

Понятие предела функции в  
точке. Теоремы о пределах.  
Виды пределов

# Предел функции

- ◆ Предел функции в точке
- ◆ Односторонние пределы
- ◆ Предел функции при  $x$  стремящемся к бесконечности
- ◆ Основные теоремы о пределах
- ◆ Вычисление пределов
- ◆ Раскрытие неопределенностей
- ◆ Первый замечательный предел



# Предел функции в точке

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , кроме, быть может самой точки  $x_0$ .

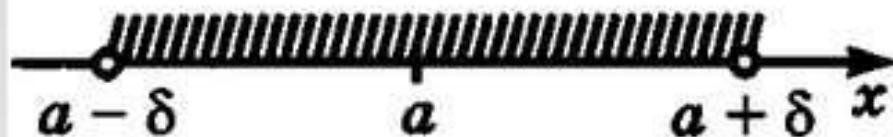
Число  $A$  называют пределом функции в точке  $x_0$  (или при  $x \rightarrow x_0$ ), если для любого положительного  $\varepsilon$  найдется такое положительное число  $\delta$ , что для всех  $x$  из  $\delta$  – окрестности точки  $x_0$  справедливо неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

## Окрестность точки



Интервал  $(a - \delta; a + \delta)$  называют *окрестностью точки  $a$* , а число  $\delta$  — *радиусом окрестности*. Для всех точек  $x$   $\delta$ -окрестности точки  $a$  выполняется двойное неравенство  $a - \delta < x < a + \delta$  или, что то же самое,  $|x - a| < \delta$ .

Например, на рисунке 6 изображена окрестность точки 2 радиуса 3.

Записывается эта окрестность так:

$$|x - 2| < 3.$$

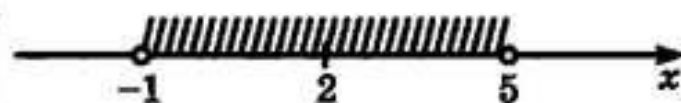


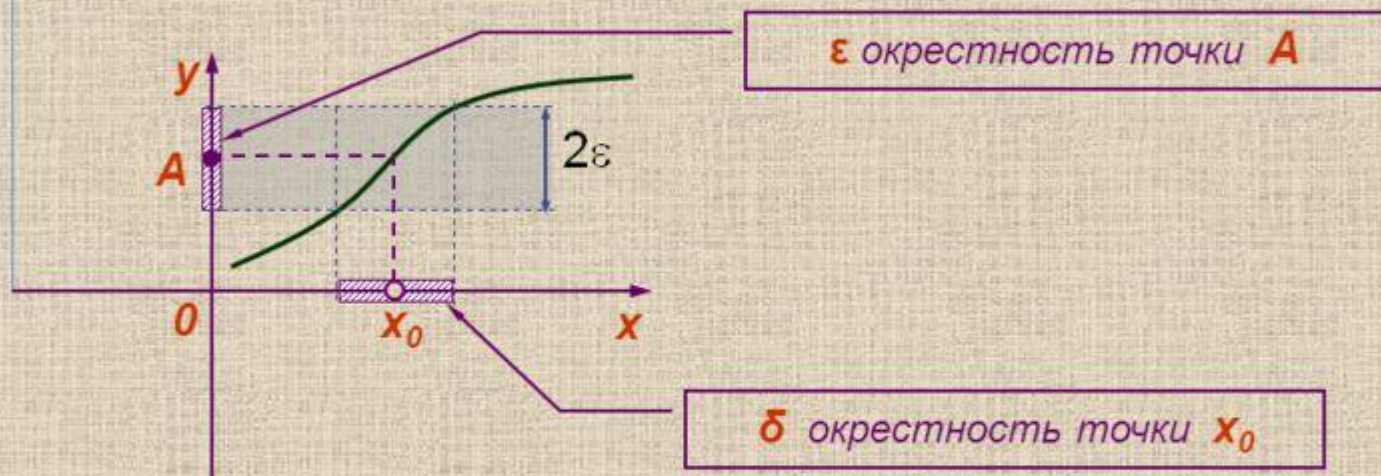
Рис. 6

Что такое проколота окрестность?



