Модуль 1.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1.Матрицы

прямоугольная таблица чисел, состоящая из ***m*** строк и ***n*** столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ik} - элемент матрицы

i - номер строки

Квадратная матрица : число строк равно числу столбцов

Порядок квадратной матрицы: количество ее строк (столбцов)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(1) **-** матрица ***n***-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Главная диагональ квадратной матрицы:
совокупность элементов
с одинаковыми индексами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Побочная диагональ:
совокупность элементов, расположенных на второй диагонали

Диагональная матрица: квадратная матрица, все элементы которой, расположенные вне главной диагонали, равны нулю

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Единичная матрица: диагональная матрица , все диагональные элементы которой равны единице

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Операции над матрицами

Равные матрицы *A* и В:

имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы равны :

$$a_{ik} = b_{ik} \, (i = 1,2,\ldots,m; \quad k = 1,2,\ldots,n).$$

Равные матрицы *A* и B:

имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы равны :

$$a_{ik} = b_{ik} \, (i = 1,2,\ldots,m; \quad k = 1,2,\ldots,n).$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Произведение матрицы *A* на число λ : матрица *B*, такая что

$$B = \lambda A = A\lambda.$$

Произведение матрицы A на число λ –
матрица B, такая что

$$B = \lambda A = A\lambda.$$

Пример 1

$$5 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-4) & 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 0 & 5 \cdot 7 & 5 \cdot (-3) \\ 5 \cdot 6 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -20 & 5 & 10 \\ 0 & 35 & -15 \\ 30 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

размер: матрица **С**, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц А и *В:*

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$$

Сумма матриц А и В, имеющих одинаковый размер: матрица **С**, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц А и *В:*

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$$

Пример 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Пример 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2+7 & 1-3 \\ -4+0 & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -4 & ? \end{pmatrix}$$

Чему равен элемент C_{22} ?

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2+7 & 1-3 \\ -4+0 & 6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы

столбцы матрицы **A** являются строками матрицы A^T

Пример 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Самостоятельная работа 2

Задание. Какая из матриц является транспонированной матрицей А?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

A. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

B. $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

C. $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

D. $A^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

Произведение матрицы *A* (*m* x *p*)
на матрицу *B* (*p* x *n*) :

матрица *C* (*m* x *n*),
каждый элемент которой равен

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk}$$

То есть ***число строк*** **новой матрицы** совпадает с **числом строк *левого* сомножителя**.

А ***число столбцов*** **матрицы-произведения** совпадает с **числом столбцов *правого***

C (m x n) = **A** (m x p) * **B** (p x n)

При перемножении матриц:

для получения элемента C_{11} матрицы-произведения все элементы ***первой строки левой матрицы*** умножаются на соответствующие элементы ***первого столбца правой матрицы*** и складываются.

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \mathrm{b}_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$C\ (m \times n) = A\ (m \times p) \cdot B\ (p \times n)$

При перемножении матриц:

для получения элемента C_{12} матрицы-произведения все элементы ***первой строки левой матрицы*** умножаются на соответствующие элементы ***второго столбца правой матрицы*** и складываются.

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \mathrm{b}_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$C\ (m \times n) = A\ (m \times p) * B\ (p \times n)$

При перемножении матриц:

для получения элемента C_{21} матрицы-произведения все элементы ***второй строки левой матрицы*** умножаются на соответствующие элементы ***первого столбца правой матрицы*** и складываются.

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \mathrm{b}_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

При перемножении матриц:

для получения элемента C_{22} матрицы-произведения все элементы ***второй строки левой матрицы*** умножаются на соответствующие элементы ***второго столбца правой матрицы*** и складываются.

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \mathrm{b}_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Перемножение матриц **не обладает переместительным свойством!**

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$A \cdot B$ -**произведение** матрицы А на матрицу В **справа**

$B \cdot A$ -**произведение** матрицы А на матрицу В **слева**

переместительным свойством!

