Вычисление производных. Формулы дифференцирования

Формулы дифференцирования:

- $(C)' = 0$

$(x)' = 1$

$(kx + m)' = k$

$(x^2)' = 2x$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Пример:

Найти значение производной функции $y = 3x + 5$ в точке $x = 4$.

Решение:

$(kx + m)' = k$

$k = 3$

$m =$

$(\qquad\qquad)' =$

$f'(4) = 3$

Ответ: 3.

Пример:

Найти значение производной $y = x^2$ в точке $x = -1$.

Решение:

$(x^2)' = \boldsymbol{2x}$

$f'(x) =$

$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$

Ответ: -2.

Формулы дифференцирования:

- $(C)' = 0$
- $(x)' = 1$
- $(kx + m)' = k$
- $(x^2)' = 2x$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$

Пример:

Найти производную $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 4$.

Решение:

$$(\sqrt{x})' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{x}}}$$

$$f'(x) =$$

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример:

Найти значение производной функции $y = cos\, x$ в точке $x = \frac{\pi}{6}$.

Решение:

$(cos\, x)' = \boldsymbol{-sin\, x}$

$f'(x) =$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Правила дифференцирования

Производная суммы

$$(C)' = 0$$
$$(x)' = 1$$
$$(kx + m)' = k$$
$$(x^2)' = 2x$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$3x + 5$$

$$3$$

$$5$$

$$2x$$

2. Найдем разностное отношение.

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Найти производную $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 4$.

Решение:

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) =$

$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Лемма:

- $$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Постоянный множитель

Найти значение производной функции $y = \cos x$ в точке $x = \frac{\pi}{6}$.

Решение:

$(\cos x)' = -\sin x$

$f'(x) =$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Производная произведения

— sin x

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Доказательство:

1. Приращение в точке x_0:

$$\Delta(uv) = u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) = \overbrace{\big(u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}^{\Delta u} + u(x_0)\big) \times$$

$$\times \underbrace{\big(v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}_{\Delta v} + v(x_0)\big) - u(x_0)v(x_0) = \big(\Delta u + u(x_0)\big)\big(\Delta v + v(x_0)\big) - u(x_0)v(x_0) =$$

$$= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0) + u(x_0)v(x_0) - u(x_0)v(x_0) =$$

$$= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0)$$

2. Вычислим разностное отношение:

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

3. Найдем производную:

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u(x_0)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0}\Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u \cdot v' + v \cdot u' + 0 \cdot v' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Пример:

Найти производную функции $f(x) = (5x + 1)(x - 3)$

Решение:

$(u + v)' = u' + v'$ $(cu)' = c \cdot u'$ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$u = 5x + 1$

$v = x - 3$

$u' = (5x)' + 1' = 5x' + 1' = 5 \cdot 1 + 0 = 5$

$v' = x' - 3' = 1 + 0 = 1$

$f'(x) = 5 \cdot (x - 3) + (5x + 1) \cdot 1 = 5x - 15 + 5x + 1 = 10x - 14$

Ответ: $f'(x) = 10x - 14.$

Производная частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Доказательство:

Выведем формулу $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$:

1. Найдем приращение функции $\frac{1}{v}$:

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{1}{v(x_0)} = \frac{\overbrace{v(x_0)-v(x_0+\Delta x)}^{-\Delta v}}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)} = -\frac{\Delta v}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)}$$

2. Определим разностное отношение: $\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)}$

3. Найдем производную функции:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)} = \frac{-\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)\right)} = -\frac{v'}{v \cdot v} = -\frac{v'}{v^2}$$

Воспользуемся правилом нахождения производной произведения функций.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} + u \cdot \frac{-v'}{v^2} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Пример:

Найти производную функции $F(x) = \frac{2x+1}{x+5}$.

Решение:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$u = 2x + 1 \Rightarrow u' = 2$$

$$v = x + 5 \Rightarrow v' = 1$$

$$F'(x) = \frac{2 \cdot (x+5) - 1 \cdot (2x+1)}{(x+5)^2} = \frac{2x + 10 - 2x - 1}{(x+5)^2} = \frac{9}{(x+5)^2}$$

Ответ: $F'(x) = \frac{9}{(x+5)^2}$.

Докажем, что $(x^n)' = nx^{n-1}$ для любого n и $x > 0$

Известно, что $x' = 1$. Используя правило нахождения производной произведения функций, найдем производные функций:

$(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$

$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x' = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 3x^2$

$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot x' = 3x^2 \cdot x + 1 \cdot x^3 = 4x^3$

Докажем, что формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ справедлива и при других значениях n.

