Здравствуйте!

Лекция №5

Тип IV. Рассмотрим

$$I=\int\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^k}=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+(N-\frac{Mp}{2})}{(x^2+px+q)^k}dx=$$

$$=\frac{M}{2}K+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)J_k,$$

где

$$K=\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k}=\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k}=\frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+C,$$

$$J_k=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

$$J_k = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k}.$$

Для вычисления J_k положим

$$a^2 = q - \frac{p^2}{4}, \quad t = x + \frac{p}{2}, \quad dx = dt.$$

Тогда

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(t^2 + a^2) - t^2}{(t^2 + a^2)^k} dt =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} = J_{k-1} - \frac{1}{a^2} L,$$

где

$$L = \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} = \int \frac{t(tdt)}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^k} =$$

$$= -\frac{2}{2(k-1)} \int t\, d\left[\frac{1}{(t^2 + a^2)^{k-1}} \right].$$

$$L = -\frac{2}{2(k-1)}\int t\, d\left[\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}}\right].$$

Последний интеграл вычислим по частям, полагая

$$u = t,\ v = \frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

В результате получим:

$$L = -\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}\right] = -\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} - J_{k-1}\right].$$

Подставляя полученное выражение в формулу для J_k, приходим к рекуррентной формуле

$$J_k = \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} J_{k-1}.$$

Так как

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a} + C,$$

то рекуррентно можем вычислить $J_2, J_3, \ldots, J_k$.

После подстановки J_k в I и замены t на $x + \frac{p}{2}$ получаем окончательный результат.

$$I = \int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{M}{2}K + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)J_k,$$

$$K = \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C,$$

$$J_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k},$$

$$J_k = \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} J_{k-1},$$

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a} + C,$$

$$t = x + \frac{p}{2}.$$

Интегралы от тригонометрических функций

Определение. Полиномом от двух переменных степени n называется выражение

$$P_n(x,y)=a_{00}+(a_{10}x+a_{01}y)+(a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2)+\ldots+$$
$$+(a_{n0}x^n+a_{n-1,1}x^{n-1}y+\ldots+a_{0n}y^n).$$

(Обратите внимание, как индексы у коэффициентов a соотносятся со степенями x и y).

Пусть $P_n(x,y)$ $Q_m(x,y)$ – два полинома от двух переменных. Функция $R(x,y)=\dfrac{Q_m(x,y)}{P_n(x,y)}$ называется дробно рациональной функцией двух переменных.

В этом разделе будут рассмотрены вопросы вычисления интегралов вида

$$\int R(\sin x,\cos x)dx.$$

Универсальная подстановка

Эта подстановка имеет вид $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Докажем, что она приводит рассматриваемый класс интегралов к интегралам от дробно рациональных функций. Имеем:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = 2\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\cdot\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

В результате рассматриваемый интеграл принимает вид

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

и он является интегралом от дробно рациональной функции, который вычисляется при помощи разложения на простейшие.

Упрощенные подстановки

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

Чтобы изложение дальнейшего было короче, будем писать u вместо $\sin x$ и v вместо $\cos x$. Тогда условие применимости первой упрощенной подстановки примет вид $R(-u,v) = -R(u,v)$.

Но в нашей формуле, определяющей функцию $R(u,v)$ и в числителе и в знаменателе стоят полиномы по переменным u и v. Когда же функция $R(u,v)$ будет нечетной функцией по переменной u? Легко догадаться, что это будет тогда, когда сомножитель u можно вынести за скобки и, после этого, в числителе и знаменателе останутся лишь полиномы от переменной u^2, то есть тогда, когда функция $R(u,v)$ может быть приведена к виду $R(u,v) = u \cdot R_1(u^2, v)$.

Это условие и определяет первую упрощенную подстановку. Она имеет вид

$$t = \cos x.$$

Тогда $dt = -\sin x dx$ и мы имеем

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \sin x \cdot R_1(\sin^2 x, \cos x)dx =$$

$$= \int \sin x \cdot R_1(1-\cos^2 x, \cos x)dx = -\int R_1(1-t^2, t)dt$$

и мы получили интеграл от дробно рациональной функции.

2. Условие применимости второй упрошенной подстановки имеет вид

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

Повторяя почти дословно все рассуждения, касающиеся первой упрощенной подстановки, можно получить, что в этом случае функция $R(u, v)$ может быть приведена к виду $R(u, v) = v \cdot R_1(u, v^2)$.

Вторая упрощенная подстановка имеет вид $t = \sin x$. Тогда $dt = \cos x dx$ и мы имеем

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int \cos x \cdot R_1(\sin x, \cos^2 x) dx =$$

$$= \int \cos x \cdot R_1(\sin x, 1 - \sin^2 x) dx = \int R_1(t, 1 - t^2) dt$$

и мы получили интеграл от дробно рациональной функции.

3. Условие применимости третьей упрощенной подстановки имеет вид

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

Попытаемся сообразить, что это дает относительно вида функции $R(u, v)$. Прежде всего имеем

$$R(u,v) = R\left(\frac{u}{v}v, v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Тогда условие применимости третьей упрощенной подстановки дает

$$R(-u, -v) = R_1\left(\frac{-u}{-v}, -v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R(u,v) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Используя те же рассуждения, что и выше, легко догадаться, что второй аргумент у $R_1\left(\frac{u}{v}, v\right)$ должен содержать только **четные** степени v. Поэтому $R(u,v) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_2\left(\frac{u}{v}, v^2\right)$, и

$R(\sin x, \cos x) = R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)$.

Это и определяет третью упрощенную подстановку. Она имеет вид $t = \operatorname{tg} x$. Действительно, в этом случае

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

и наш интеграл принимает вид

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)dx = \int R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}$$

и мы получили интеграл от дробно рациональной функции.