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Частный случай

Если при перемножении матриц выполняется равенство:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

такие матрицы называются перестановочными

Пример 4. Вычислить произведение матрицы А на матрицу В **справа:**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-1)+3\cdot 0+0\cdot 2 & (-2)\cdot 2+3\cdot(-3)+0\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+1\cdot 2 & \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-1)+3\cdot 0+0\cdot 2 & \\ & \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-1)+3\cdot 0+0\cdot 2 & (-2)\cdot 2+3\cdot(-3)+0\cdot 1 \\ & \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-1)+3\cdot 0+0\cdot 2 & (-2)\cdot 2+3\cdot(-3)+0\cdot 1 \\ & \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-1)+3\cdot 0+0\cdot 2 & (-2)\cdot 2+3\cdot(-3)+0\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+1\cdot 2 & \end{pmatrix} =$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(-2)\cdot(-1)+3\cdot 0+0\cdot 2 & (-2)\cdot 2+3\cdot(-3)+0\cdot 1\\ 3\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+1\cdot 2 & 3\cdot 2+(-1)\cdot(-3)+1\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-1)+3\cdot 0+0\cdot 2 & (-2)\cdot 2+3\cdot(-3)+0\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+1\cdot 2 & 3\cdot 2+(-1)\cdot(-3)+1\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -13 \end{pmatrix}$$

Пример 3. Вычислить произведение матрицы А на матрицу В **слева**.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-2)+2\cdot 3 & (-1)\cdot 3+2\cdot(-1) & (-1)\cdot 0+2\cdot 1 \\ 0\cdot(-2)+(-3)\cdot 3 & 0\cdot 3+(-3)\cdot(-1) & 0\cdot 0+(-3)\cdot 1 \\ 2\cdot(-2)+1\cdot 3 & 2\cdot 3+1\cdot(-1) & 2\cdot 0+1\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -5 & 2 \\ -9 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A*B = \begin{pmatrix} 2 & -13 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

1.3. Определители матриц

Определители матриц

Определитель матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

это **число**, записанное в виде таблицы и равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Пример 6. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 8 + 6 = 14$$

Самостоятельная работа 3

Задание. Вычислить определитель матрицы

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Варианты ответов:

A. 31

B. -31

C. 27

D. 13

Сверим ответы:

$$\det B = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 - 7\cdot(-5) = -4 + 35 = 31$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Миноры матриц

Минор $\mathbf{M_{ik}}$ элемента $\mathbf{a_{ik}}$ матрицы третьего порядка: определитель матрицы второго порядка, получающейся из данной матрицы вычеркиванием i-ой строки и k-го столбца, на пересечении которых находится этот элемент.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Алгебраические дополнения

Алгебраическое дополнение A_{ik} элемента a_{ik} матрицы третьего порядка: число, равное произведению минора этого элемента на $(-1)^{i+k}$

.

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

Пример 7 . Вычислить алгебраическое дополнение элемента $\mathbf{a_{21}}$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

1. Находим минор элемента $\mathbf{a_{21}}$:

$$\begin{matrix} i = 2; \\ k = 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 0\cdot 0 = -1$$

элемента $\mathbf{a_{21}}$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

1. Находим минор элемента $\mathbf{a_{21}}$:

i = 2;
k = 1

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 0\cdot 0 = -1$$

2. Алгебраическое дополнение элемента $\mathbf{a_{21}}$:

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot M_{21} = (-1)\cdot(-1) = 1$$

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

Самостоятельная работа 4

Задание. Вычислить минор $\mathbf{M_{22}}$ матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Варианты ответов:

A. -1

B. -3

C. 2

D. 3

Сверим ответы?

Задание. Вычислить минор $\mathbf{M_{22}}$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 = 2$$

Задание. Вычислить алгебраическое дополнение элемента a_{22} матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Варианты ответов:

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

Сверим ответы?

Вычислить алгебраическое дополнение элемента a_{22} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 = 2$$

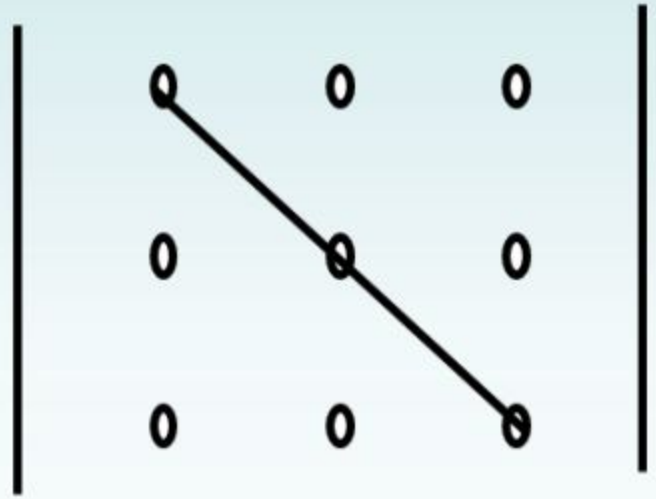
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot 2 = 2$$

Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

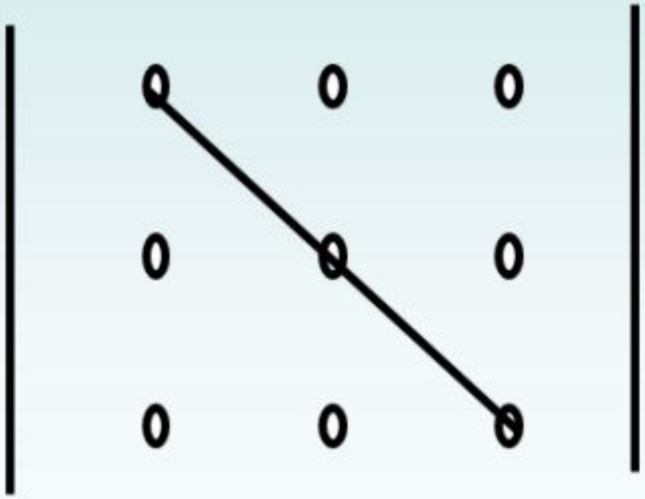
Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



+

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

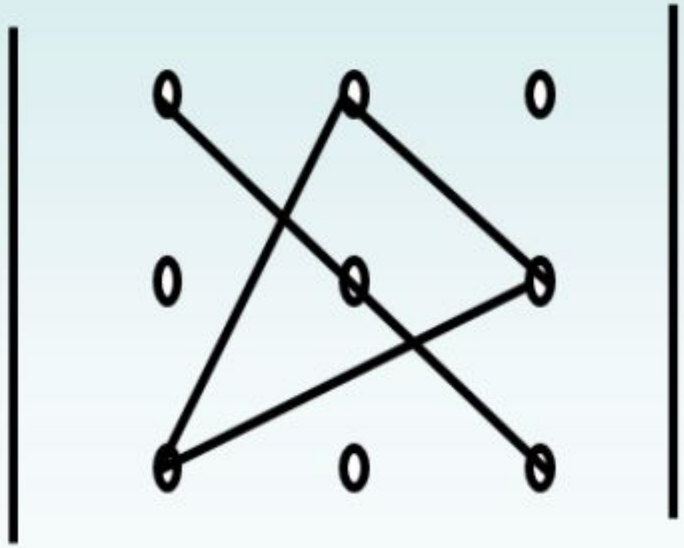
Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



+

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} +$$

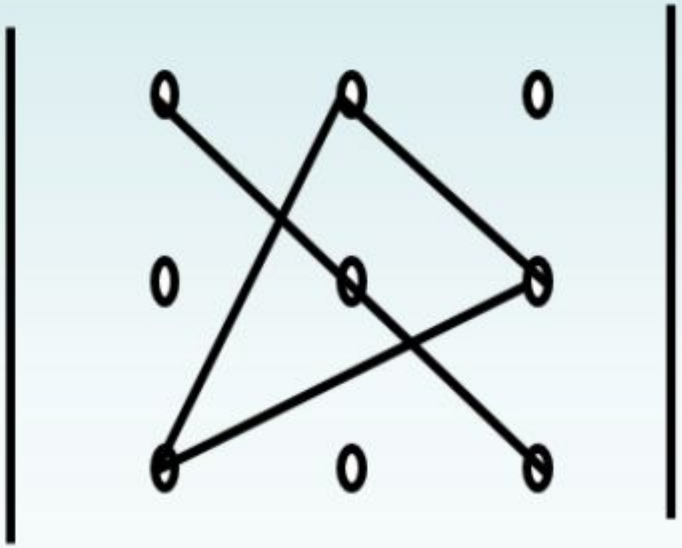
Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



