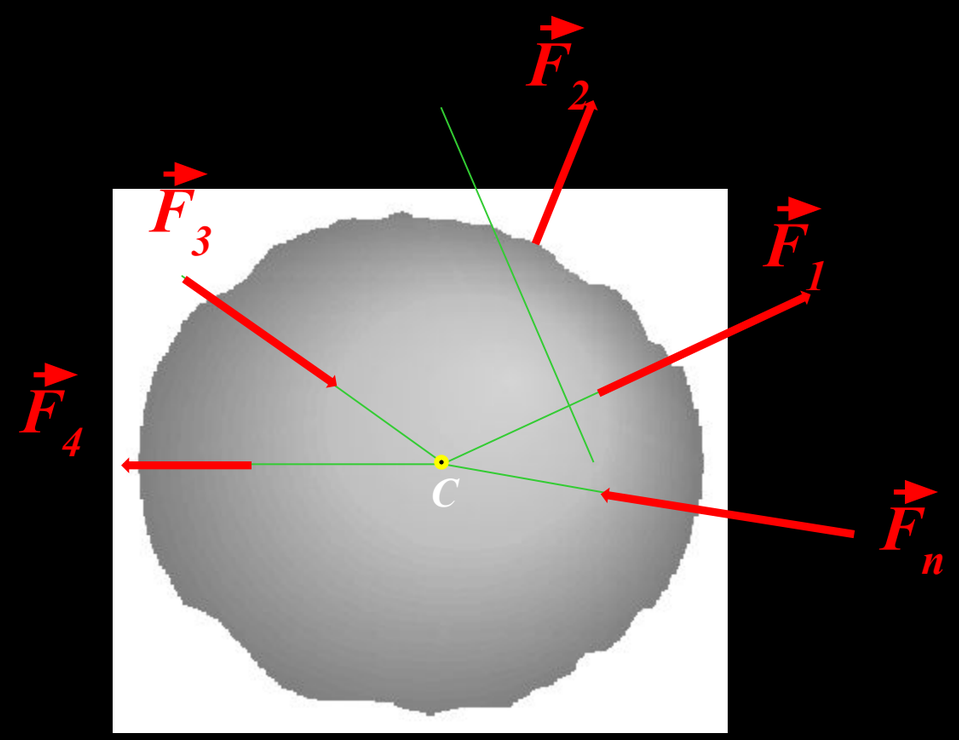
Система сходящихся сил

1. Определения

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется системой сходящихся сил (ССС).

Точка пересечения линий действия всех сил системы называется центром системы сходящихся сил.

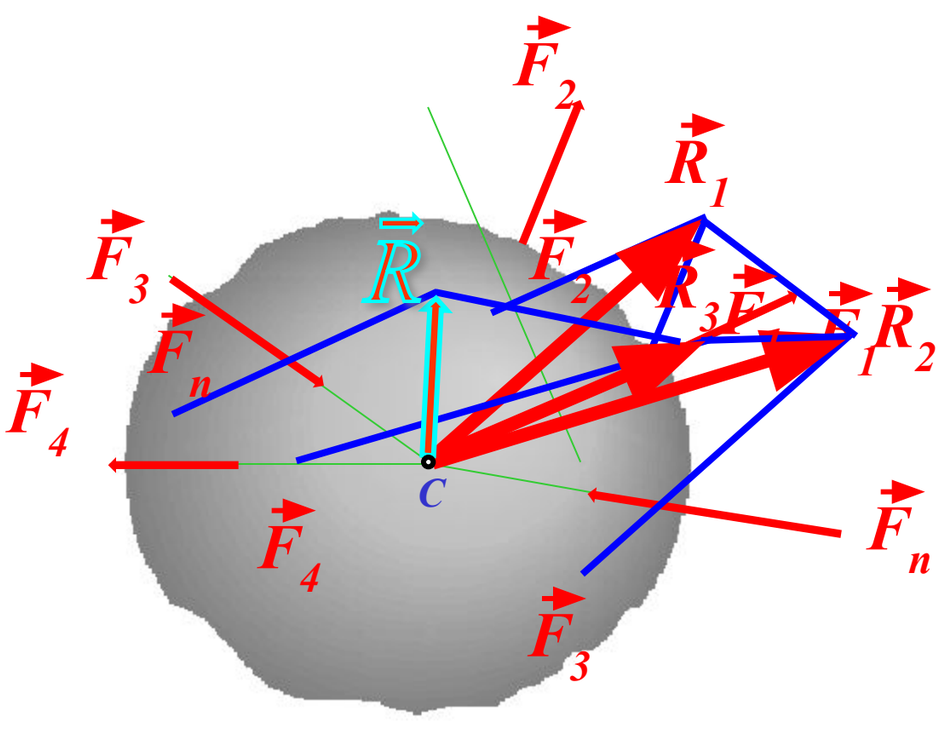


Система сходящихся сил

2. Равнодействующая системы сходящихся сил

Система сходящихся сил всегда имеет РАВНОДЕЙСТВУЮЩУЮ.

