

Модуль 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы

прямоугольная таблица чисел, состоящая
из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

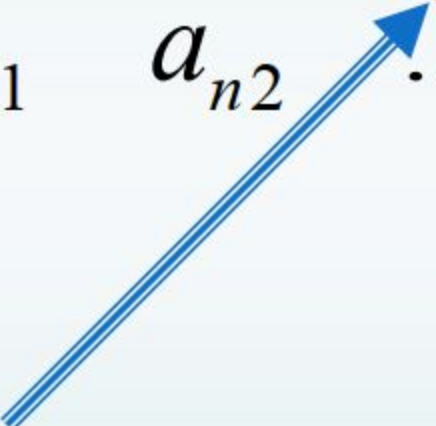
a_{ik} - элемент матрицы

i - номер строки

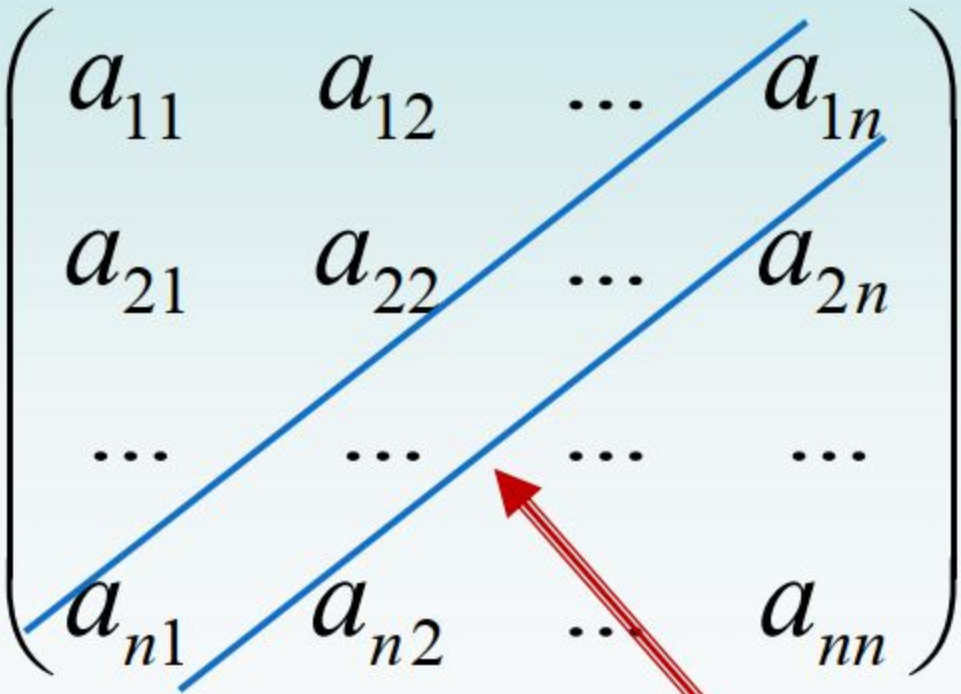
Квадратная матрица : число строк равно
числу столбцов

Порядок квадратной матрицы: количество
ее строк (столбцов)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{(1)} - \text{ матрица } n\text{-го} \\ \text{порядка}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$


Главная диагональ квадратной матрицы:
совокупность элементов
с одинаковыми индексами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$


Побочная диагональ:

совокупность элементов, расположенных
на второй диагонали

Диагональная матрица:
квадратная матрица, все
элементы которой,
расположенные вне
главной диагонали,
равны нулю

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Единичная матрица:
диагональная матрица ,
все диагональные
элементы которой равны
единице

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Операции над матрицами

Равные матрицы A и B :

имеют одинаковый размер и их
соответствующие элементы равны :

$$a_{ik} = b_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n).$$

Равные матрицы A и B :

