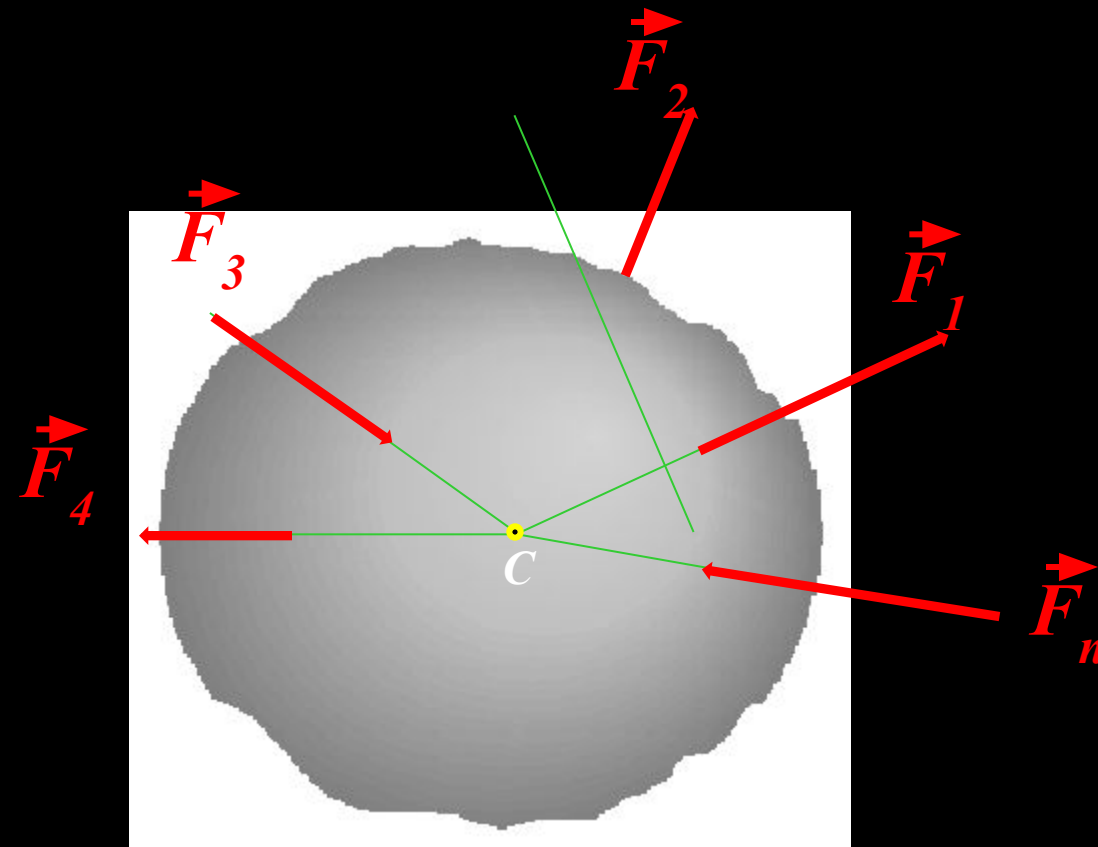


СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

1. Определения

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется **системой сходящихся сил (ССС)**.

Точка пересечения линий действия всех сил системы называется **центром системы сходящихся сил**.