На основании <u>4-й аксиомы</u> и <u>1-го следствия</u> из <u>2-й аксиомы</u>, приведение системы сходящихся сил к простейшей (к одной силе – РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ) осуществляется последовательным сложением пар векторов (формальное сложение векторов по правилу параллелограмма или многоугольника).



$$\left\{\vec{F}_1,\ldots,\vec{F}_n\right\}\in\vec{R};\ \vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\vec{F}_i\right\}$$

Исходная система сил: *- главный вектор системы*

Проекции главного вектора на оси координат:

$$R_x=\sum_{i=1}^{n}F_{x_i};\quad R_y=\sum_{i=1}^{n}F_{y_i};\quad R_z=\sum_{i=1}^{n}F_{z_i}$$

Модуль главного вектора:

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}$$

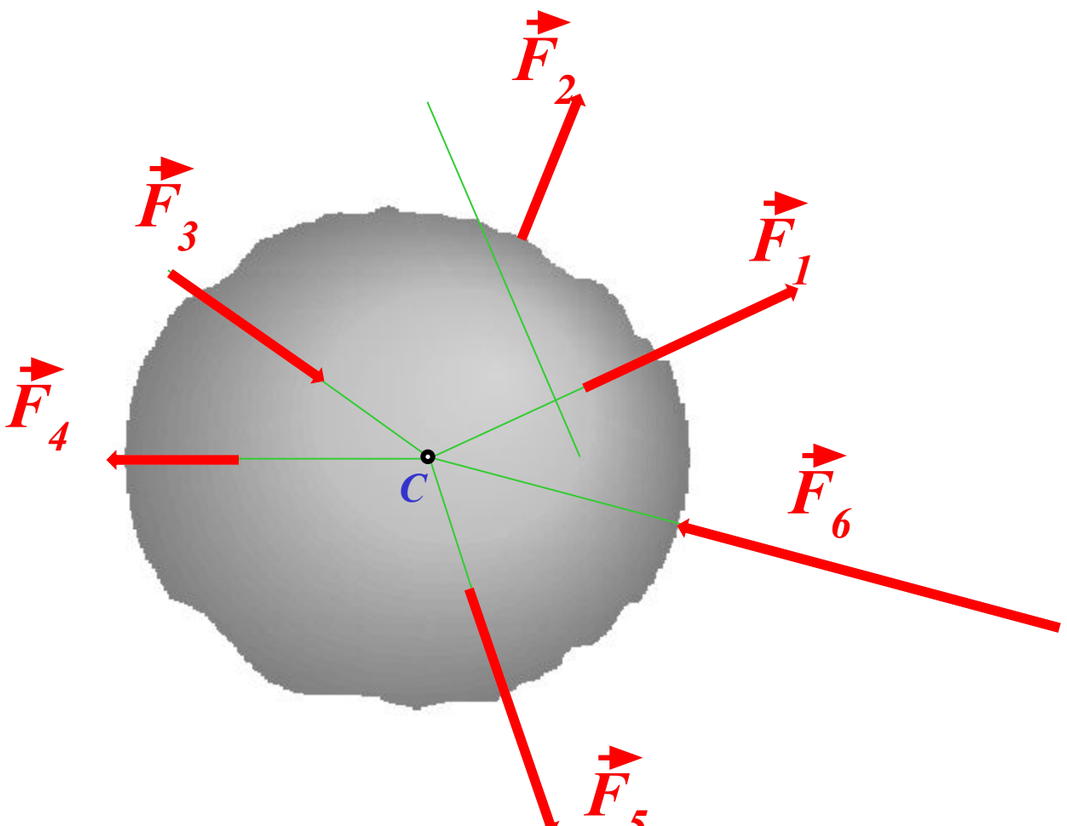
Направляющие косинусы:

$$\cos\alpha=\frac{R_x}{R};\quad \cos\beta=\frac{R_x}{R};\quad \cos\gamma=\frac{R_x}{R}.$$

