

Здравствуйте!

Лекция №5

Тип IV. Рассмотрим

$$I = \int \frac{(Mx + N)dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int \frac{\frac{M}{2}(2x + p) + (N - \frac{Mp}{2})}{(x^2 + px + q)^k} dx =$$
$$= \frac{M}{2} K + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) J_k,$$

где

$$K = \int \frac{(2x + p)dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{1}{(1-k)(x^2 + px + q)^{k-1}} + C,$$

$$J_k = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k}.$$

$$J_k = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k}.$$

Для вычисления J_k положим

$$a^2 = q - \frac{p^2}{4}, \quad t = x + \frac{p}{2}, \quad dx = dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(t^2 + a^2) - t^2}{(t^2 + a^2)^k} dt = \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} = J_{k-1} - \frac{1}{a^2} L, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L &= \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} = \int \frac{t(t dt)}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^k} = \\ &= -\frac{2}{2(k-1)} \int t d \left[\frac{1}{(t^2 + a^2)^{k-1}} \right]. \end{aligned}$$

$$L = -\frac{2}{2(k-1)} \int t d \left[\frac{1}{(t^2 + a^2)^{k-1}} \right].$$

Последний интеграл вычислим по частям, полагая

$$u = t, \quad v = \frac{1}{(t^2 + a^2)^{k-1}}.$$

В результате получим:

$$L = -\frac{1}{2(k-1)} \left[\frac{t}{(t^2 + a^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}} \right] = -\frac{1}{2(k-1)} \left[\frac{t}{(t^2 + a^2)^{k-1}} - J_{k-1} \right].$$

Подставляя полученное выражение в формулу для J_k , приходим к рекуррентной формуле

$$J_k = \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}J_{k-1}.$$

Так как

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C,$$

то рекуррентно можем вычислить J_2, J_3, \dots, J_k .

После подстановки J_k в I и замены t на $x + \frac{p}{2}$ получаем

окончательный результат.

$$I = \int \frac{(Mx + N)dx}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{M}{2}K + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)J_k,$$

$$K = \frac{1}{(1-k)(x^2 + px + q)^{k-1}} + C,$$

$$J_k = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k},$$

$$J_k = \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}J_{k-1},$$

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C,$$

$$t = x + \frac{p}{2}.$$

Интегралы от тригонометрических функций

Определение. Полиномом от двух переменных степени n называется выражение

$$P_n(x, y) = a_{00} + (a_{10}x + a_{01}y) + (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + \dots + \\ + (a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \dots + a_{0n}y^n).$$

(Обратите внимание, как индексы у коэффициентов a соотносятся со степенями x и y).

Пусть $P_n(x, y)$ $Q_m(x, y)$ – два полинома от двух переменных.

Функция $R(x, y) = \frac{Q_m(x, y)}{P_n(x, y)}$ называется дробно рациональной

функцией двух переменных.

В этом разделе будут рассмотрены вопросы вычисления интегралов вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx.$$

Универсальная подстановка

Эта подстановка имеет вид $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Докажем, что она приводит рассматриваемый класс интегралов к интегралам от дробно рациональных функций. Имеем:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2 \cdot \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

В результате рассматриваемый интеграл принимает вид

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

и он является интегралом от дробно рациональной функции, который вычисляется при помощи разложения на простейшие.

Упрощенные подстановки

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

Чтобы изложение дальнейшего было короче, будем писать u вместо $\sin x$ и v вместо $\cos x$. Тогда условие применимости первой упрощенной подстановки примет вид $R(-u, v) = -R(u, v)$.

Но в нашей формуле, определяющей функцию $R(u, v)$ и в числителе и в знаменателе стоят полиномы по переменным u и v . Когда же функция $R(u, v)$ будет нечетной функцией по переменной u ? Легко догадаться, что это будет тогда, когда сомножитель u можно вынести за скобки и, после этого, в числителе и знаменателе останутся лишь полиномы от переменной u^2 , то есть тогда, когда функция $R(u, v)$ может быть приведена к виду $R(u, v) = u \cdot R_1(u^2, v)$.