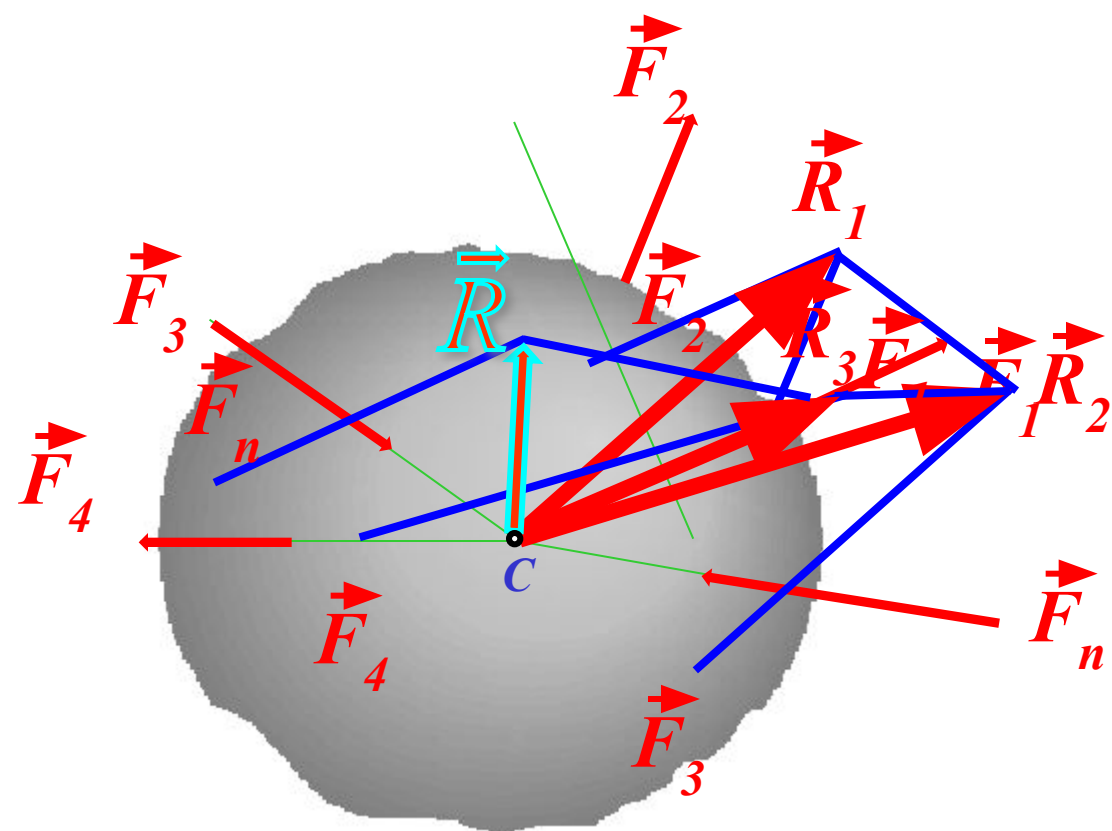


СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

2. РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Система сходящихся сил всегда имеет РАВНОДЕЙСТВУЮЩУЮ.

На основании 4-й аксиомы и 1-го следствия из 2-й аксиомы, приведение системы сходящихся сил к простейшей (к одной силе – РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ) осуществляется последовательным сложением пар векторов (формальное сложение векторов по правилу параллелограмма или многоугольника).



$$\{F_1, \dots, F_n\} \in \mathbb{R}; \mathbf{R} = \sum_{i=1}^n F_i - \text{главный вектор системы}$$

Проекция главного вектора на оси координат:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{x_i}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{y_i}; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{z_i}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}$$

Система сходящихся сил

3. Условия равновесия системы сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы **силовой многоугольник был замкнутым**. Это означает равенство нулю главного вектора, а значит, и равнодействующей.

$$\vec{R} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

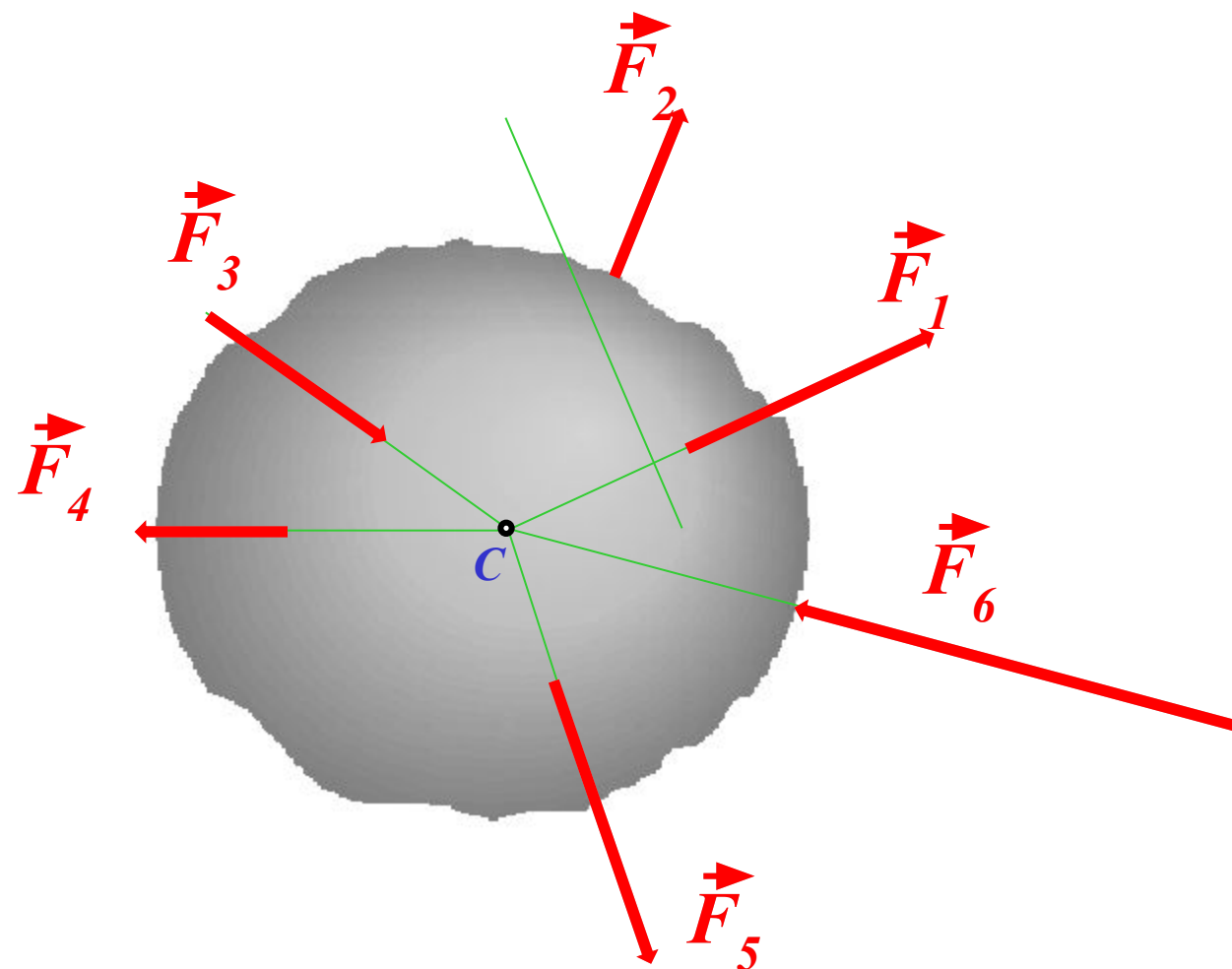
В проекциях на координатные оси:

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0;$$

Условия равновесия системы:

В векторной форме: главный вектор системы должен быть равен нулю

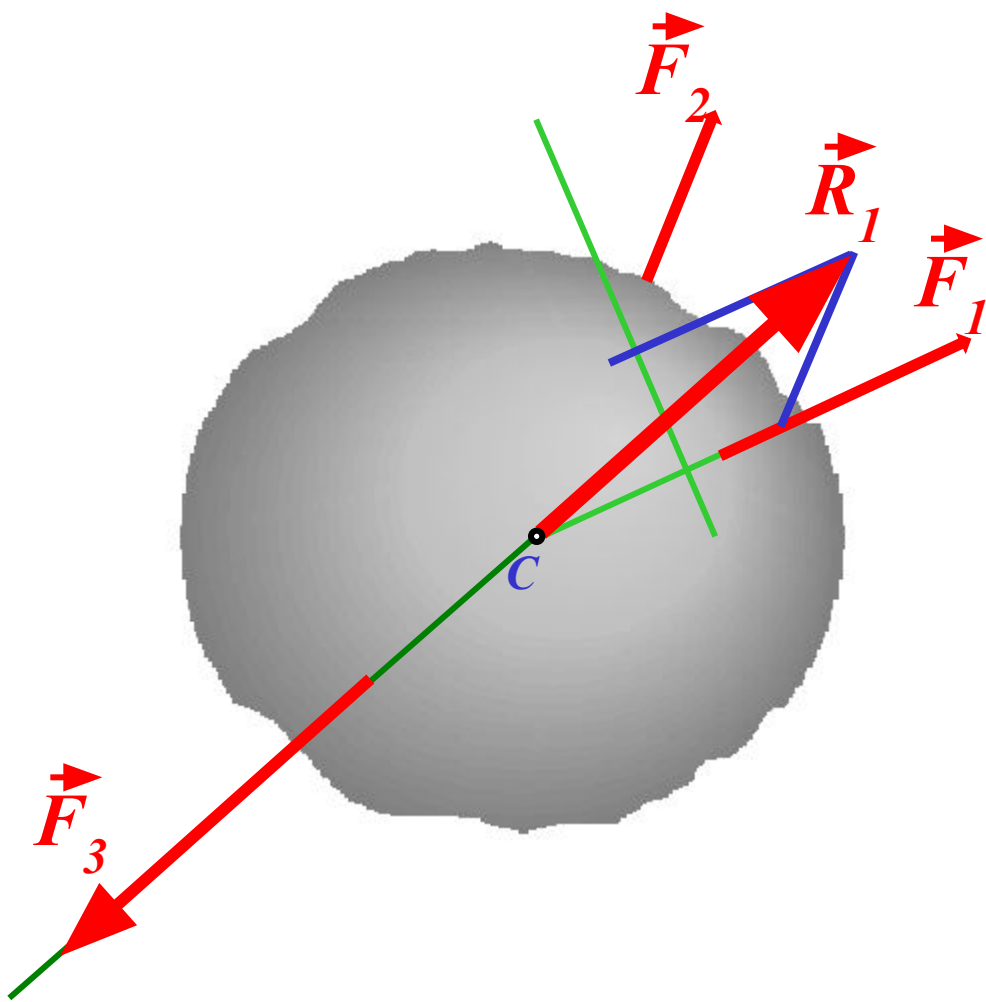
В алгебраической форме: сумма проекций всех сил на каждую ось координат равнялась нулю



Система сходящихся сил

4. Теорема о трех силах

Если система из трех непараллельных сил находится в равновесии, то линии их действия пересекаются в одной точке и силы располагаются в одной плоскости.



$$\vec{R}_1 \in \{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}; \quad \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\} \in \{\vec{R}_1, \vec{F}_3\}.$$

Система из двух оставшихся сил \vec{R}_1 и \vec{F}_3 находится в равновесии, т.е. эквивалентна нулю:

$$\{\vec{R}_1, \vec{F}_3\} \in 0.$$

На основании **аксиомы 1** только две равные по модулю, противоположно направленные и действующие по одной прямой силы могут образовывать систему, эквивалентную нулю. Значит, линия действия силы F_3 проходит через точку пересечения сил F_1 и F_2 .

