Вычисление производных. Формулы дифференцирования

Формулы дифференцирования:

- $(C)' = 0$

$(x)' = 1$

$(kx + m)' = k$

$(x^2)' = 2x$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Пример:

Найти значение производной функции $y = \mathbf{3x + 5}$ в точке $x = 4$.

Решение:

$(kx + m)' = k$

$k = 3$

$m =$

$(\qquad\qquad)' =$

$f'(4) = 3$

Ответ: 3.

Пример:

- Найти значение производной $y = x^2$ в точке $x = -1$.

Решение:

$(x^2)' = \boldsymbol{2x}$

$f'(x) =$

$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$

Ответ: -2.

Формулы дифференцирования:

- $(C)' = 0$

$(x)' = 1$

$(kx + m)' = k$

$(x^2)' = 2x$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$(sin\, x)' = cos\, x$

$(cos\, x)' = -sin\, x$

Пример:

- Найти производную $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 4$.

Решение:

$$(\sqrt{x})' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{x}}}$$

$$f'(x) =$$

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример:

- Найти значение производной функции $y = cos\,x$ в точке $x = \frac{\pi}{6}$.

Решение:

$(cos\,x)' = \boldsymbol{-sin\,x}$

$f'(x) =$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Правила дифференцирования

Производная суммы

Решение:

$(kx+m)' = k$

$k =$

$m =$

$(\qquad)' =$

$$(C)' = 0$$
$$(x)' = 1$$
$$(kx+m)' = k$$
$$(x^2)' = 2x$$
$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\underbrace{3x + 5}$$

Решение:

$f'(x) =$

$f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 5 =$

Ответ: -2

$(C)' = 0$

$(x)' = 1$

$(kx+m)' = k$

$(x^2)' = 2x$

$\left(\frac{1}{x^3}\right)' =$

$$\underbrace{3 \qquad 5 \qquad 2x}$$

2. Найдем разностное отношение:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Найти производную $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 4$.

Решение:

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) =$

$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Лемма:

- $$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Постоянный множитель

Найти значение производной функции $y = \cos x$ в точке $x = \frac{\pi}{6}$.

Решение:

$(\cos x)' = -\sin x$

$f'(x) =$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Производная произведения

$$\text{— } \sin x \qquad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Доказательство:

1. Приращение в точке x_0:

$$\Delta(uv) = u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) = \overbrace{\big(u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}^{\Delta u} + u(x_0)\big) \times$$

$$\times \big(v(x_0 + \Delta x) - v(x_0) + v(x_0)\big) - u(x_0)v(x_0) = \big(\Delta u + u(x_0)\big)\big(\Delta v + v(x_0)\big) - u(x_0)v(x_0) =$$

$$= \Delta u \cdot \underbrace{\Delta v + \Delta u \cdot v(x_0)}_{\Delta v} + \Delta v \cdot u(x_0) + u(x_0)v(x_0) - u(x_0)v(x_0) =$$

$$= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0)$$

2. Вычислим разностное отношение:

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

3. Найдем производную:

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u(x_0)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0}\Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u \cdot v' + v \cdot u' + 0 \cdot v' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Пример:

- Найти производную функции $f(x) = (5x + 1)(x - 3)$

Решение:

$(u + v)' = u' + v'$ $\quad$ $(cu)' = c \cdot u'$ $\quad$ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$u = 5x + 1$

$v = x - 3$

$u' = (5x)' + 1' = 5x' + 1' = 5 \cdot 1 + 0 = 5$

$v' = x' - 3' = 1 + 0 = 1$

$f'(x) = 5 \cdot (x - 3) + (5x + 1) \cdot 1 = 5x - 15 + 5x + 1 = 10x - 14$

Ответ: $f'(x) = 10x - 14$.

Производная частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Доказательство:

Выведем формулу $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$:

1. Найдем приращение функции $\frac{1}{v}$:

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{1}{v(x_0)} = \frac{\overbrace{v(x_0)-v(x_0+\Delta x)}^{-\Delta v}}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)} = -\frac{\Delta v}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)}$$

2. Определим разностное отношение: $\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)}$

3. Найдем производную функции:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0)} = \frac{-\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(v(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0)\right)} = -\frac{v'}{v \cdot v} = -\frac{v'}{v^2}$$

- Воспользуемся правилом нахождения производной произведения функций.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} + u \cdot \frac{-v'}{v^2} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Пример:

- Найти производную функции $F(x) = \frac{2x+1}{x+5}$.