## Предел функции в точке

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$



Геометрический смысл предела: для всех  $x$  из  $\delta$  – окрестности точки  $x_0$  точки графика функции лежат внутри полосы, шириной  $2\varepsilon$ , ограниченной прямыми:  $y = A + \varepsilon$ ,  $y = A - \varepsilon$ .



# Односторонние пределы

В определении предела функции  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

предполагается, что  $x$  стремится к  $x_0$  любым способом: оставаясь меньше, чем  $x_0$  (слева от  $x_0$ ), большим, чем  $x_0$  (справа от  $x_0$ ), или колеблясь около точки  $x_0$ .

Бывают случаи, когда способ приближения аргумента  $x$  к  $x_0$  существенно влияет на значение предела, поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Число  $A_1$  называют **пределом функции слева** в точке  $x_0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x \in (x_0 - \delta; x_0)$  справедливо неравенство:

$$|f(x) - A_1| < \varepsilon$$

Предел слева записывают так:  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$



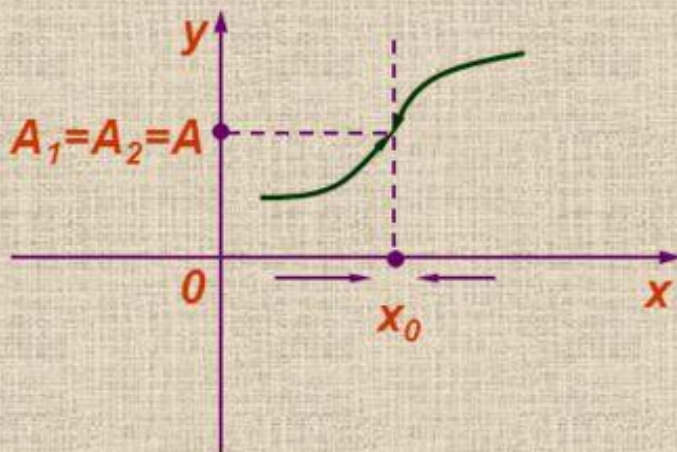


## Односторонние пределы

Число  $A_2$  называют *пределом функции справа* в точке  $x_0$ , если

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon$$

Предел справа записывают так:  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A_2$



Пределы функции слева и справа называют *односторонними пределами*.

Очевидно, если существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

то существуют и оба односторонних предела, причем  $A = A_1 = A_2$





## Предел функции при $x$ стремящемся к бесконечности

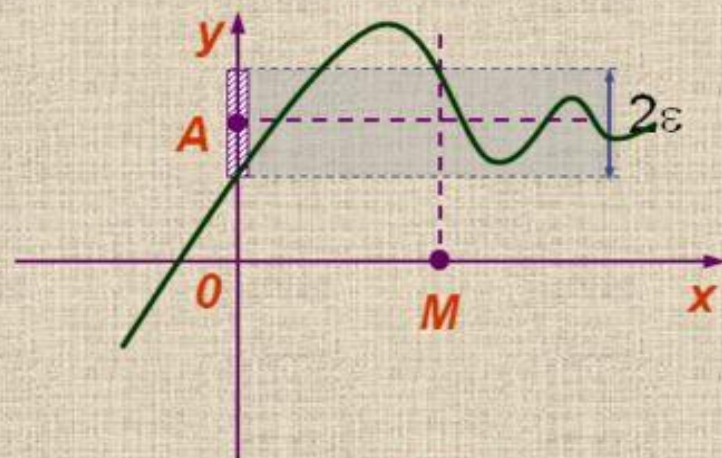
Пусть функция  $y = f(x)$  определена в промежутке  $(-\infty; \infty)$ .