Система сходящихся сил

5. Теорема об n-силах

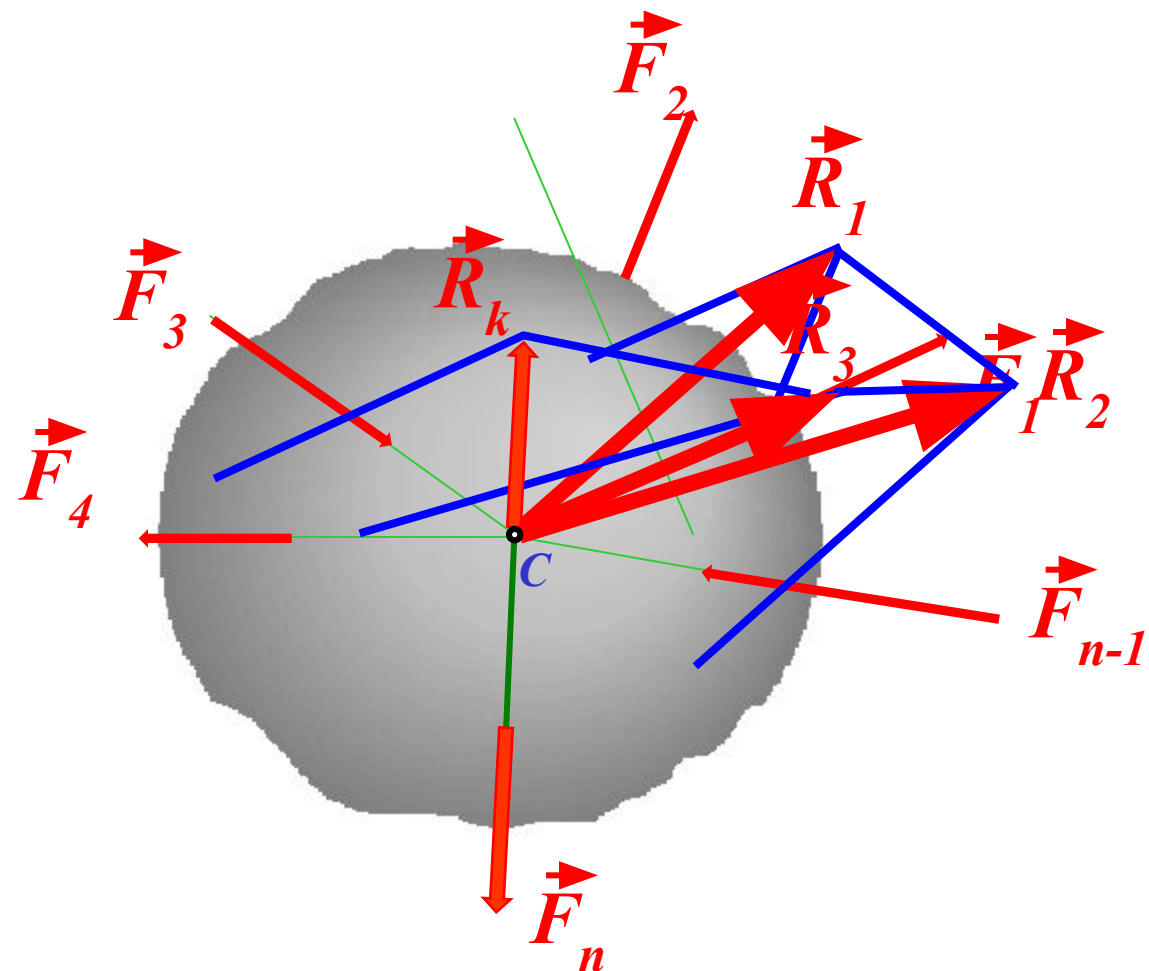
Если система из n сил находится в равновесии и все силы, кроме одной сходятся в одной точке, то и последняя сила проходит через точку схождения всех остальных сил.

$$\{\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_{n-1}\} \in \{\vec{R}_k\}$$

Система из двух оставшихся сил \vec{R}_k и \vec{F}_n находится в равновесии, т.е. эквивалентна нулю:

$$\{\vec{R}_k, \vec{F}_n\} \in 0$$

На основании аксиомы 1 только две равные по модулю, противоположно направленные и действующие по одной прямой силы могут образовывать систему, эквивалентную нулю. Значит, линия действия силы \vec{F}_n проходит через точку пересечения остальных сил.



Система сходящихся сил

6. Примеры решения задач

6.1. Пример 1

Груз весом 1000Н подвешен к вертикальной стене на составном кронштейне и находится в равновесии. Углы, образуемые стержнями кронштейна с вертикалью – 30° (для верхнего стержня) и 60° – (для нижнего).

Определить усилия в верхнем и нижнем стержнях.

Решение:

$$\sum_{i=1}^n F_{Xi} = 0: -P \cos 60^\circ - R_{BC} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{Yi} = 0: -P \sin 60^\circ + R_{AC} = 0;$$

Решение уравнений равновесия:

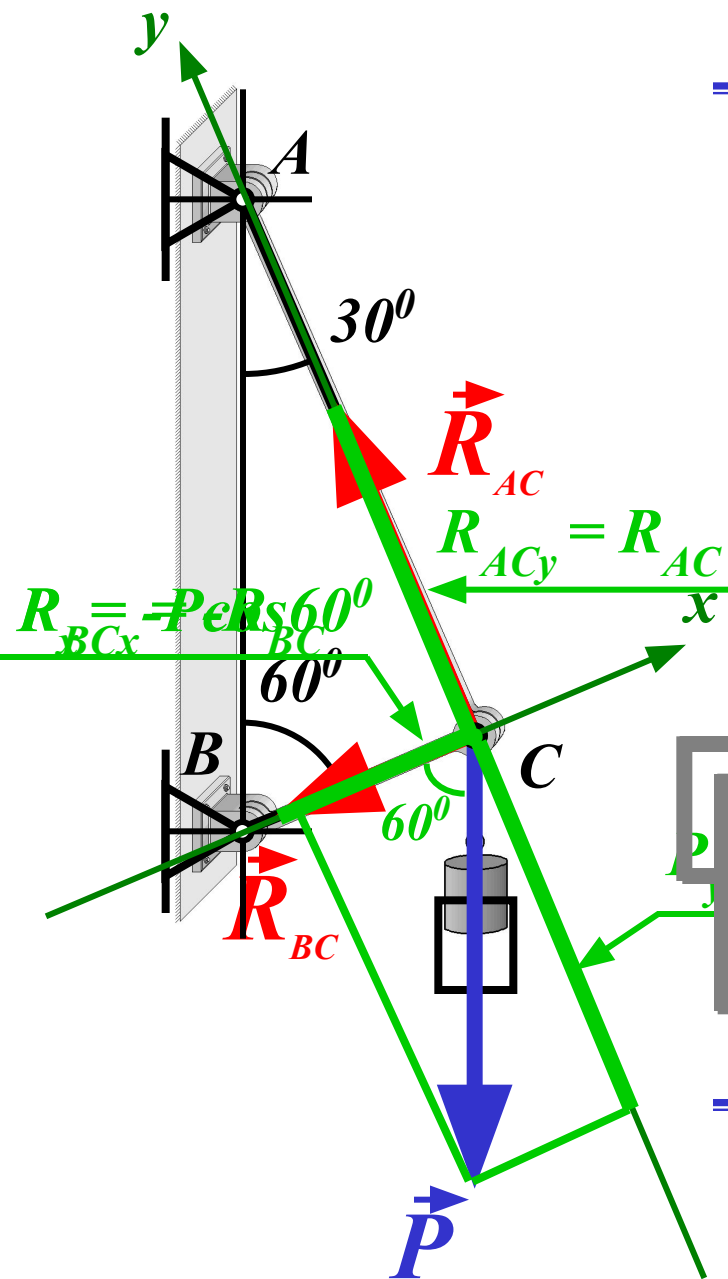
$$R_{AC} = P \sin 60^\circ = 1000 \cdot 0.866 = 866 \text{ Н};$$

$$R_{BC} = -P \cos 60^\circ = -1000 \cdot 0.500 = -500 \text{ Н};$$

Ответ:

$$R_{AC} = 866 \text{ Н}, \quad R_{BC} = -500 \text{ Н}$$

Знак « $-$ » показывает, что реакция направлена в сторону, противоположную показанной на расчетной схеме.



Система сходящихся сил

6. Примеры решения задач

6.2. Пример 2

Фонарь уличного освещения весом 100Н подвешен на тросе посередине между двумя вертикальными столбами, так, что величина провеса троса в точке подвеса фонаря составляет 0.1м . Расстояние между столбами 10м .

Определить силы натяжения в ветвях троса.

Решение:

$$CE = BC = \sqrt{DC^2 + BD^2} = \sqrt{0.1^2 + 5^2} = 5.001\text{м}$$

Треугольники CBE и cbe (силовой) подобны по признаку параллельности сторон ($CB \parallel cb$, $BE \parallel be$, $CE \parallel ce$), следовательно выполняются соотношения:

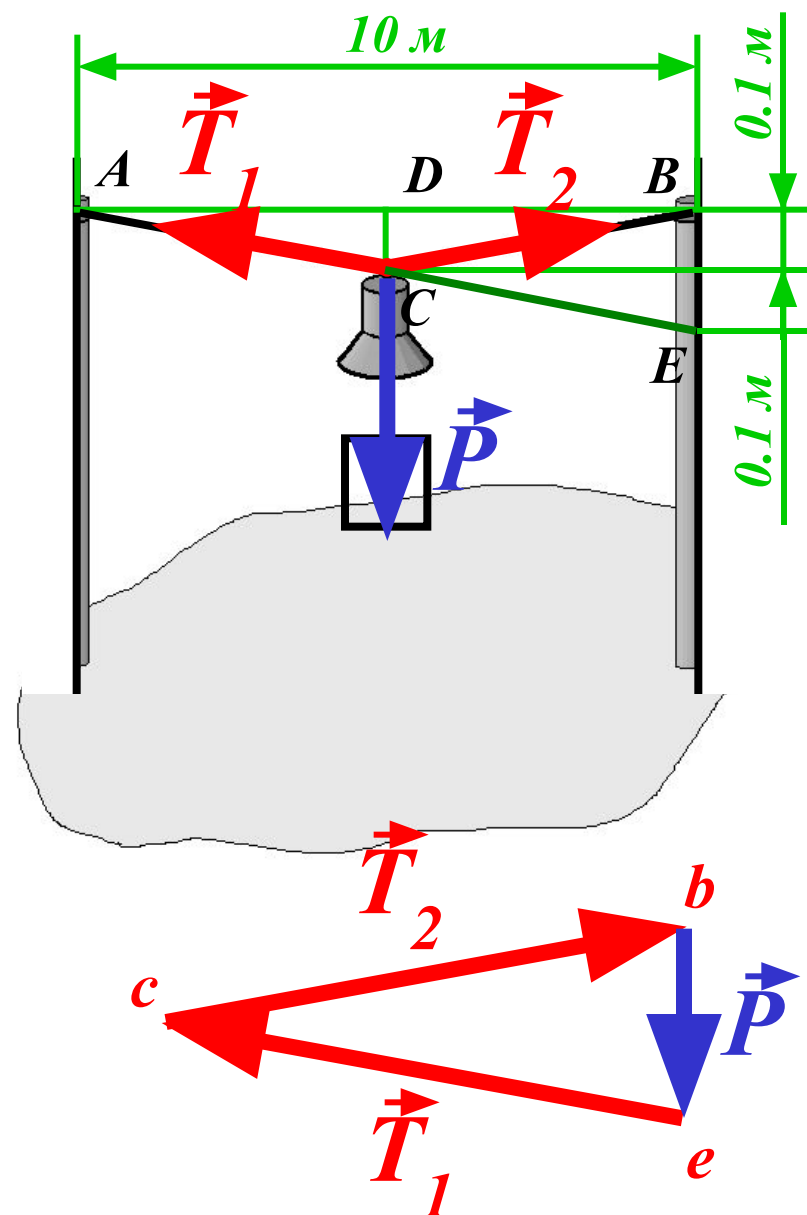
$$\frac{be}{BE} = \frac{ce}{CE} = \frac{cb}{CB} \quad \text{или} \quad \frac{P}{BE} = \frac{T_1}{CE} = \frac{T_2}{CB};$$