Система сходящихся сил

3. Условия равновесия системы сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы ***силовой многоугольник был замкнутым****. Это означает равенство нулю главного вектора, а значит, и равнодействующей.*



$$\vec{R} = 0 \longrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0}$$

В проекциях на координатные оси:

$$\boxed{\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0;}$$

Условия равновесия системы:

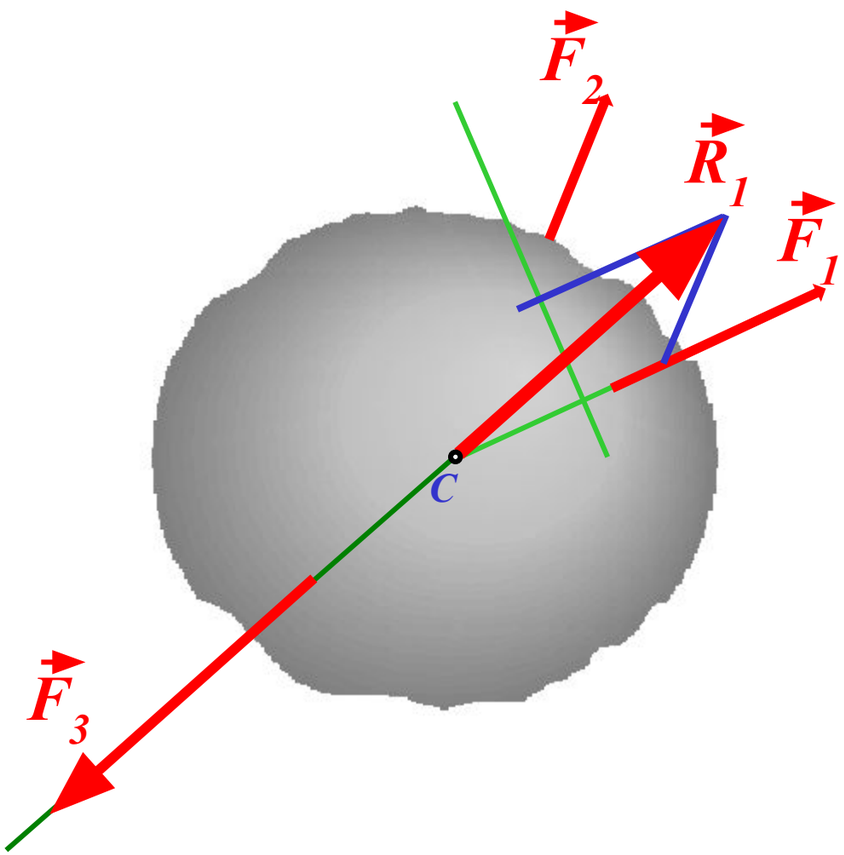
В векторной форме: ***главный вектор системы должен быть равен нулю***

В алгебраической форме: ***сумма проекций всех сил на каждую ось координат равнялась нулю***

Система сходящихся сил

4. Теорема о трех силах

Если система из трех непараллельных сил находится в равновесии, то линии их действия пересекаются в одной точке и силы располагаются в одной плоскости.



$$\vec{R}_1 \in \{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}; \quad \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\} \in \{\vec{R}_1, \vec{F}_3\}.$$

Система из двух оставшихся сил $\vec{R}_1$ и $\vec{F}_3$ находится в равновесии, т.е. эквивалентна нулю:

$$\{\vec{R}_1, \vec{F}_3\} \in 0.$$

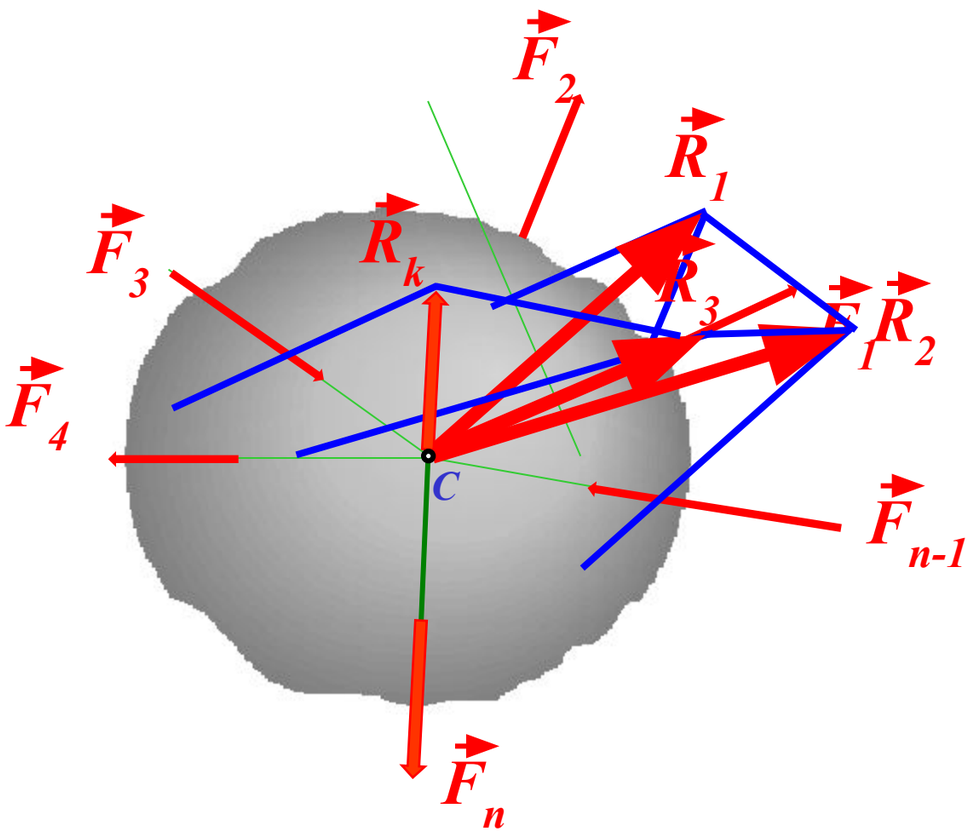
На основании аксиомы 1 только две равные по модулю, противоположно направленные и действующие по одной прямой силы могут образовывать систему, эквивалентную нулю. Значит, линия действия силы $\vec{F}_3$ проходит через точку пересечения сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

Система сходящихся сил

5. Теорема об n-силах

Если система из *n* сил находится в равновесии и все силы, кроме одной сходятся в одной точке, то и последняя сила проходит через точку схождения всех остальных сил.

$$\left\{\vec{F}_1,\ldots,\vec{F}_{n-1}\right\}\in\left\{\vec{R}_k\right\}$$



Система из двух оставшихся сил $\vec{R}_k$ и $\vec{F}_n$ находится в равновесии, т.е. эквивалентна нулю:

$$\left\{\vec{R}_k,\vec{F}_n\right\}\in 0$$

На основании аксиомы 1 только две равные по модулю, противоположно направленные и действующие по одной прямой силы могут образовывать систему, эквивалентную нулю. Значит, линия действия силы $\vec{F}_n$ проходит через точку пересечения остальных сил.