Решение:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$u = 2x + 1 \Rightarrow u' = 2$$

$$v = x + 5 \Rightarrow v' = 1$$

$$F'(x) = \frac{2 \cdot (x+5) - 1 \cdot (2x+1)}{(x+5)^2} = \frac{2x + 10 - 2x - 1}{(x+5)^2} = \frac{9}{(x+5)^2}$$

Ответ: $F'(x) = \frac{9}{(x+5)^2}$.

Докажем, что $(x^n)' = nx^{n-1}$ для любого n и $x > 0$

Известно, что $x' = 1$. Используя правило нахождения производной произведения функций, найдем производные функций:

$(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$

$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x' = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 3x^2$

$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot x' = 3x^2 \cdot x + 1 \cdot x^3 = 4x^3$

Докажем, что формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ справедлива и при других значениях n.

Метод математической индукции

$n = k - 1, \left(x^{k-1}\right)' = (k-1)x^{k-2}$

$n = k, \left(x^k\right)' = \left(x^{k-1} \cdot x\right)' = \left(x^{k-1}\right)' \cdot x + x^k \cdot x' = (k-1)x^{k-2} \cdot x +$
$+x^{k-1} = k \cdot x^{k-1}$

Пример:

Найти производную функции $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$.

Решение:

$(u + v)' = u' + v'$ $\qquad$ $(x^n)' = nx^{n-1}$

$f'(x) = (x^3)' - (x^2)' + x' - 3' = 3x^2 - 2x + 1$

Ответ: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

$(c)' = 0$
$(x)' = 1$
$(kx + m)' = k$
$(x^2)' = 2x$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$$\left(e^{kx}\right)' = ke^{kx}$$

3 5 $3x + 5$

3

Решение:
$(x^2)' = 2x$
$f'(x) =$
$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$

Ответ: -2.

$$\boxed{2x}$$

VIDEOUROKI.NET

Пример:

$$(C)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(kx + m)' = k$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

VIDEOUROKI.NET

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Найти значение производной функции $y = \cos x$ в точке $x = \frac{\pi}{6}$.

Решение:

$(\cos x)' = -\sin x$

$f'(x) =$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Решение:

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) =$

$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$-\sin x$$

Доказательство:

1. Приращение в точке x_0:

$\Delta(uv) = u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) = \big(u(x_0 + \Delta x) - u(x_0) + u(x_0)\big) \times$
$\times \big(v(x_0 + \Delta x) - v(x_0) + v(x_0)\big) - u(x_0)v(x_0) = \big(\Delta u + u(x_0)\big)\big(\Delta v + v(x_0)\big) - u(x_0)v(x_0) =$
$= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0) + u(x_0)v(x_0) - u(x_0)v(x_0) =$
$= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0)$

2. Вычислим разностное отношение:

$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$

3. Найдем производную:

$(uv)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u(x_0)\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} +$
$+ \lim\limits_{\Delta x \to 0}\Delta u \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u \cdot v' + v \cdot u' + 0 \cdot v' = u' \cdot v + u \cdot v'$

VIDEOUROKI.NET

Пример:

- $$\Delta u$$

VIDEOUROKI.NET

Упражнение:

Найти значение производной функции $y = 3x + 5$ в точке $x = 4$.

Решение:

$(x^2)' = 2x$

$f'(x) =$

$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$

Ответ: -2.

$$3x + 5$$

$$(C)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

Найти значение производной функции $y = 3x + 5$ в точке $x = 4$.

Решение:

$(kx + m)' = k$

$k =$

$m =$

$(\qquad)' =$

$f'(4) = 3$

Ответ: 3.

$$3 \qquad 2x$$

$$(kx + m)' = k$$

$$(x^2)' = 2x$$

$(C)' = 0$

$(x)' = 1$

$(kx + m)' = k$

$(x^2)' = 2x$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Выведем формулу $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$:

1. Найдем приращение функции $\frac{1}{v}$:

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{1}{v(x_0)} = \frac{v(x_0) - v(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)} = -\frac{\Delta v}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)}$$

2. Определим разностное отношение: $\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)}$

3. Найдем производную функции:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

VIDEOUROKI.NET

Основные правила:

- ✓ $(u+v)' = u' + v'$
- ✓ $(cu)' = c \cdot u'$
- ✓ $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
- ✓ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- ✓ $(x^n)' = nx^{n-1}$

Производные основных функций:

- $$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Найти производную $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 4$.