$$T_1 = \frac{P \cdot CE}{BE} = \frac{100 \cdot 5.001}{0.5} = 2500.5\text{Н};$$

$$T_2 = \frac{P \cdot CB}{BE} = \frac{100 \cdot 5.001}{0.5} = 2500.5\text{Н}.$$

Ответ:

$$T_1 = 2500.5\text{Н}, \quad T_2 = 2500.5\text{Н}$$



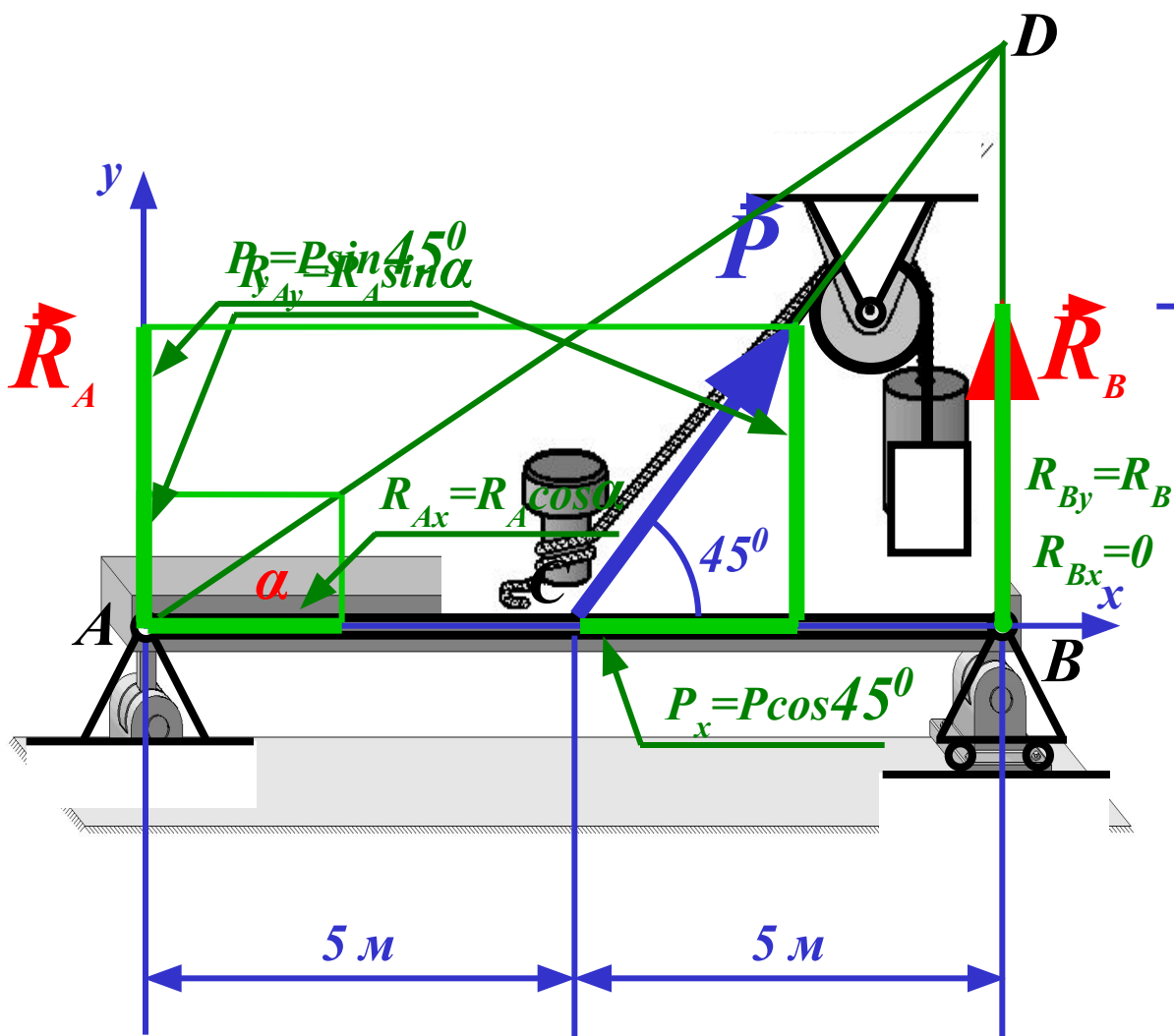
Система сходящихся сил

6. Примеры решения задач

6.3. Пример 3

Невесомая балка длиной **10 м** расположена на двух шарнирных опорах (неподвижной и подвижной) и находится в равновесии. В середине балки прикреплен трос подвешенного на блоке груза весом **1000 Н**. Угол наклона троса к горизонту **45°**.

Определить реакции шарниров балки.