Число  $A$  называют пределом функции при  $x \rightarrow \infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0; \exists M > 0; \forall x : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

Геометрический смысл этого определения таков:  
существует такое число  $M$ , что при  $x > M$  или при  $x < -M$  точки графика функции лежат внутри полосы шириной  $2\varepsilon$ , ограниченной прямыми:  
 $y = A + \varepsilon$ ,  $y = A - \varepsilon$ .





# Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функций.

Формулировка теорем, когда  $X \rightarrow X_0$  или  $X \rightarrow \infty$  аналогичны, поэтому будем пользоваться обозначением:  $\lim f(x)$ .

- ◆ Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов:

$$\lim [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x)$$

- ◆ Предел произведения двух функций равен произведению пределов:

$$\lim [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x)$$

- ◆ Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim [C \cdot f(x)] = C \cdot \lim f(x)$$



## Основные теоремы о пределах

- ◆ Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} \quad (\lim f_2(x) \neq 0)$$

- ◆ Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

- ◆ Предел показательно – степенной функции:

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = [\lim f(x)]^{\lim g(x)}$$



## Основные теоремы о пределах

- ◆ Если между соответствующими значениями трех функций  $u = u(x)$ ;  $z = z(x)$ ;  $v = v(x)$  выполняются неравенства:  $u \leq z \leq v$ , при этом:

$$\lim u(x) = \lim v(x) = A \text{ тогда: } \lim z(x) = A$$

- ◆ Если функция  $f(x)$  монотонна и ограничена при  $x < x_0$  или при  $x > x_0$ , то существует соответственно ее левый предел:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$$

или ее правый предел:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$$



## Вычисление пределов

Вычисление предела:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

начинают с подстановки предельного значения  $x_0$  в функцию  $f(x)$ .

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения  $x_0$  в функцию  $f(x)$  получаются выражения вида:

$$\frac{C}{0} = \infty \quad \frac{C}{\infty} = 0$$

то предел будет равен:



## Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения  $x_0$  в функцию  $f(x)$  получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad 1^{\infty}; \quad 0^0; \quad 0^{\infty}; \quad \infty^0; \quad \infty - \infty$$

Эти выражения называются **неопределенности**, а вычисление пределов в этом случае называется **раскрытие неопределенности**.



# Раскрытие неопределенностей

◆ Раскрытие неопределенности

$$\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{18}{-2} = -9$$

Если  $f(x)$  - дробно-

рациональная функция,  
необходимо разложить  
множители числителя и  
знаменателя дроби

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x+1}-1}{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

Если  $f(x)$  - иррациональная  
дробь, необходимо умножить  
числитель и знаменатель  
дроби на выражение,  
сопряженное к знаменателю.

$$\frac{(\sqrt{x+1}-1) \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x+1}+1}$$



# Раскрытие неопределенностей

◆ Раскрытие неопределенности  $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{2 + 0 + 0}{4 + 0 + 0} = \frac{1}{2}$$

Если  $f(x) = \frac{C}{\infty}$  — дробно-рациональная функция или иррациональная дробь необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на  $x$  в старшей степени



# Раскрытие неопределенностей

◆ Раскрытие неопределенности  $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) = [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}$$

Умножим и разделим функцию на сопряженное выражение

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}$$

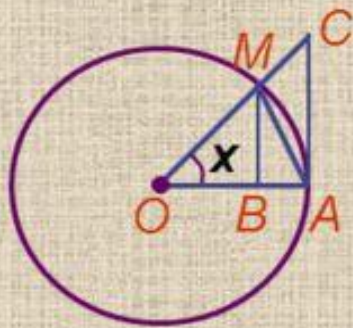
$$= \frac{2}{\infty} = 0$$



# Первый замечательный предел

Функция  $\frac{\sin x}{x}$  не определена при  $x = 0$ .