+

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} +$$

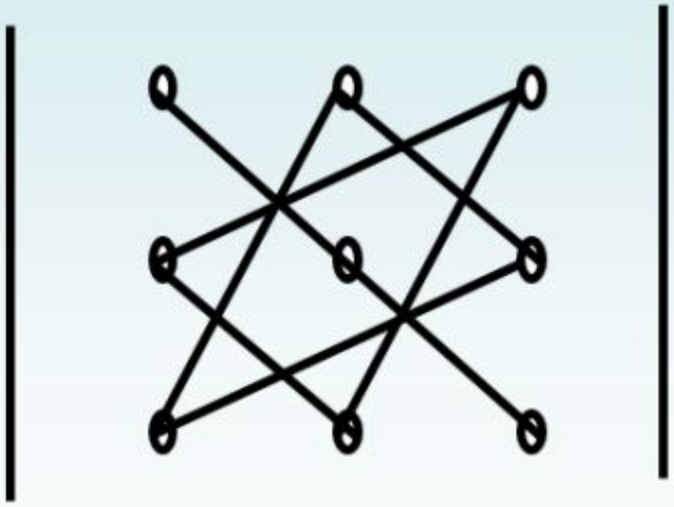
Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



$+$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

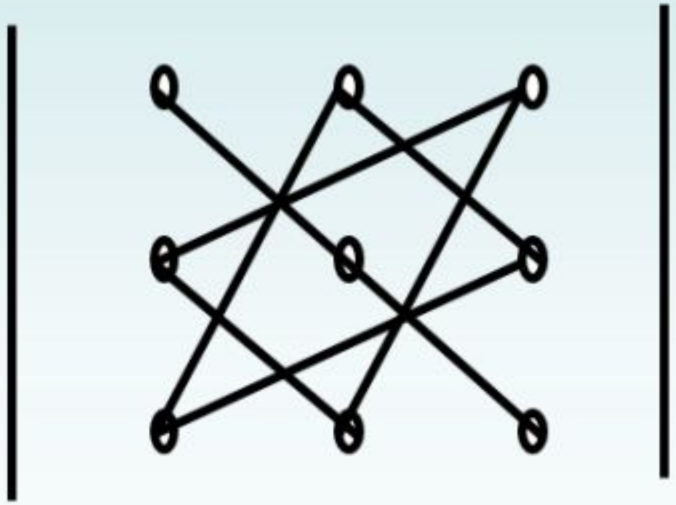
Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



+

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

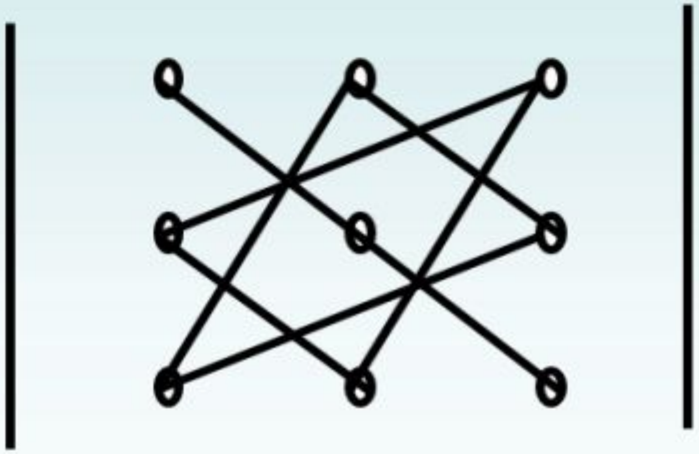
Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