Решение:

$$BD = BC = 5 \text{ м}; \quad AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{100 + 25} = 11.18 \text{ м};$$

$$\sin \alpha = BD / AD = 0.447; \quad \cos \alpha = AB / AD = 0.894;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{Xi} = 0 : + R_A \cos \alpha + P \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{Yi} = 0 : + R_A \sin \alpha + P \sin 45^\circ + R_B = 0.$$

Решение уравнений равновесия:

$$R_A = -\frac{P \cos 45^\circ}{\cos \alpha} = -\frac{1000 \cdot 0.707}{0.894} = -790.83 \text{ Н};$$

$$R_B = -R_A \sin \alpha - P \sin 45^\circ \\ = 790.83 \cdot 0.447 - 1000 \cdot 0.707 = -353.50 \text{ Н}$$

Ответ:

$$R_A = -790.83 \text{ Н}, \quad R_B = -353.50 \text{ Н}$$

Система сходящихся сил

6. Примеры решения задач

6.4. Пример 4

Груз весом 1000Н подвешен к вертикальной стене на стержневом кронштейне и находится в равновесии. Стержни скреплены между собой и прикреплены к стене посредством шарниров. Углы, образуемые стержнями со стеной, равны 45° .

Определить реакции стержней кронштейна.

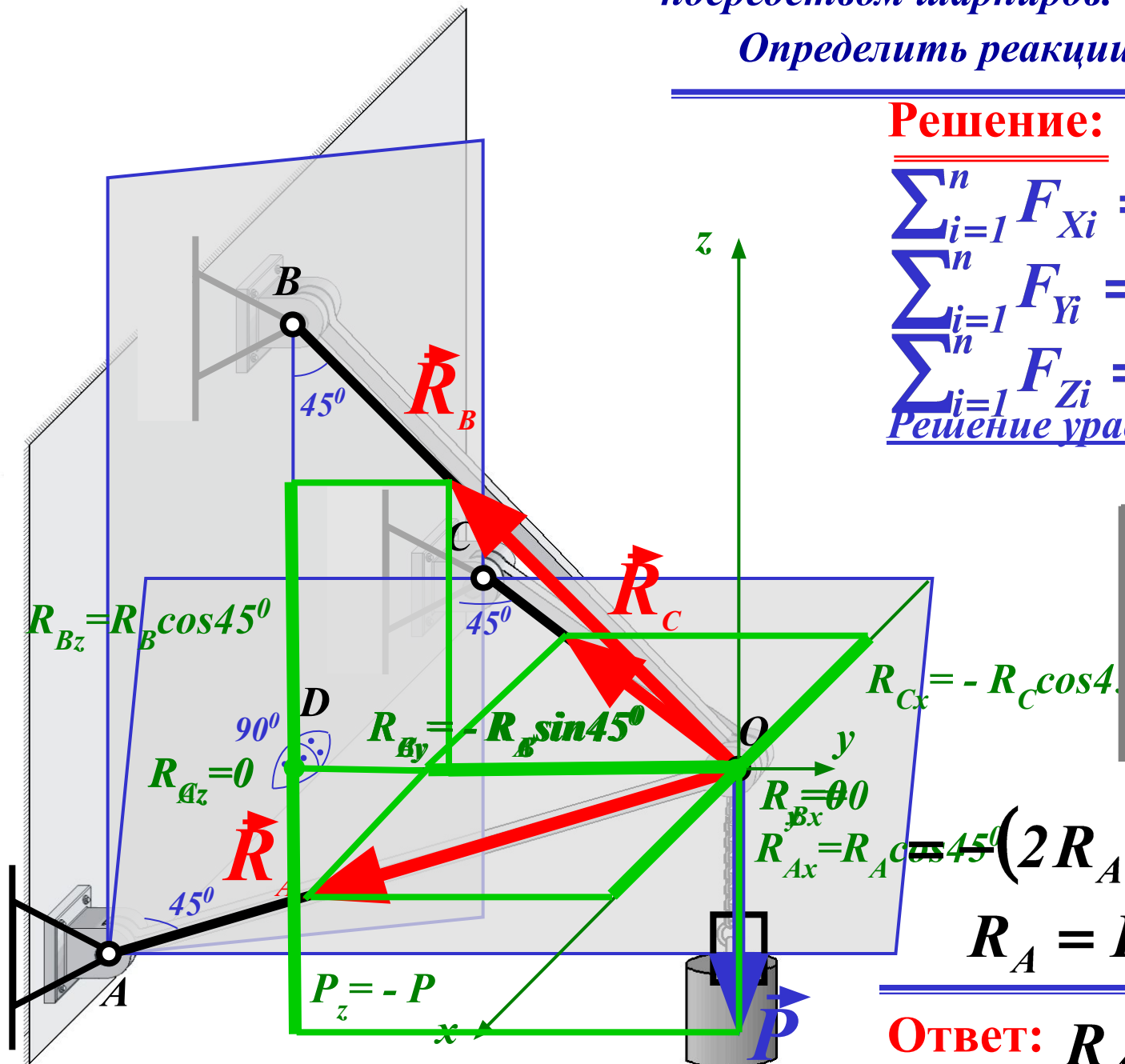
Решение:

$$\sum_{i=1}^n F_{Xi} = 0 : R_A \cos 45^\circ - R_C \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{Yi} = 0 : -R_A \sin 45^\circ - R_B \sin 45^\circ - R_C \sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{Zi} = 0 : R_B \cos 45^\circ - P = 0.$$

Решение уравнений равновесия:



$$R_B = P / \cos 45^\circ = 1000 / 0.707 = 1414.43 \text{ H};$$

$$R_A \cos 45^\circ = R_C \cos 45^\circ; \rightarrow R_A = R_C;$$

$$R_A \sin 45^\circ - R_B \sin 45^\circ - R_A \sin 45^\circ =$$

$$-(2R_A + R_B) \sin 45^\circ = 0; \rightarrow R_A = -R_B / 2 = -707.22 \text{ H};$$

$$R_A = R_C = -707.22 \text{ H}$$

Ответ: $R_A = -707.22 \text{ H}$, $R_B = 1414.43 \text{ H}$, $R_C = -707.22 \text{ H}$.