имеют одинаковый размер и их
соответствующие элементы равны :

$$a_{ik} = b_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n).$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Произведение матрицы A на число λ :
матрица B , такая что

$$B = \lambda A = A\lambda.$$

матрица B , такая что

$$B = \lambda A = A\lambda.$$

Пример 1

$$\begin{aligned} 5 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \cdot (-4) & 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 0 & 5 \cdot 7 & 5 \cdot (-3) \\ 5 \cdot 6 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot 8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -20 & 5 & 10 \\ 0 & 35 & -15 \\ 30 & 0 & 40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

размер: матрица C , каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B :

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$$

Сумма матриц A и B , имеющих одинаковый размер: матрица C , каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B :

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$$

Пример 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Пример 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2+7 & 1-3 \\ -4+0 & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -4 & ? \end{pmatrix}$$

Чему равен элемент C_{22} ?



$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$$



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2+7 & 1-3 \\ -4+0 & 6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

столбцы матрицы A являются
строками матрицы A^T

Пример 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Самостоятельная работа 2

Задание. Какая из матриц является транспонированной матрицей A ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

A. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

B. $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

C. $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

D. $A^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

Произведение матрицы A ($m \times p$)
на матрицу B ($p \times n$):

матрица C ($m \times n$),
каждый элемент которой равен

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{im}b_{mk}$$

То есть **число строк** новой матрицы совпадает с
числом строк левого сомножителя.

А **число столбцов** матрицы-произведения
совпадает с **числом столбцов правого**

$$C (m \times n) = A (m \times p) * B (p \times n)$$

При перемножении матриц:

для получения элемента C_{11} матрицы-произведения
все элементы *первой строки левой матрицы*
умножаются на соответствующие элементы
первого столбца правой матрицы и складываются.

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

При перемножении матриц:

для получения элемента C_{12} матрицы-произведения
все элементы *первой строки левой матрицы*
умножаются на соответствующие элементы
второго столбца правой матрицы и складываются.

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$C (m \times n) = A (m \times p) * B (p \times n)$$

При перемножении матриц:

для получения элемента C_{21} матрицы-произведения
все элементы ***второй строки левой матрицы***
умножаются на соответствующие элементы
первого столбца правой матрицы и складываются.

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

При перемножении матриц:

для получения элемента c_{22} матрицы-произведения
все элементы ***второй строки левой матрицы***
умножаются на соответствующие элементы
второго столбца правой матрицы и складываются.

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Перемножение матриц **не обладает**
переместительным свойством!

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$A \cdot B$ -**произведение** матрицы A на матрицу
 B **справа**

$B \cdot A$ -**произведение** матрицы A на матрицу
 B **слева**

переместительным свойством!

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Частный случай

**Если при перемножении матриц
выполняется равенство:**

$$A \cdot B = B \cdot A$$

такие матрицы называются перестановочными

Пример 4. Вычислить произведение матрицы A на матрицу B **справа**:

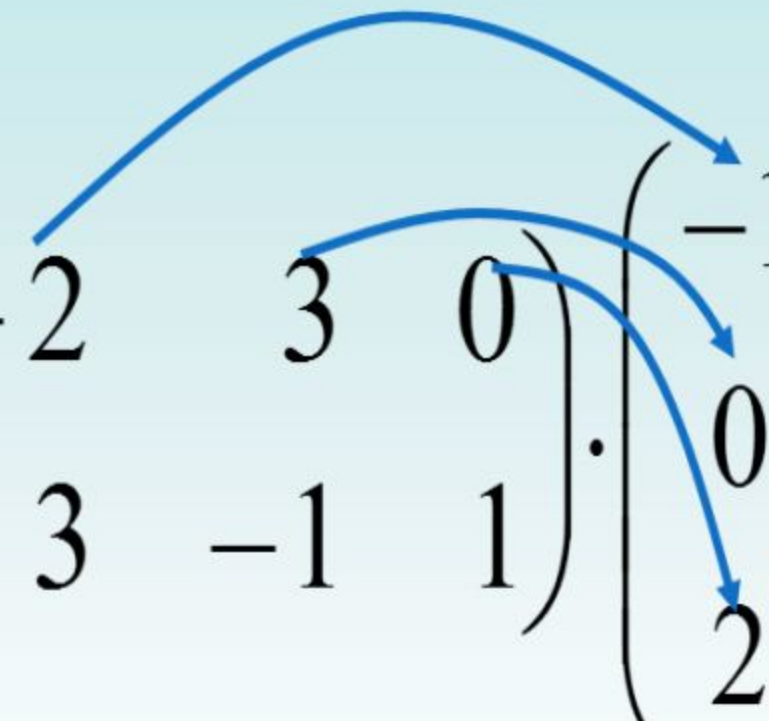
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$