Решение:

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) =$

$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Дифференцирование функции $y = f(kx + m)$

Найти значение производной функции $y = \cos x$ в точке $x = \frac{\pi}{6}$

Решение:

$(\cos x)' = -\sin x$

$f'(x) =$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Δu

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Δv

Найти производную функции $f(x) = (5x + 1)(x - 3)$

Решение:

$(u + v)' = u' + v'$ $\quad (cu)' = c \cdot u'$ $\quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$u = 5x + 1$

$v' = x - 3$

$(5x)' + 1' = 5x' + 1' = 5 \cdot 1 + 0 = 5$

$x' - 3' = 1 + 0 = 1$

$f'(x) = 5 \cdot (x - 3) + (5x + 1) \cdot 1 = 5x - 15 + 5x + 1 = 10x - 14$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\Rightarrow v' = 1$

линейная функция

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Δv

Δu

$\Rightarrow u' = 2$

линейная функция

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

доказательство:

1. Приращение в точке x_0:

$\Delta(uv) = u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) = (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0) + u(x_0)) \times$
$\times (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0) + v(x_0)) - u(x_0)v(x_0) = (\Delta u + u(x_0))(\Delta v + v(x_0)) - u(x_0)v(x_0) =$
$= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0) + u(x_0)v(x_0) - u(x_0)v(x_0) =$
$= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0)$

2. Вычислим разностное отношение:

$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$

3. Найдем производную:

$(uv)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u(x_0)\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} +$

$$\left((kx+m)^n\right)' = kn(kx+m)^{n-1}$$

Докажем, что $(x^n)' = nx^{n-1}$

Известно, что $x' = 1$. Используя правило нахождения производной произведения функций, найдем производные функций:

$(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$

$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x' = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 3x^2$

$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot x' = 3x^2 \cdot x + 1 \cdot x^3 = 4x^3$

Докажем, что формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ справедлива и при других значениях n.

Метод математической индукции

$n = k - 1, (x^{k-1})' = (k-1)x^{k-2}$

$n = k, (x^k)' = (x^{k-1} \cdot x)' = (x^{k-1})' \cdot x + x^k \cdot x' = (k-1)x^{k-2} \cdot x +$
$+ x^{k-1} = k \cdot x^{k-1}$

для любого n и $x > 0$

Найти производную функции $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$.

Решение:

$(u+v)' = u' + v'$ $\quad (x^n)' = nx^{n-1}$

$f'(x) = (x^3)' - (x^2)' + x' - 3' = 3x^2 - 2x + 1$

Ответ: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

$$(cos(kx+m))' = -k \cdot sin(kx+m)$$

$$(tg(kx+m))' = \frac{k}{cos^2(kx+m)}$$

- ✓ $(u+v)' = u' + v'$
- ✓ $(cu)' = c \cdot u'$
- ✓ $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
- ✓ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- ✓ $(x^n)' = nx^{n-1}$

Пример:

- $$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$(\sin x)' = \cos x$

VIDEOUROKI.NET

Пример:

- Δv

VIDEOUROKI.NET

Пример: $(f(kx+m))' = kf'(kx+m)$

Найти значения аргумента, удовлетворяющие условию $f'(x) = g'(x)$, если:
$f(x) = \boldsymbol{sin}(\boldsymbol{2x-3})$, $g(x) = \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{2x-3})$.

Решение:

$f'(x) = 2\,\boldsymbol{cos}(2x-3)$

$g'(x) = -2\,\boldsymbol{sin}(2x-3)$

$=$

$cos(2x-3) \neq 0$

$-1 = tg\,(2x-3)$

$2x-3 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

$2x = 3 - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

$x = 1{,}5 - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

$cos(2x-3) = 0 \Rightarrow 2x-3 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Ответ: $x = 1{,}5 - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

Пример:

- Найти значения аргумента, удовлетворяющие условию $f'(x) = g'(x)$, если:

$f(x) = 2\sqrt{3x - 10}$, $g(x) = 2\sqrt{14 + 6x}$.

ОДЗ: $3x - 10 > 0$, $\quad 14 + 6x > 0$

$3x > 10$, $\quad 6x > -14$

$x > 3\frac{1}{3}$, $\quad x > -2\frac{1}{3}$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{x > 3\frac{1}{3}}$$

Решение:

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 10}}$$

$$g'(x) = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{3}{\sqrt{14 + 6x}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x - 10} = \sqrt{14 + 6x} \Leftrightarrow 4(3x - 10) = 14 + 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x - 40 = 14 + 6x \Leftrightarrow 6x = 54 \Leftrightarrow x = 9$$

Ответ: $x = 9$.