Система сходящихся сил

6. Примеры решения задач

6.5. Пример 5

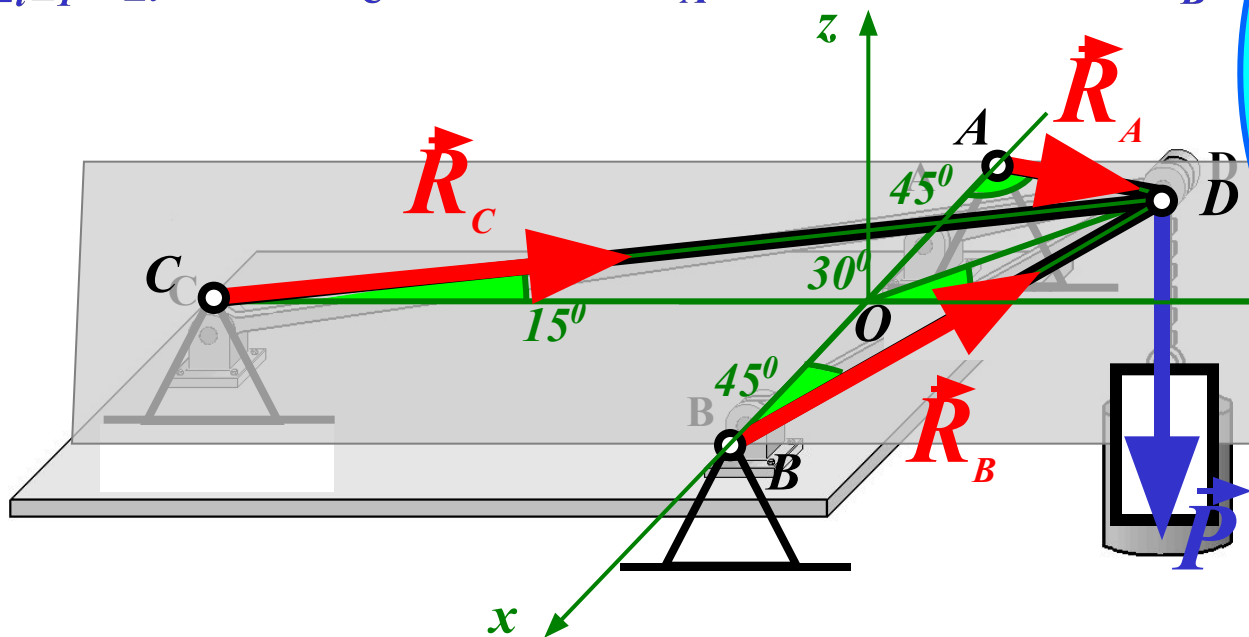
Груз весом 1кН подвешен на стержневом кронштейне. Стержни закреплены в точках A , B , C и D – шарнирные. Стержень BD и AD – 45° . Острый угол между плоскостями BD и AD – 15° . Определить реакции стержней кронштейна.

Решение:

$$\sum_{i=1}^n F_{Xi} = 0 : R_A \cos 45^\circ - R_B \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{Yi} = 0 : R_C \cos 15^\circ + R_A \sin 45^\circ \cos 30^\circ + R_B \sin 45^\circ \cos 30^\circ - P \cos 15^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{Zi} = 0 : R_C \sin 15^\circ + R_A \sin 45^\circ \sin 30^\circ + R_B \sin 45^\circ \sin 30^\circ - P \sin 15^\circ = 0;$$



$R_A = R_B;$
 $R_C \cos 15^\circ + 2R_A \sin 45^\circ \cos 30^\circ - P \cos 15^\circ = 0;$
 $R_C \sin 15^\circ + 2R_A \sin 45^\circ \sin 30^\circ - P \sin 15^\circ = 0;$
 $R_C = \frac{-2R_A \sin 45^\circ \cos 30^\circ + P \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ};$
 $R_C = \frac{-2R_A \sin 45^\circ \cos 30^\circ + P \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ};$
 $R_C = \frac{-2R_A \sin 45^\circ \cos 30^\circ + P \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ};$
 $R_A = \frac{P \cos 15^\circ}{2 \sin 45^\circ (\sin 30^\circ - \cos 30^\circ \operatorname{tg} 15^\circ)} = 2.64 \text{кН};$
 $R_B = R_A = 2.64 \text{кН};$
 $R_C = \frac{-2 \cdot 2.64 \cdot 0.707 \cdot 0.866}{0.966} = -3.35 \text{кН};$

Ответ: $R_A = 2.64 \text{Н}, R_B = 2.64 \text{Н}, R_C = -3.35 \text{Н}.$

