

Понятие предела функции в
точке. Теоремы о пределах.
Виды пределов

Предел функции

- ◆ Предел функции в точке
- ◆ Односторонние пределы
- ◆ Предел функции при x стремящемся к бесконечности
- ◆ Основные теоремы о пределах
- ◆ Вычисление пределов
- ◆ Раскрытие неопределенностей
- ◆ Первый замечательный предел

Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , кроме, быть может самой точки x_0 .

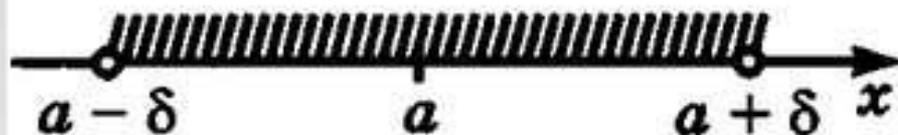
Число A называют пределом функции в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ , что для всех x из δ – окрестности точки x_0 справедливо неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Окрестность точки



Интервал $(a - \delta; a + \delta)$ называют *окрестностью точки a* , а число δ — *радиусом окрестности*. Для всех точек x δ -окрестности точки a выполняется двойное неравенство $a - \delta < x < a + \delta$ или, что то же самое, $|x - a| < \delta$.

Например, на рисунке 6 изображена окрестность точки 2 радиуса 3.

Записывается эта окрестность так:

$$|x - 2| < 3.$$

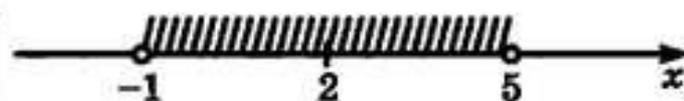
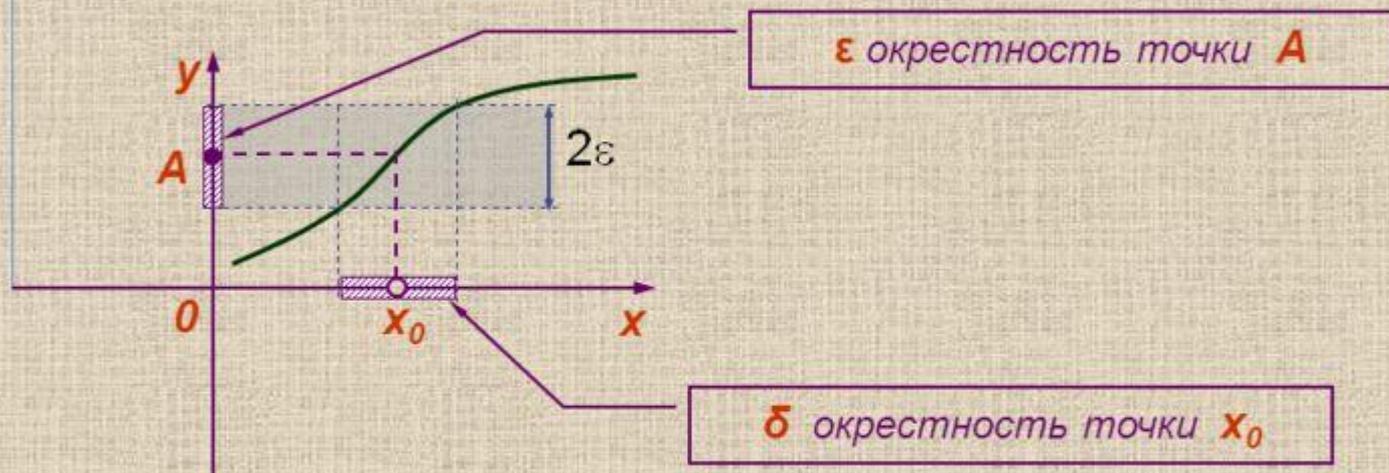


Рис. 6

Что такое проколота окрестность?

Предел функции в точке

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$



Геометрический смысл предела: для всех x из δ – окрестности точки x_0 точки графика функции лежат внутри полосы, шириной 2ε , ограниченной прямыми: $y = A + \varepsilon$, $y = A - \varepsilon$.

Односторонние пределы

В определении предела функции $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

предполагается, что x стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньше, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около точки x_0 .

Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела, поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Число A_1 называют **пределом функции слева** в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ справедливо неравенство:

$$|f(x) - A_1| < \varepsilon$$

Предел слева записывают так: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$

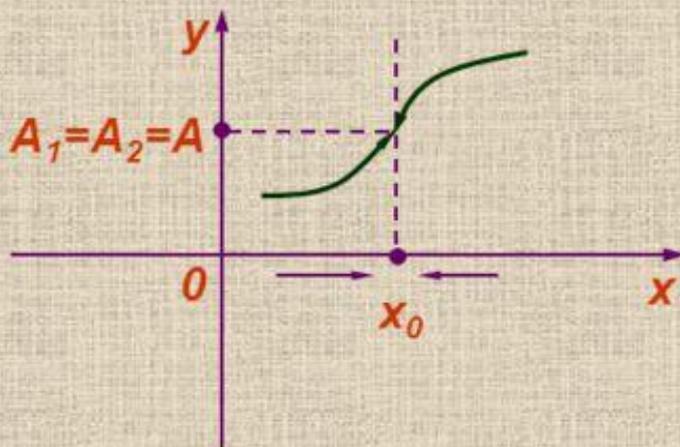


Односторонние пределы

Число A_2 называют *пределом функции справа* в точке x_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon$$

Предел справа записывают так: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A_2$



Пределы функции слева и справа называют *односторонними пределами*.

Очевидно, если существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$



Предел функции при x стремящемся к бесконечности

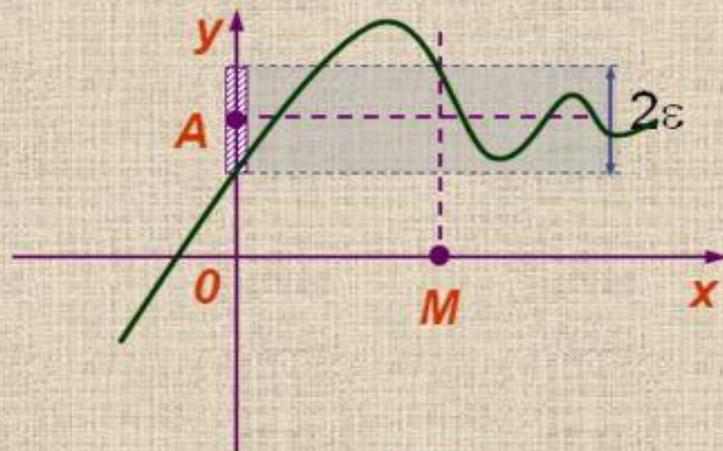
Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $(-\infty; \infty)$.

Число A называют пределом функции при $x \rightarrow \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0; \exists M > 0; \forall x : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

Геометрический смысл этого определения таков:
существует такое число M , что при $x > M$ или при $x < -M$ точки графика функции лежат внутри полосы шириной 2ε , ограниченной прямыми:
 $y = A + \varepsilon$, $y = A - \varepsilon$.



Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функций.

Формулировка теорем, когда $X \rightarrow X_0$ или $X \rightarrow \infty$ аналогичны, поэтому будем пользоваться обозначением: $\lim f(x)$.

- ◆ Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов:

$$\lim [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x)$$

- ◆ Предел произведения двух функций равен произведению пределов:

$$\lim [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x)$$

- ◆ Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim [C \cdot f(x)] = C \cdot \lim f(x)$$

Основные теоремы о пределах

- ◆ Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} \quad (\lim f_2(x) \neq 0)$$

- ◆ Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

- ◆ Предел показательно – степенной функции:

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = [\lim f(x)]^{\lim g(x)}$$

Основные теоремы о пределах

- ◆ Если между соответствующими значениями трех функций $u = u(x)$; $z = z(x)$; $v = v(x)$ выполняются неравенства: $u \leq z \leq v$, при этом:

$$\lim u(x) = \lim v(x) = A \text{ тогда: } \lim z(x) = A$$

- ◆ Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена при $x < x_0$ или при $x > x_0$, то существует соответственно ее левый предел:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$$

или ее правый предел:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$$

Вычисление пределов

Вычисление предела: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения вида:

$$\frac{C}{0} = \infty \quad \frac{C}{\infty} = 0$$

то предел будет равен:

Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad 1^{\infty}; \quad 0^0; \quad 0^{\infty}; \quad \infty^0; \quad \infty - \infty$$

Эти выражения называются **неопределенности**, а вычисление пределов в этом случае называется **раскрытие неопределенности**.