Метод математической индукции

$n = k - 1, \left(x^{k-1}\right)' = (k-1)x^{k-2}$

$n = k, \left(x^k\right)' = \left(x^{k-1} \cdot x\right)' = \left(x^{k-1}\right)' \cdot x + x^k \cdot x' = (k-1)x^{k-2} \cdot x +$

$+x^{k-1} = k \cdot x^{k-1}$

Пример:

Найти производную функции $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$.

Решение:

$(u + v)' = u' + v' \qquad (x^n)' = nx^{n-1}$

$f'(x) = (x^3)' - (x^2)' + x' - 3' = 3x^2 - 2x + 1$

Ответ: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

$(C)' = 0$
$(x)' = 1$
$(kx + m)' = k$
$(x^2)' = 2x$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$$\left(e^{kx}\right)' = ke^{kx}$$

$3 \qquad 5 \qquad 3x + 5$

3

Решение:
$(x^2)' = 2x$
$f'(x) =$
$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$

Ответ: -2.

$2x$

VIDEOUROKI.NET

Пример:

$(C)' = 0$

$(x)' = 1$

$(kx + m)' = k$

$(x^2)' = 2x$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

VIDEOUROKI.NET

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Найти значение производной функции $y = cos\ x$ в точке $x = \frac{\pi}{6}$.

Решение:

$(cos\ x)' = -\ sin\ x$

$f'(x) =$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\ sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Решение:

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) =$

$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

$$-\ sin\ x$$

Доказательство:

1. Приращение в точке x_0:

$\Delta(uv) = u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) = \big(u(x_0 + \Delta x) - u(x_0) + u(x_0)\big) \times$
$\times \big(v(x_0 + \Delta x) - v(x_0) + v(x_0)\big) - u(x_0)v(x_0) = \big(\Delta u + u(x_0)\big)\big(\Delta v + v(x_0)\big) - u(x_0)v(x_0) =$
$= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0) + u(x_0)v(x_0) - u(x_0)v(x_0) =$
$= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0)$

2. Вычислим разностное отношение:

$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$

3. Найдем производную:

$(uv)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u(x_0)\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} +$

$+ \lim\limits_{\Delta x \to 0}\Delta u \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u \cdot v' + v \cdot u' + 0 \cdot v' = u' \cdot v + u \cdot v'$

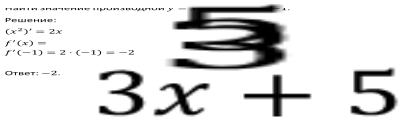
VIDEOUROKI.NET

Пример:

-

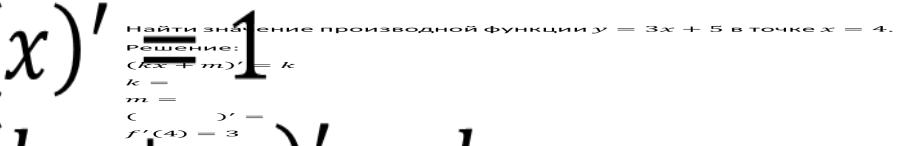
VIDEOUROKI.NET

Упражнение:



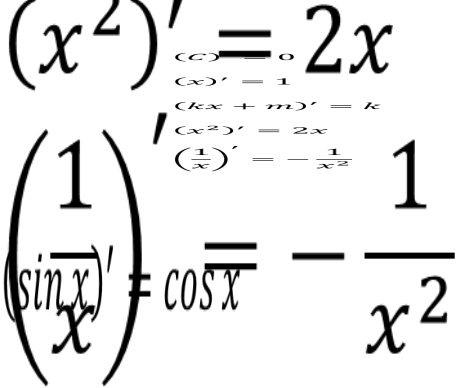
$$(C)' = 0$$

$$(x)' = 1$$



$$(kx + m)' = k$$

$$(x^2)' = 2x$$



$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Выведем формулу $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$:

1. Найдем приращение функции $\frac{1}{v}$:

$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{1}{v(x_0)} = \frac{v(x_0)-v(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)} = -\frac{\Delta v}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)}$

2. Определим разностное отношение: $\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)}$

3. Найдем производную функции:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

VIDEOUROKI.NET

Основные правила:

- ✓ $(u+v)' = u' + v'$
- ✓ $(cu)' = c \cdot u'$
- ✓ $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
- ✓ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- ✓ $(x^n)' = nx^{n-1}$

Производные основных функций:

- $$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(sin\,x)' = cos\,x$$

$$(cos\,x)' = -sin\,x$$

Найти производную $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 4$.