$$= \begin{pmatrix} (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & \\ & \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -13 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

на матрицу **B** слева.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 & (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) & (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 & 0 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -5 & 2 \\ -9 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^*B = \begin{pmatrix} 2 & -13 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

1.3. Определители матриц

Определители матриц

Определитель матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

это **число**, записанное в виде таблицы и равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Пример 6. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 8 + 6 = 14$$

Самостоятельная работа 3

Задание. Вычислить определитель матрицы

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$



Варианты

A. 31

B. -31

ответов:

C. 27

D. 13

Сверим ответы.

$$\det B = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 - 7 \cdot (-5) = -4 + 35 = 31$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$



Миноры матриц

Минор M_{ik} элемента a_{ik} матрицы третьего порядка: определитель матрицы второго порядка, получающейся из данной матрицы вычеркиванием i -ой строки и k -го столбца, на пересечении которых находится этот элемент.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Алгебраические дополнения

Алгебраическое дополнение A_{ik} элемента

a_{ik} матрицы третьего порядка: число, равное произведению минора этого элемента на $(-1)^{i+k}$.

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

Пример 7 . Вычислить алгебраическое дополнение

элемента a_{21} матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Решение

1. Находим минор элемента a_{21} : $i = 2;$
 $k = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 0 = -1$$

элемента a_{21} матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Решение

1. Находим минор элемента a_{21} : $i = 2;$
 $k = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 0 = -1$$

2. Алгебраическое дополнение элемента a_{21} :

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+k} M_{ij}$$

Самостоятельная работа 4

Задание. Вычислить минор M_{22} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Варианты

A. -1

B. -3

ответов:

C. 2

D. 3

Сверим ответы?

Задание. Вычислить минор M_{22} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 = 2$$



Задание. Вычислить алгебраическое дополнение элемента a_{22} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Варианты

A. -2

B. -1

ответов:

C. 1

D. 2

Сверим ответы?

Вычислить алгебраическое дополнение элемента a_{22} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot 2 = 2$$



третьего порядка. Правило треугольника

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

+

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

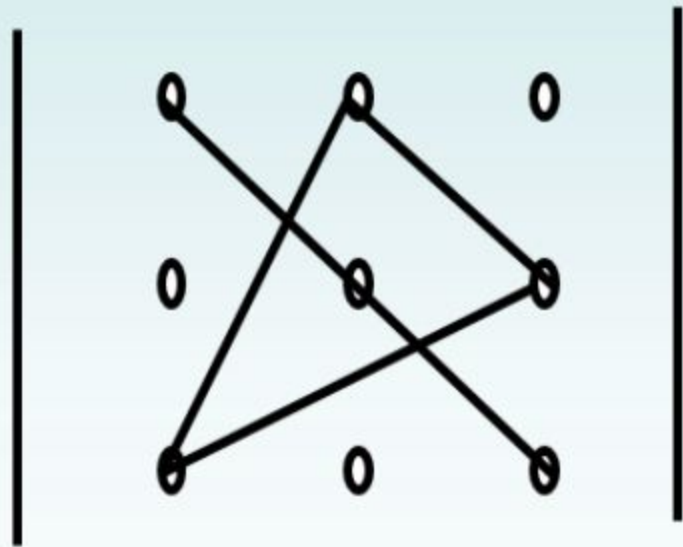
Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