Это условие и определяет первую упрощенную подстановку.
Она имеет вид

$$t = \cos x.$$

Тогда $dt = -\sin x dx$ и мы имеем

$$\begin{aligned} \int R(\sin x, \cos x) dx &= \int \sin x \cdot R_1(\sin^2 x, \cos x) dx = \\ &= \int \sin x \cdot R_1(1 - \cos^2 x, \cos x) dx = -\int R_1(1 - t^2, t) dt \end{aligned}$$

и мы получили интеграл от дробно рациональной функции.

2. Условие применимости второй упрощенной подстановки имеет вид

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

Повторяя почти дословно все рассуждения, касающиеся первой упрощенной подстановки, можно получить, что в этом случае функция $R(u, v)$ может быть приведена к виду $R(u, v) = v \cdot R_1(u, v^2)$.

Вторая упрощенная подстановка имеет вид $t = \sin x$. Тогда $dt = \cos x dx$ и мы имеем

$$\begin{aligned} \int R(\sin x, \cos x) dx &= \int \cos x \cdot R_1(\sin x, \cos^2 x) dx = \\ &= \int \cos x \cdot R_1(\sin x, 1 - \sin^2 x) dx = \int R_1(t, 1 - t^2) dt \end{aligned}$$

и мы получили интеграл от дробно рациональной функции.

3. Условие применимости третьей упрощенной подстановки имеет вид

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

Попытаемся сообразить, что это дает относительно вида функции $R(u, v)$. Прежде всего имеем

$$R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Тогда условие применимости третьей упрощенной подстановки дает

$$R(-u, -v) = R_1\left(\frac{-u}{-v}, -v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R(u, v) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Используя те же рассуждения, что и выше, легко догадаться, что второй аргумент у $R_1\left(\frac{u}{v}, v\right)$ должен содержать только **четные**

степени v . Поэтому $R(u, v) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_2\left(\frac{u}{v}, v^2\right)$, и

$$R(\sin x, \cos x) = R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x).$$

Это и определяет третью упрощенную подстановку. Она имеет вид $t = \operatorname{tg} x$. Действительно, в этом случае

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

и наш интеграл принимает вид

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x) dx = \int R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}$$

и мы получили интеграл от дробно рациональной функции.

Вычисление интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{Ax+B}}\right) dx$

Рассмотрим вычисление интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{Ax+B}}\right) dx$ при

условии $\frac{a}{A} \neq \frac{b}{B}$.

Все, что здесь надо запомнить – это то, какую замену переменных (подстановку) здесь нужно сделать, а именно

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{Ax+B}}.$$

Дальше все идет само собой. Выражаем x через t

$$\frac{ax+b}{Ax+B} = t^m, \quad ax+b = Axt^m + Bt^m, \quad x = \frac{b - Bt^m}{At^m - a},$$

и самое неприятное – корень – исчез.

Далее имеем

$$\begin{aligned} dx &= \frac{-Bmt^{m-1}(At^m - a) - Amt^{m-1}(b - Bt^m)}{(At^m - a)^2} dt = \\ &= mt^{m-1} \frac{aB - bA}{(At^m - a)^2} dt. \end{aligned}$$

Заметим, что $aB - bA \neq 0$.

Окончательно получаем

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax + b}{Ax + B}}\right) dx = m(aB - bA) \int R\left(\frac{b - Bt^m}{At^m - a}, t\right) \frac{t^{m-1} dt}{(At^m - a)^2},$$

и мы получили интеграл от дробно рациональной функции.

Вычисление интегралов вида $\int x^n (a + bx^m)^p dx$

Рассмотрим теперь вычисление интегралов вида $I = \int x^n (a + bx^m)^p dx$, где m , n , и p – **рациональные** числа.

Рассмотрим четыре возможных случая.

1. p – **целое положительное** число.

Тогда следует комбинацию $(a + bx^m)^p$ раскрыть по формуле бинома Ньютона, раскрыть скобки и проинтегрировать почленно.