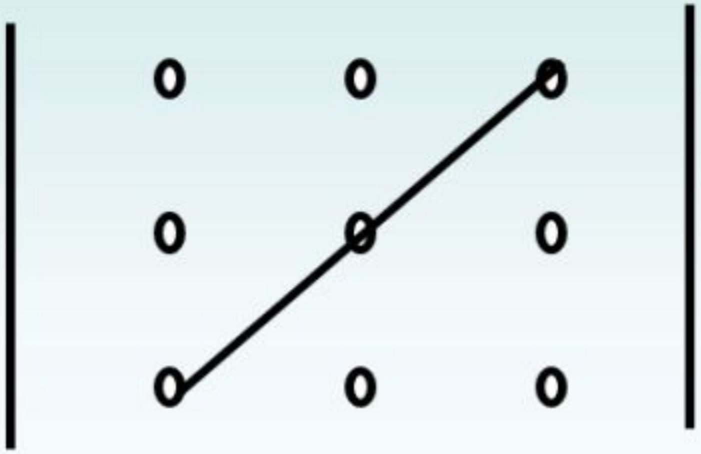
+

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



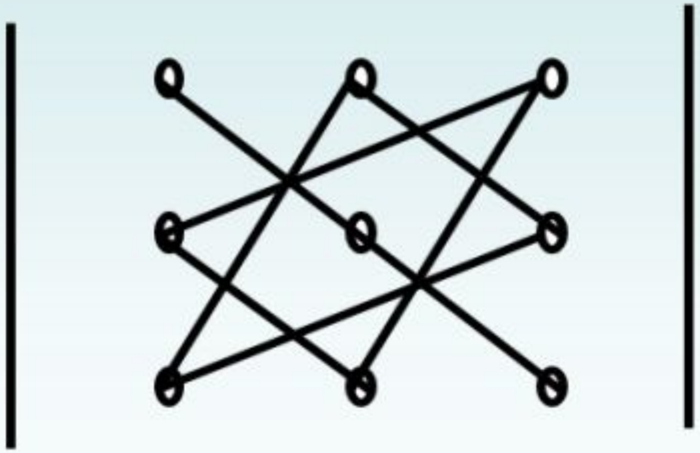
+

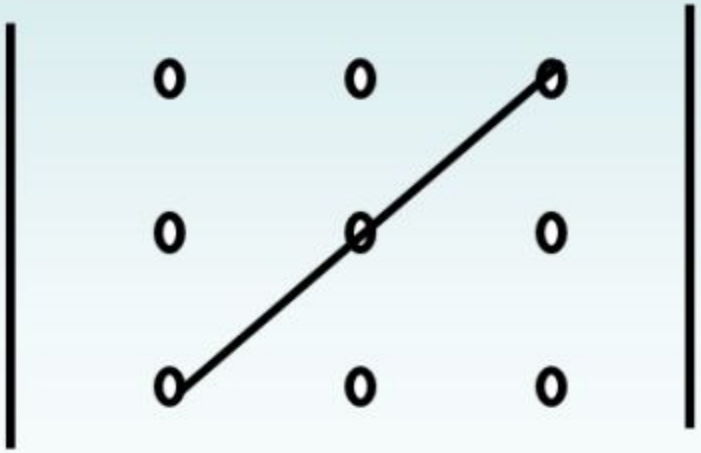


-

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

третьего порядка. Правило треугольника



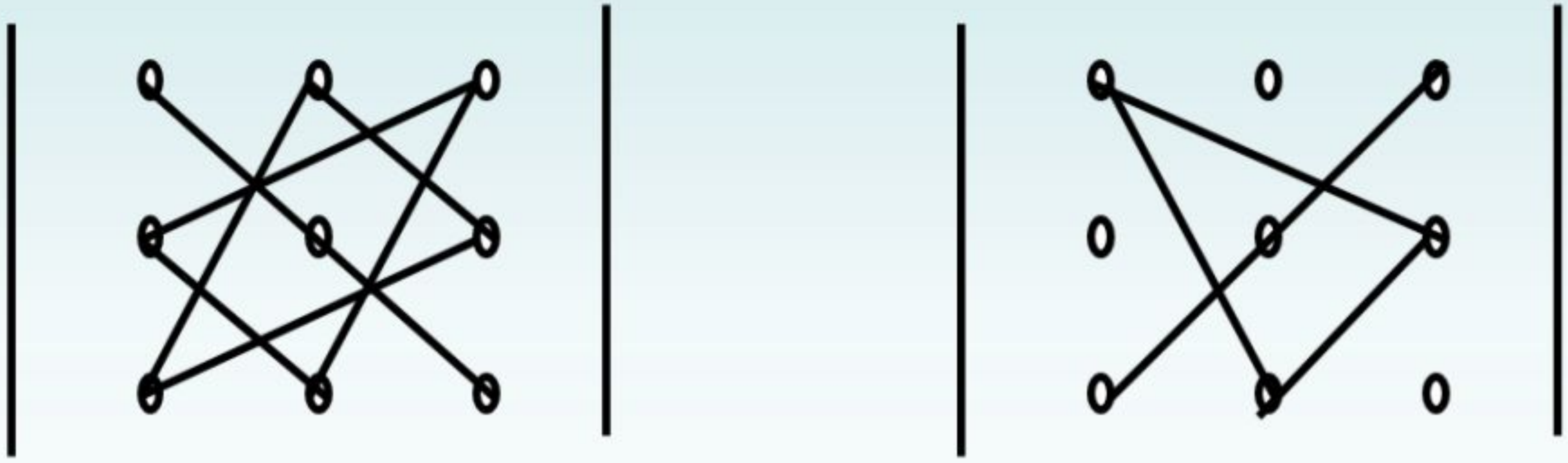


+ -

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} -$$

третьего порядка. Правило треугольника

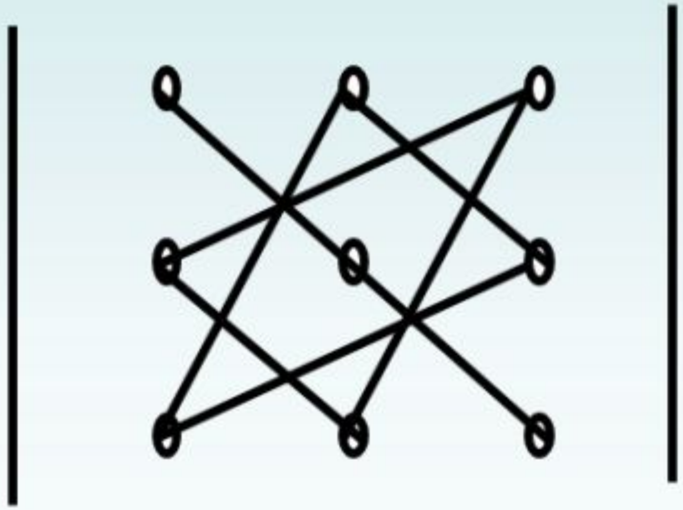


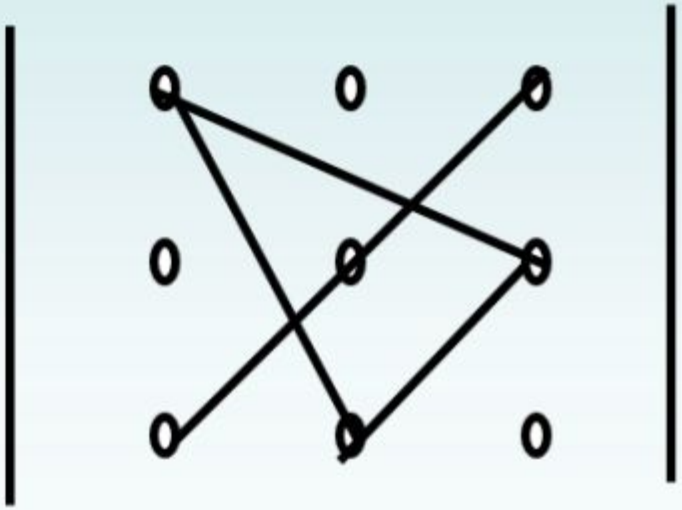
+ -

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} -$$

Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника





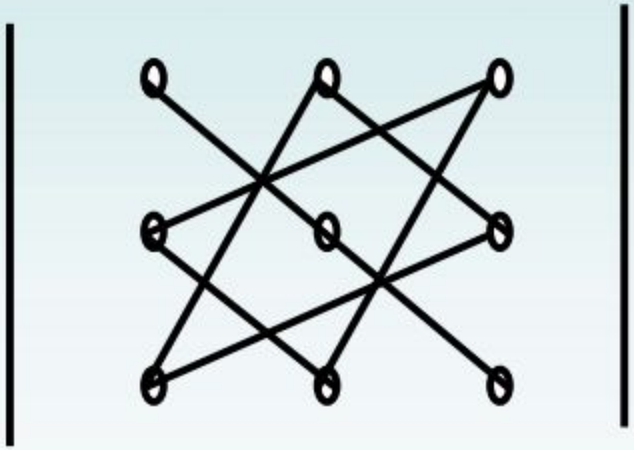
+

-

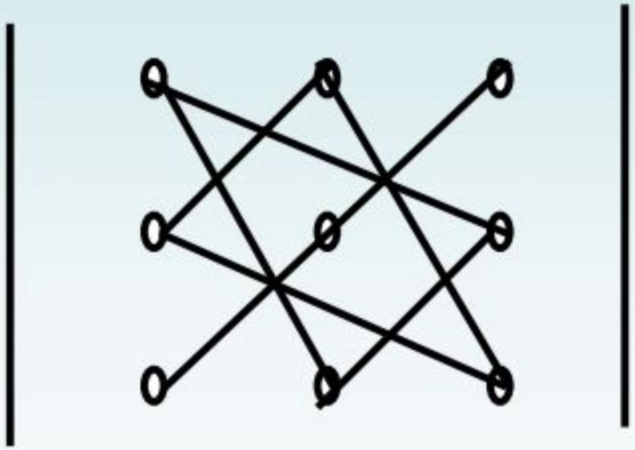
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



+



-

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

Пример 8. Вычислить определитель матрицы по правилу треугольника

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2(-1)$$

Пример 8. Вычислить определитель матрицы по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2(-1) + (-1)(-3)1$$

Пример 8. Вычислить определитель матрицы по правилу треугольника

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 2(-1)+(-1)(-3)1+1\cdot 1\cdot 1-$$

по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2(-1) + (-1)(-3)1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 2 \cdot 1$$

по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2(-1) + (-1)(-3)1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 2 \cdot 1 - (-1)1(-1)$$