+

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} +$$

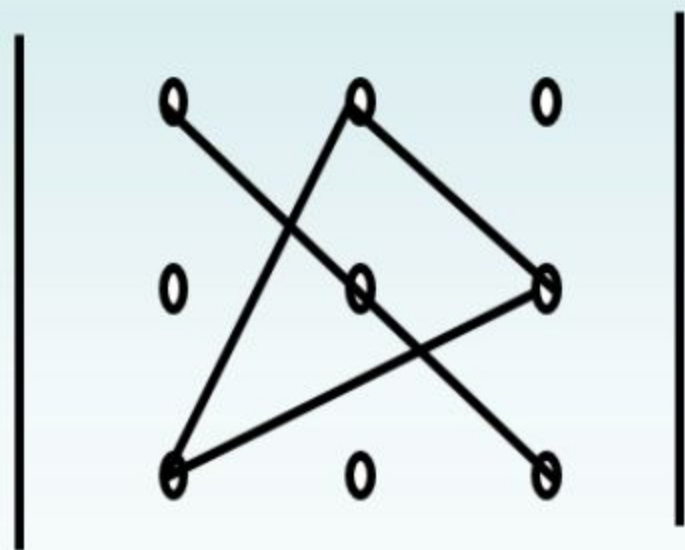
Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



+

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} +$$

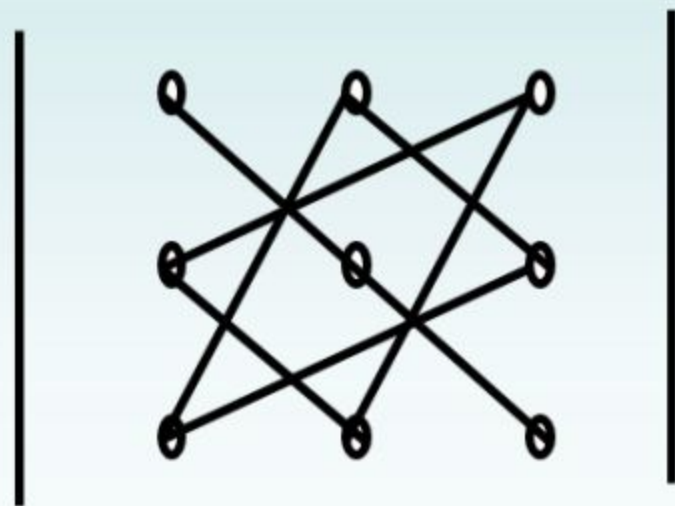
Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



+

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

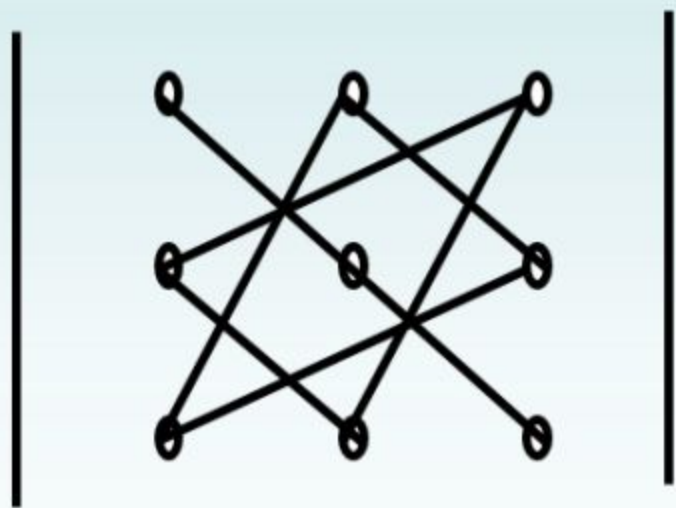
Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