Решение:

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) =$

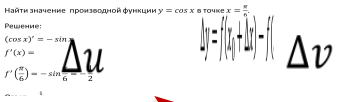
$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

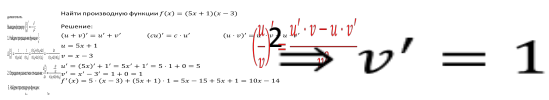
Ответ: $\frac{1}{4}$.

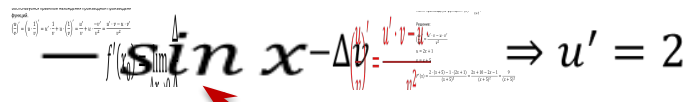
$$(cos\,x)' = -sin\,x$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Дифференцирование функции $y = f(kx + m)$







линейная функция

линейная функция

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

доказательство:
1. Приращение в точке x_0:
$\Delta(uv) = u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) = (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0) + u(x_0)) \times$
$\times (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0) + v(x_0)) - u(x_0)v(x_0) = (\Delta u + u(x_0))(\Delta v + v(x_0)) - u(x_0)v(x_0) =$
$= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0) + u(x_0)v(x_0) - u(x_0)v(x_0) =$
$= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0)$
2. Вычислим разностное отношение:
$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta v\frac{\Delta v}{\Delta x}$
3. Найдем производную:
$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u(x_0)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} +$

$$\left((kx+m)^n\right)' = kn(kx+m)^{n-1}$$

Докажем, что $(x^n)' = nx^{n-1}$
Известно, что $x' = 1$. Используя правило нахождения производной произведения функций, найдем производные функций:
$(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$
$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x' = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 3x^2$
$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot x' = 3x^2 \cdot x + 1 \cdot x^3 = 4x^3$
Докажем, что формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ справедлива и при других значениях n.

Метод математической индукции

$n = k-1, (x^{k-1})' = (k-1)x^{k-2}$
$n = k, (x^k)' = (x^{k-1} \cdot x)' = (x^{k-1})' \cdot x + x^k \cdot x' = (k-1)x^{k-2} \cdot x + +x^{k-1} = k \cdot x^{k-1}$

для любого n и $x > 0$

Найти производную функции $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$.
Решение:
$(u+v)' = u' + v'$ $(x^n)' = nx^{n-1}$
$f'(x) = (x^3)' - (x^2)' + x' - 3' = 3x^2 - 2x + 1$

Ответ: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

$$(cos(kx+m))' = -k \cdot sin(kx+m)$$

$$(tg(kx+m))' = \frac{k}{cos^2(kx+m)}$$

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(cu)' = c \cdot u'$
- $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$

Пример:

- $$(\sqrt{x})' = \frac{1}{(\sin x)' = \cos x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

VIDEOUROKI.NET

Пример:

-

VIDEOUROKI.NET

Пример: $(f(kx+m))' = kf'(kx+m)$

Найти значения аргумента, удовлетворяющие условию $f'(x) = g'(x)$, если:
$f(x) = \boldsymbol{sin}(\boldsymbol{2x-3})$, $g(x) = \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{2x-3})$.

Решение:

$f'(x) = 2\,\boldsymbol{cos}(2x-3)$

$g'(x) = -2\,\boldsymbol{sin}(2x-3)$

$=$

$cos(2x-3) \neq 0$

$-1 = tg\,(2x-3)$

$2x-3 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

$2x = 3 - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

$x = 1{,}5 - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

$cos(2x-3) = 0 \Rightarrow 2x-3 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Ответ: $x = 1{,}5 - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

Пример:

Найти значения аргумента, удовлетворяющие условию $f'(x) = g'(x)$, если:

$f(x) = 2\sqrt{3x-10}$, $g(x) = 2\sqrt{14+6x}$.

ОДЗ: $3x - 10 > 0$, $14 + 6x > 0$

$3x > 10$, $6x > -14$

$x > 3\frac{1}{3}$, $x > -2\frac{1}{3}$

$x > 3\frac{1}{3}$

Решение:

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-10}}$$

$$g'(x) = \frac{}{} = \frac{3}{\sqrt{14+6x}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x-10} = \sqrt{14+6x} \Leftrightarrow 4(3x-10) = 14+6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x - 40 = 14 + 6x \Leftrightarrow 6x = 54 \Leftrightarrow x = 9$$

Ответ: $x = 9$.