Найдем предел этой функции при  $x \rightarrow 0$



$$|OA| = 1 \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Обозначим:

$S_1$  - площадь треугольника  $OMA$ ,

$S_2$  - площадь сектора  $OMA$ ,

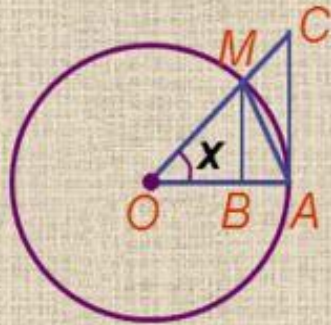
$S_3$  - площадь треугольника  $OCA$ ,

Из рисунка видно, что  $S_1 < S_2 < S_3$

$$S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} OA \cdot OM \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot \sin x$$



# Первый замечательный предел



$$S_2 = \frac{1}{2} OA \cdot AM = \frac{1}{2} x$$

$$S_3 = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} 1 \cdot tg x$$

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} tg x \Rightarrow \sin x < x < tg x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x < tg x \\ x > \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x < \frac{\sin x}{x} \\ 1 > \frac{\sin x}{x} \end{cases} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

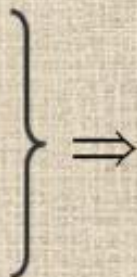


## Первый замечательный предел

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Формула справедлива также при  $x < 0$

*Следствия:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$$





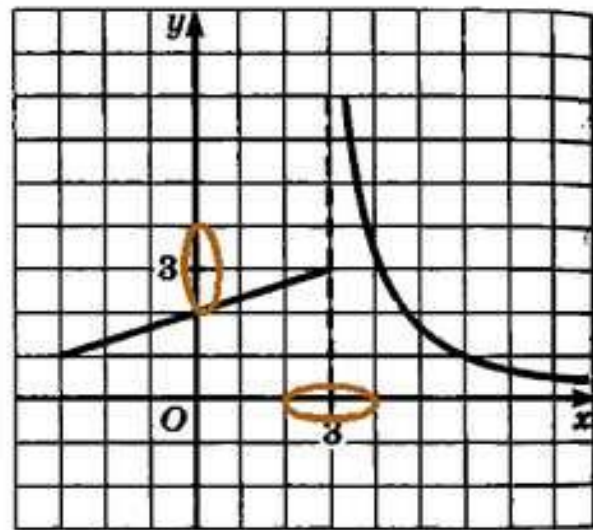
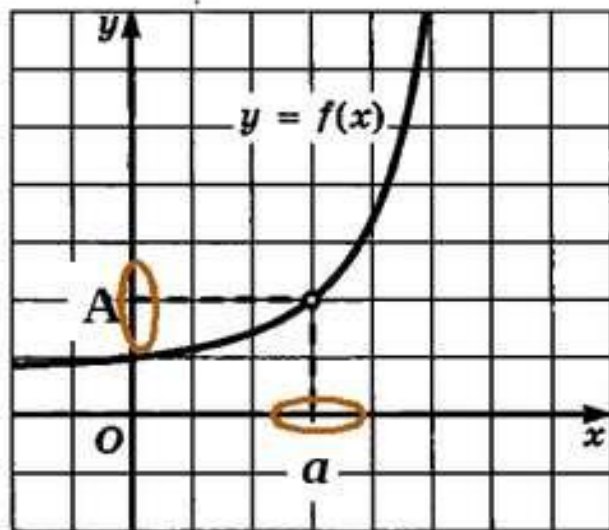
## Первый замечательный предел

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{x} \right)^2 \\ &= 2 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \right)^2 = 2 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} \right)^2 = \\ &= 2 \left( 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 = 2(2 \cdot 1)^2 = 8\end{aligned}$$



## Предел функции в точке

Определение. Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $x = a$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $0 < |x - a| < \delta$  выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .



## Примеры

**Пример 2.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7.$$

**Пример 3.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2+4}} = \frac{0}{\sqrt{2+4}} = 0.$$

**Пример 4.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-3}{4} = \frac{-3-3}{4} = -1,5.$$