+

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



+

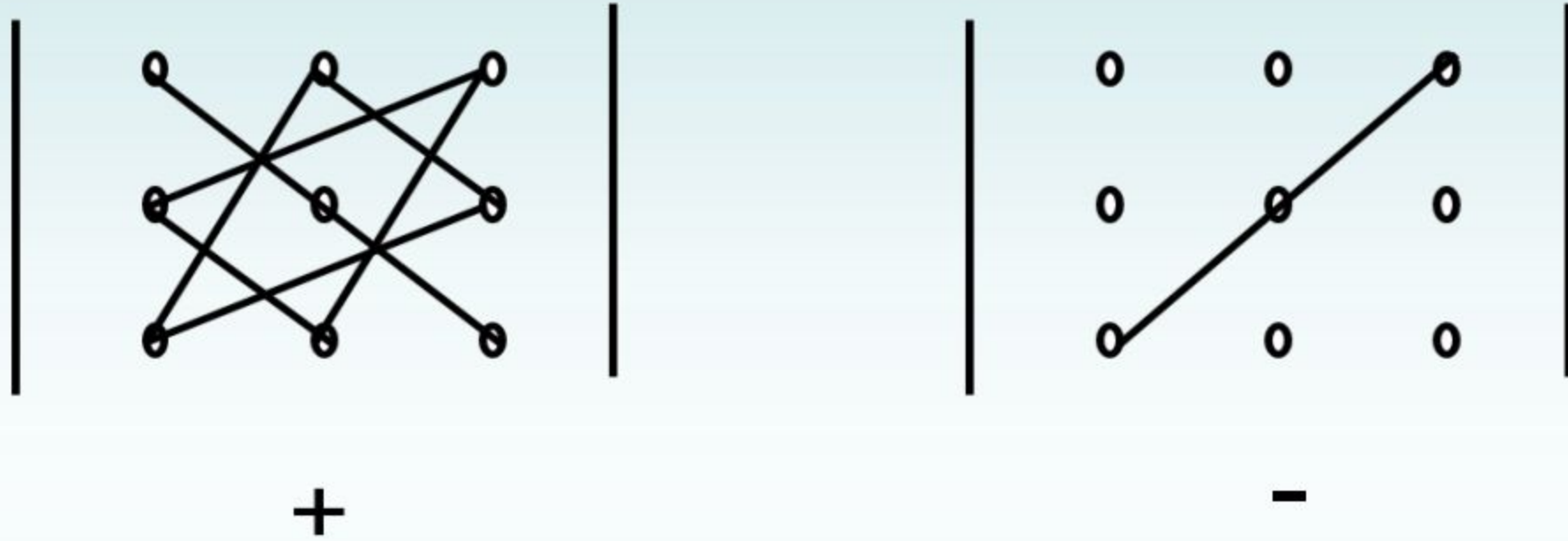
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