Вычисление интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{Ax+B}}\right)dx$

Рассмотрим вычисление интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{Ax+B}}\right)dx$ при условии $\frac{a}{A} \neq \frac{b}{B}$.

Все, что здесь надо запомнить – это то, какую замену переменных (подстановку) здесь нужно сделать, а именно

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{Ax+B}}.$$

Дальше все идет само собой. Выражаем x через t

$$\frac{ax+b}{Ax+B} = t^m, \quad ax+b = Axt^m + Bt^m, \; x = \frac{b - Bt^m}{At^m - a},$$

и самое неприятное – корень – исчез.

Далее имеем

$$dx = \frac{-Bmt^{m-1}(At^m - a) - Amt^{m-1}(b - Bt^m)}{(At^m - a)^2}dt =$$

$$= mt^{m-1}\frac{aB - bA}{(At^m - a)^2}dt\,.$$

Заметим, что $aB - bA \neq 0$.

Окончательно получаем

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{Ax+B}}\right)dx = m(aB - bA)\int R\left(\frac{b - Bt^m}{At^m - a}, t\right)\frac{t^{m-1}dt}{(At^m - a)^2},$$

и мы получили интеграл от дробно рациональной функции.

Вычисление интегралов вида $\int x^n (a+bx^m)^p dx$

Рассмотрим теперь вычисление интегралов вида $I = \int x^n (a+bx^m)^p dx$**,** где m, n, и p – **рациональные** числа.

Рассмотрим четыре возможных случая.

1. p – **целое положительное** число.

Тогда следует комбинацию $(a+bx^m)^p$ раскрыть по формуле бинома Ньютона, раскрыть скобки и проинтегрировать почленно.

2. p – **целое отрицательное** число.

Вспомним, что m и n – **рациональные** числа. Это значит, что они представимы в виде $n=\dfrac{s_1}{t_1}$, $m=\dfrac{s_2}{t_2}$. Пусть r есть **наименьшее общее кратное** чисел t_1 и t_2. Тогда $n=\dfrac{\bar{s}_1}{r}$, $m=\dfrac{\bar{s}_2}{r}$.

Теперь сделаем замену переменных $t=\sqrt[r]{x}$. Тогда получаем

$$x=t^r,\quad dx=rt^{r-1}dt,\quad x^n=t^{\bar{s}_1},\quad x^m=t^{\bar{s}_2}$$

и рассматриваемый интеграл принимает вид

$$I=\int t^{\bar{s}_1}(a+bt^{\bar{s}_2})^p rt^{r-1}dt,$$

и степени у t всюду целые числа и мы получили интеграл от дробно рациональной функции.

3. Комбинация $\frac{n+1}{m}$ – **целое** число.

Пусть $p = \frac{r}{s}$. Тогда надо сделать следующую замену переменных

$$t = \sqrt[s]{a + bx^m}$$

(обратите внимание, откуда в показателе корня взялось это s!).

А теперь проделаем аккуратно все выкладки. Сначала выразим x через t:

$$a + bx^m = t^s; \quad x = \left(\frac{t^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Теперь найдем dx

$$dx = \left(\frac{t^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{m}-1} \frac{st^{s-1}dt}{bm}$$

и подставим все это в изучаемый интеграл

$$I = \int x^n (a + bx^m)^p \, dx = \int \left(\frac{t^s - a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} \cdot t^r \cdot \left(\frac{t^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{m}-1} \cdot \frac{st^{s-1}dt}{mb} =$$

$$= \frac{s}{mb} \int t^{r+s-1} \left(\frac{t^s - a}{b}\right)^{\frac{n+1}{m}-1} dt.$$

Но $\dfrac{n+1}{m}$ – **целое** число! Все остальные степени также целые числа. Поэтому под знаком интеграла стоит дробно рациональная функция и интеграл вычисляется методом разложения подынтегральной функции на простейшие.

4. Комбинация $\dfrac{n+1}{m}+p$ – **целое** число.

Пусть снова $p=\dfrac{r}{s}$. Тогда надо сделать следующую замену переменных

$$t=\sqrt[s]{\frac{a}{x^m}+b}\,.$$

А теперь проделаем аккуратно все выкладки. Сначала выразим x через t:

$$\frac{a}{x^m}+b=t^s;\qquad x^m=\frac{a}{t^s-b}.$$

Дифференцируем **последнее соотношение**

$$mx^{m-1}dx=-\frac{ast^{s-1}}{(t^s-b)^2}dt\,.$$

Попытаемся переписать подынтегральное выражение так, чтобы в нем была явно видны комбинации, равные $mx^{m-1}dx$ и t:

$$I = \int x^n (a+bx^m)^p dx = \int x^{n+mp}\left(\frac{a}{x^m}+b\right)^p dx =$$

$$= \frac{1}{m}\int x^{n+mp-(m-1)}\left(\frac{a}{x^m}+b\right)^p \cdot mx^{m-1}dx =$$

Заметим теперь, что

$$x^{n+mp-(m-1)} = x^{n+mp-m+1} = (x^m)^{\frac{n+1}{m}+p-1} = \left(\frac{a}{t^s-b}\right)^{\frac{n+1}{m}+p-1},$$

так что, продолжая предыдущую строку, получаем

$$= -\frac{1}{m}\int\left(\frac{a}{t^s-b}\right)^{\frac{n+1}{m}+p-1} \cdot t^r \cdot \frac{ast^{s-1}}{(t^s-b)^2}dt.$$

Но $\dfrac{n+1}{m}+p$ – **целое** число. Все остальные степени также целые числа.