Раскрытие неопределенностей

◆ Раскрытие неопределенности

$$\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{18}{-2} = -9$$

Если $f(x)$ - дробно-

рациональная функция,
необходимо разложить
множители числителя и
знаменателя дроби

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sqrt{x+1}-1}}{\cancel{x} \cdot (\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

Если $f(x)$ - иррациональная
дробь, необходимо умножить
числитель и знаменатель
дроби на выражение,
сопряженное к знаменателю.

$$\frac{(\sqrt{x+1}-1) \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x+1}+1}$$

Раскрытие неопределенностей

◆ Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{2 + 0 + 0}{4 + 0 + 0} = \frac{1}{2}$$

Если $f(x) = \frac{C}{\infty}$ — дробно-рациональная функция или иррациональная дробь необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на x в старшей степени

Раскрытие неопределенностей

◆ Раскрытие неопределенности $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) = [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}$$

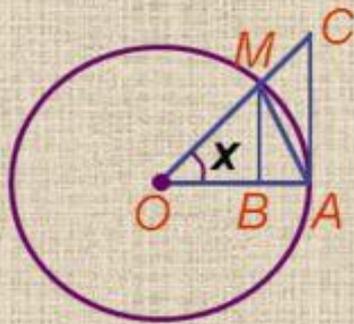
Умножим и разделим функцию на сопряженное выражение

$$= \frac{2}{\infty} = 0$$

Первый замечательный предел

Функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена при $x = 0$.

Найдем предел этой функции при $x \rightarrow 0$



$$|OA| = 1 \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Обозначим:

S_1 - площадь треугольника OMA ,

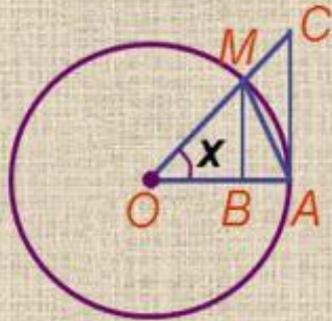
S_2 - площадь сектора OMA ,

S_3 - площадь треугольника OCA ,

Из рисунка видно, что $S_1 < S_2 < S_3$

$$S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} OA \cdot OM \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot \sin x$$

Первый замечательный предел



$$S_2 = \frac{1}{2} OA \cdot AM = \frac{1}{2} x$$

$$S_3 = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} 1 \cdot tg x$$

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} tg x \Rightarrow \sin x < x < tg x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x < tg x \\ x > \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x < \frac{\sin x}{x} \\ 1 > \frac{\sin x}{x} \end{cases} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Первый замечательный предел

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Формула справедлива также при $x < 0$

Следствия:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

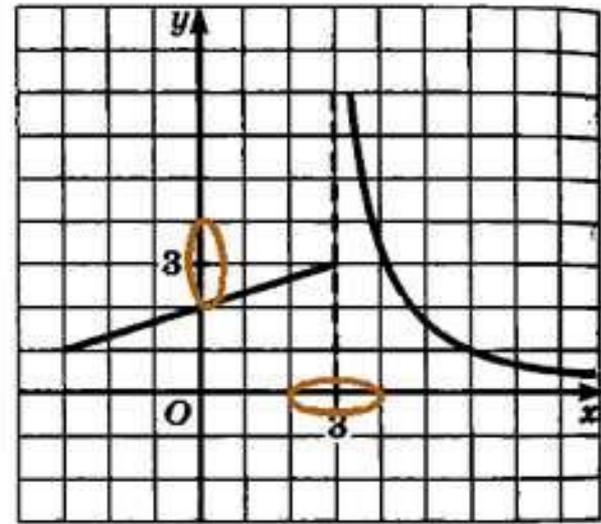
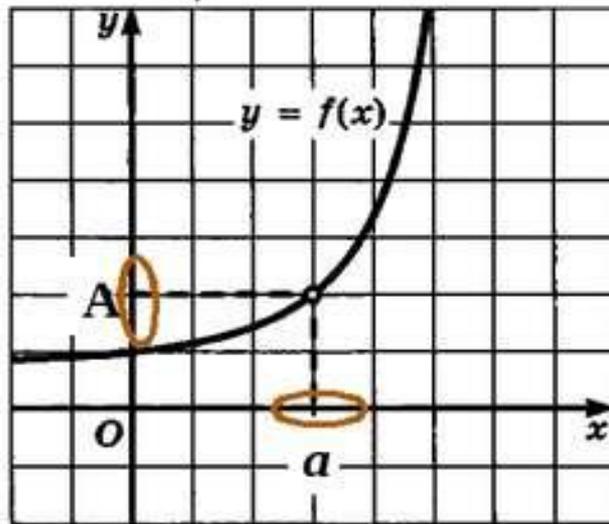
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$$

Первый замечательный предел

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^2 \\ &= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \right)^2 = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} \right)^2 = \\ &= 2 \left(2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 = 2(2 \cdot 1)^2 = 8\end{aligned}$$

Предел функции в точке

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.



Примеры

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7.$$

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2+4}} = \frac{0}{\sqrt{2+4}} = 0.$$

Пример 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12}$.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-3}{4} = \frac{-3-3}{4} = -1,5.$$