третьего порядка. Правило треугольника



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

третьего порядка. Правило треугольника

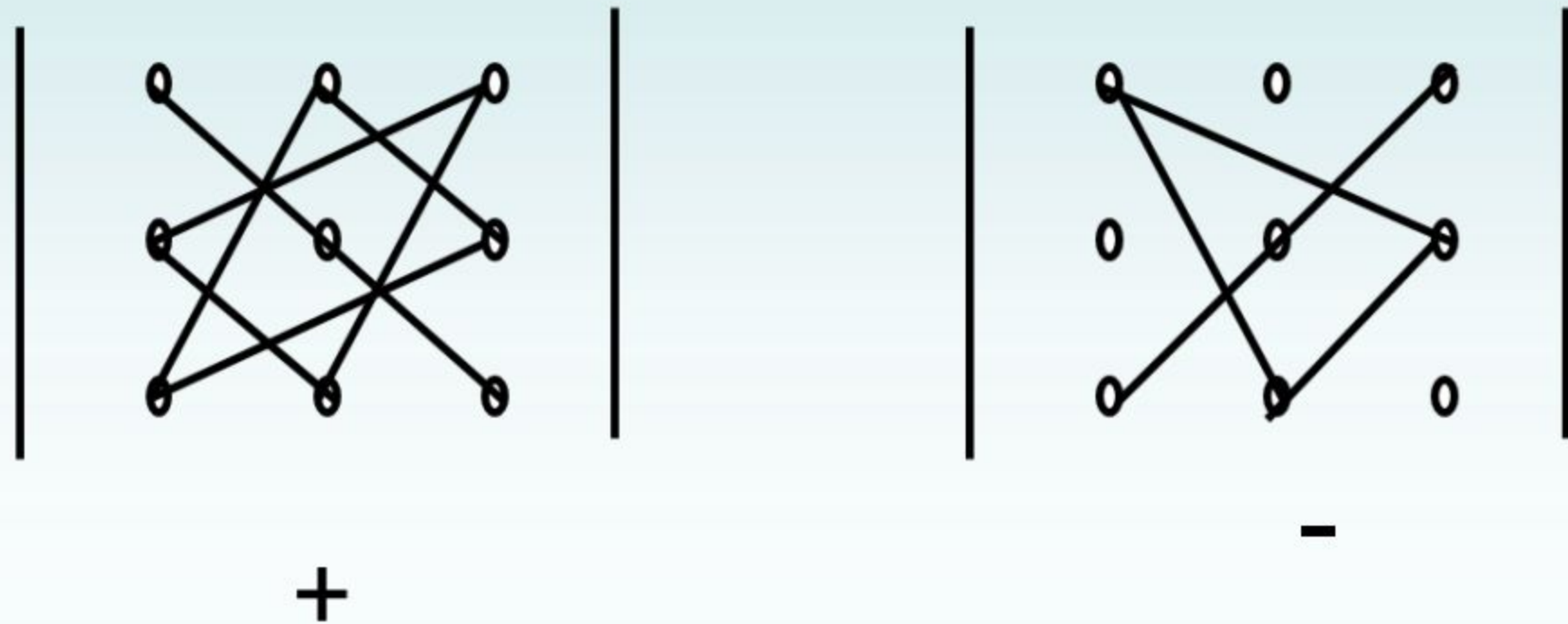


+

-

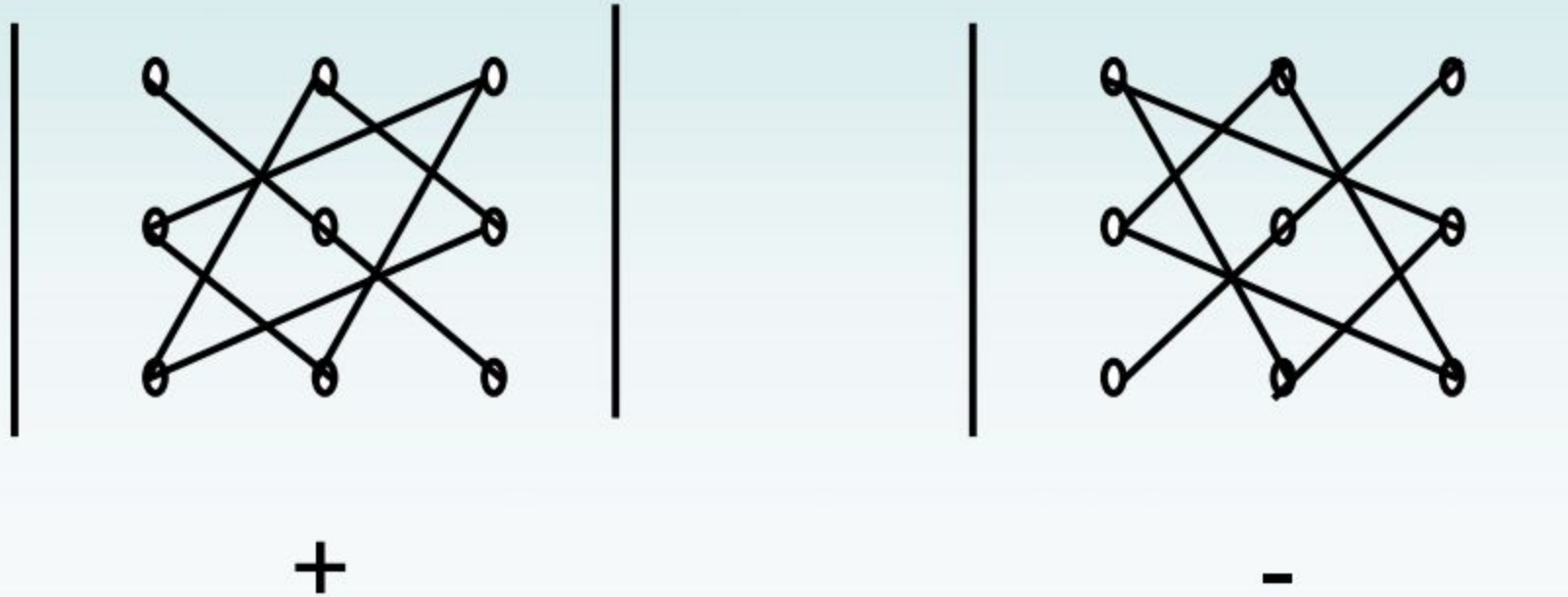
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