Пример 6. Вычислить определитель матрицы по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2(-1) + (-1)(-3)1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 2 \cdot 1 - (-1)1(-1) - 2(-3) \cdot 1 =$$

Пример 8. Вычислить определитель матрицы по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2(-1) + (-1)(-3)1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 2 \cdot 1 - (-1)1(-1) - 2(-3) \cdot 1 =$$

Пример 8. Вычислить определитель матрицы по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2(-1) + (-1)(-3)1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 2 \cdot 1 - (-1)1(-1) - 2(-3) \cdot 1 =$$

Свойства определителей матриц

Свойство 1. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы, то есть

$$D(A^T) = D(A).$$

Свойство 2. (Теорема разложения).

Определитель матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Свойства определителей матриц

Свойство 3. Постоянный множитель всех элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

Следствие. Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то определитель такой матрицы равен нулю.

Свойства определителей матриц

Свойство 4. Если у матрицы две строки (столбца) имеют пропорциональные элементы, то ее определитель равен нулю.

Свойство 5.

Определитель произведения квадратных матриц А и В равен произведению определителей этих матриц

$$D(AB) = D(A) \cdot D(B).$$

Обратная матрица

Квадратная матрица A называется **обратимой**, если существует **обратная** к ней матрица A^{-1} , удовлетворяющая соотношениям

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Теорема. Для того, чтобы матрица *A* имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы **определитель** ее был **не равен нулю;**
тогда матрица *A* –**невырожденная** и

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Определитель
матрицы А

Теорема. Для того, чтобы матрица *A* имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы **определитель** ее был **не равен нулю;**
тогда матрица *A* –**невырожденная** и

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы А

Алгебраические дополнения элементов **транспонированной**

Пример 9. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу, обратную *A*.

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)}\begin{pmatrix} & \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - (-3) = -1.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot(-2) = -2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad D(A) = -1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-3) = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \cancel{1} & -2 \end{pmatrix}$$

Самостоятельная работа

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Задание

Определите значение алгебраического дополнения A_{22}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$D(A) = -1$ $A_{11} = -2$ $A_{12} = -1$ $A_{21} = 3$

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)}\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$D(A) = -1.$ $A_{11} = -2$ $A_{12} = -1$ $A_{21} = 3$

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$D(A) = -1.$$

$$A_{11} = -2 \qquad A_{12} = -1$$

$$A_{21} = 3 \qquad A_{22} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Спасибо
внимание

Спасибо за
внимание

асибо за
внимание

Спасибо за
внимание

СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ

Спасибо за
внимание

Спасибо

Спасибо за

Спасибо за