, а при $A > 0$ (или $C > 0$) точка минимума;

2) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума;

✓ 3) если $\Delta = 0$, то для решения вопроса о наличии или отсутствии экстремума в точке M_0 требуется дальнейшее исследование, например по знаку приращения Δf вблизи этой точки.

Условия 1) и 2) являются достаточными условиями наличия или отсутствия экстремума.

774. Найти экстремумы функций:

1) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$; 2) $u = x^3 + y^2 - 3x + 4\sqrt{y^5}$;

3) $v = (x - y)^2 + (y - 1)^3$; 4) $w = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}$.

Понятия наибольшего и наименьшего значений функции многих переменных определяются так же, как и для функции одной переменной (гл. III, § 5).

Наибольшее или наименьшее из всех значений функции нельзя смешивать с максимумом или минимумом функции, которые являются наибольшим или наименьшим значением функции только по сравнению с ее значениями в соседних точках.

Если функция разрывна или непрерывна в незамкнутой области, то она может не иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Функция $f(M)$, непрерывная в некоторой ограниченной замкнутой области D, обязательно имеет в этой области наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри области D, или в точках, лежащих на границе области.

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $f(M)$ в ограниченной замкнутой области D, где она непрерывна, можно руководствоваться следующим правилом:

А. Найти критические точки, лежащие внутри области D, и вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум функции и какого вида).

Б. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области D.

В. Сравнить полученные значения функции: самое большее (меньшее) из них и будет наибольшим (наименьшим) значением функции во всей области D.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

785. $\varphi = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 4$.

786. $r = 3xy$ в круге $x^2 + y^2 \leqslant 2$.

787. Найти наибольшее значеиие функции $v = xy(4 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 1$, $y = 0$, $x + y = 6$.

788*. Найти наименьшее значение функции $u = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1{,}5\pi$, $0 \leqslant y \leqslant 1{,}5\pi$.

789. Найти точку треугольника $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$, сумма квадратов расстояний которой до его вершин имеет наибольшее значение.

790. Какой треугольник с данным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь? (Использовать формулу для площади треугольника по трем его сторонам.)

791. Найти точку четырехугольника $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a), $(0, 2a)$, сумма квадратов расстояний которой до его вершин имеет наименьшее значение.

792. Из куска проволоки длиной l сделать каркас прямоугольного параллелепипеда с наибольшим объемом.

793. Определить размеры открытого прямоугольного ящика с данным объемом V и с наименьшей поверхностью.