Пример 8. Вычислить определитель матрицы по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2(-1)$$

Пример 8. Вычислить определитель матрицы по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2(-1) + (-1)(-3)1$$

Пример 8. Вычислить определитель матрицы по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$

по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$- 1 \cdot 2 \cdot 1$$

по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$- 1 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot (-1)$$

Пример 8. Вычислить определитель матрицы по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$
$$- 1 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-3) \cdot 1 =$$

Пример 8. Вычислить определитель матрицы по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2(-1) + (-1)(-3)1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$- 1 \cdot 2 \cdot 1 - (-1)1(-1) - 2(-3) \cdot 1 =$$

Пример 8. Вычислить определитель матрицы по правилу треугольника

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$
$$- 1 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-3) \cdot 1 =$$

Свойства определителей матриц

Свойство 1. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы, то есть

$$D(A^T) = D(A).$$

Свойство 2. (Теорема разложения).

Определитель матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Свойства определителей матриц

Свойство 3. Постоянный множитель всех элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

Следствие. Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то определитель такой матрицы равен нулю.

Свойства определителей матриц

Свойство 4. Если у матрицы две строки (столбца) имеют пропорциональные элементы, то ее определитель равен нулю.

Свойство 5.

Определитель произведения квадратных матриц A и B равен произведению определителей этих матриц

$$D(AB) = D(A) \cdot D(B).$$

Обратная матрица


Квадратная матрица A называется **обратимой**, если существует **обратная** к ней матрица A^{-1} , удовлетворяющая соотношениям

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Теорема. Для того, чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы **определитель** ее **был не равен нулю;**
тогда матрица A – **невырожденная** и

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Определитель
матрицы A



Теорема. Для того, чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы **определитель** ее **был не равен нулю;**
тогда матрица A – **невырожденная** и

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Определитель
матрицы A

Алгебраические дополнения
элементов **транспонированной**

Пример 9. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу, обратную A .

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - (-3) = -1.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-2) = -2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D(A) = -1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-3) = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Самостоятельная работа

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Задание

Определите значение алгебраического
дополнения A_{22}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D(A) = 1$$

$$A_{11} = 2$$

$$A_{12} = -1$$

$$A_{21} = 3$$

$$A = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & - & 3 \\ 1 & - & 2 \end{array} \right)$$

$$D(A) = -1.$$

$$A_{11} = -2$$

$$A_{12} = -1$$

$$A_{21} = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$D(A) = -1.$$

$$a_{11} = -2$$

$$a_{12} = -1$$

$$a_{21} = 3$$

$$a_{22} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Спасибо
внимание

Спасибо за
ВНИМАНИЕ

Спасибо за
внимание

Спасибо за
внимание

СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ

Спасибо за
внимание

Спасибо за
внимание

Спасибо за

спасибо за
внимание