2. p – целое отрицательное число.

Вспомним, что m и n – **рациональные** числа. Это значит, что они представимы в виде $n = \frac{s_1}{t_1}$, $m = \frac{s_2}{t_2}$. Пусть r есть **наименьшее общее кратное** чисел t_1 и t_2 . Тогда $n = \frac{\bar{s}_1}{r}$, $m = \frac{\bar{s}_2}{r}$.

Теперь сделаем замену переменных $t = \sqrt[r]{x}$. Тогда получаем

$$x = t^r, \quad dx = rt^{r-1} dt, \quad x^n = t^{\bar{s}_1}, \quad x^m = t^{\bar{s}_2}$$

и рассматриваемый интеграл принимает вид

$$I = \int t^{\bar{s}_1} (a + bt^{\bar{s}_2})^p rt^{r-1} dt,$$

и степени у t всюду целые числа и мы получили интеграл от дробно рациональной функции.

3. Комбинация $\frac{n+1}{m}$ – **целое** число.

Пусть $p = \frac{r}{s}$. Тогда надо сделать следующую замену переменных

$$t = \sqrt[s]{a + bx^m}$$

(обратите внимание, откуда в показателе корня взялось это $s!$).

А теперь проделаем аккуратно все выкладки. Сначала выразим x через t :

$$a + bx^m = t^s; \quad x = \left(\frac{t^s - a}{b} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Теперь найдем dx

$$dx = \left(\frac{t^s - a}{b} \right)^{\frac{1}{m}-1} \frac{st^{s-1} dt}{bm}$$

и подставим все это в изучаемый интеграл

$$\begin{aligned} I &= \int x^n (a + bx^m)^p dx = \int \left(\frac{t^s - a}{b} \right)^{\frac{n}{m}} t^r \cdot \left(\frac{t^s - a}{b} \right)^{\frac{1}{m}-1} \cdot \frac{st^{s-1} dt}{mb} = \\ &= \frac{s}{mb} \int t^{r+s-1} \left(\frac{t^s - a}{b} \right)^{\frac{n+1}{m}-1} dt. \end{aligned}$$

Но $\frac{n+1}{m}$ – **целое** число! Все остальные степени также целые числа. Поэтому под знаком интеграла стоит дробно рациональная функция и интеграл вычисляется методом разложения подынтегральной функции на простейшие.

4. Комбинация $\frac{n+1}{m} + p$ – **целое** число.

Пусть снова $p = \frac{r}{s}$. Тогда надо сделать следующую замену переменных

$$t = \sqrt[s]{\frac{a}{x^m} + b}.$$

А теперь сделаем аккуратно все выкладки. Сначала выразим x через t :

$$\frac{a}{x^m} + b = t^s; \quad x^m = \frac{a}{t^s - b}.$$

Дифференцируем **последнее соотношение**

$$mx^{m-1}dx = -\frac{ast^{s-1}}{(t^s - b)^2}dt.$$

Попробуем переписать подынтегральное выражение так, чтобы в нем были явно видны комбинации, равные $mx^{m-1}dx$ и t :

$$\begin{aligned} I &= \int x^n (a + bx^m)^p dx = \int x^{n+mp} \left(\frac{a}{x^m} + b \right)^p dx = \\ &= \frac{1}{m} \int x^{n+mp-(m-1)} \left(\frac{a}{x^m} + b \right)^p \cdot mx^{m-1} dx = \end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$x^{n+mp-(m-1)} = x^{n+mp-m+1} = (x^m)^{\frac{n+1}{m}+p-1} = \left(\frac{a}{t^s - b} \right)^{\frac{n+1}{m}+p-1},$$

так что, продолжая предыдущую строку, получаем

$$= -\frac{1}{m} \int \left(\frac{a}{t^s - b} \right)^{\frac{n+1}{m}+p-1} \cdot t^r \cdot \frac{ast^{s-1}}{(t^s - b)^2} dt.$$

Но $\frac{n+1}{m} + p$ — **целое** число. Все остальные степени также целые числа.