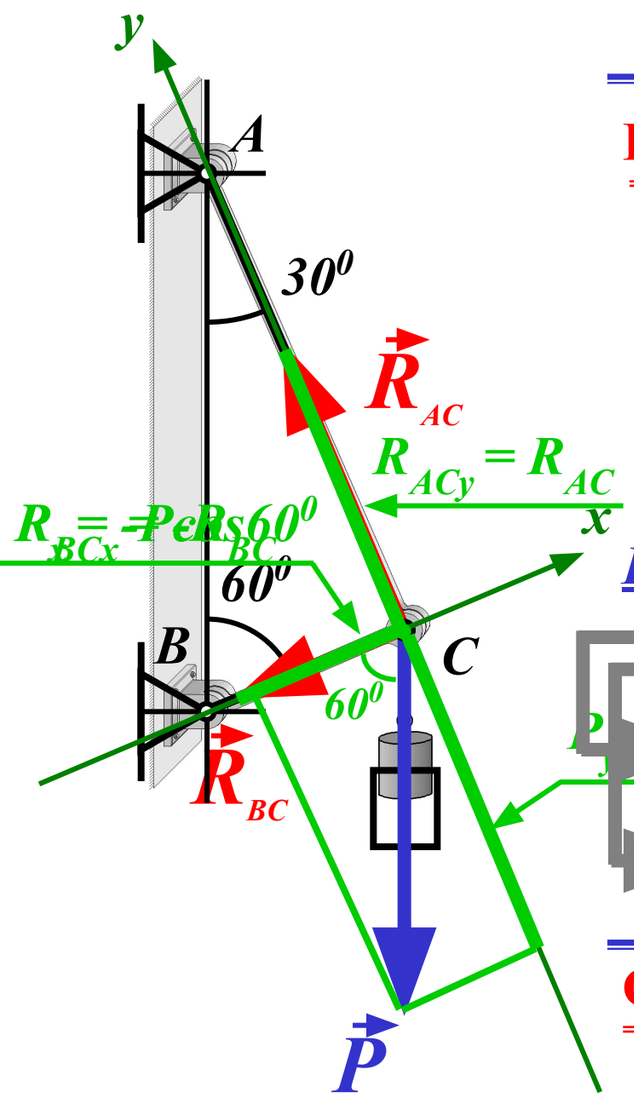
Система сходящихся сил

6. Примеры решения задач

6.1. Пример 1

Груз весом 1000Н подвешен к вертикальной стене на составном кронштейне и находится в равновесии. Углы, образуемые стержнями кронштейна с вертикалью – 30^0 (для верхнего стержня) и 60^0 – (для нижнего).

Определить усилия в верхнем и нижнем стержнях.



Решение:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{Xi} = 0: \; -P\cos 60^0 - R_{BC} = 0\,;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{Yi} = 0: \; -P\sin 60^0 + R_{AC} = 0\,;$$

Решение уравнений равновесия:

$$R_{AC} = P\sin 60^0 = 1000 \cdot 0.866 = 866\,H\,;$$

$$R_{BC} = -P\cos 60^0 = -1000 \cdot 0.500 = -500\,H\,;$$

Ответ:

$$R_{AC} = 866\,H, \;\; R_{BC} = -500\,H$$

Знак «–» показывает, что реакция направлена в сторону, противоположную показанной на расчетной схеме.

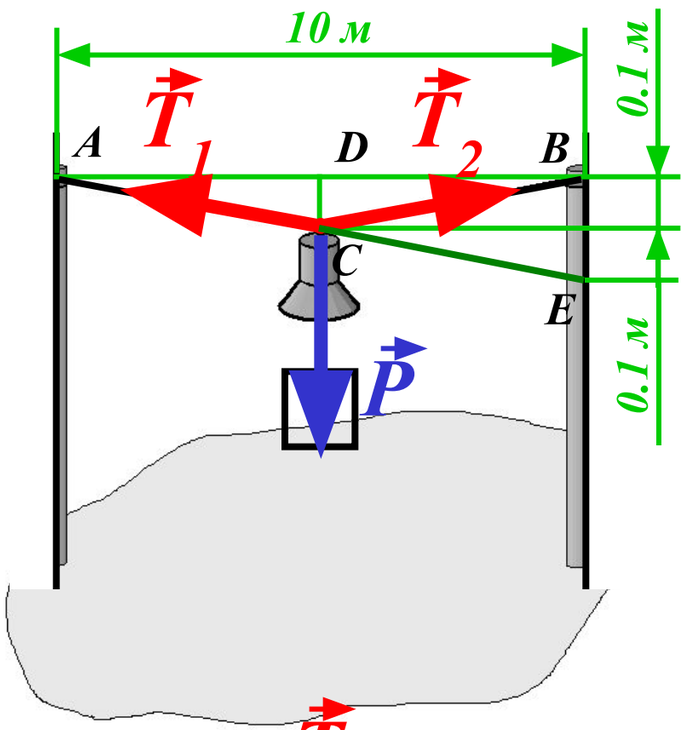
Система сходящихся сил

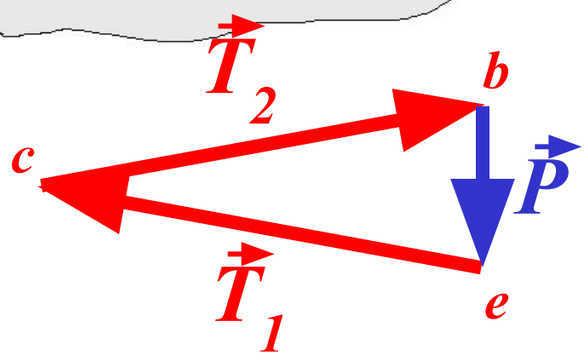
6. Примеры решения задач

6.2. Пример 2

Фонарь уличного освещения весом 100Н подвешен на тросе посредине между двумя вертикальными столбами, так, что величина провеса троса в точке подвеса фонаря составляет 0.1м. Расстояние между столбами 10м.

Определить силы натяжения в ветвях троса.





Решение:

$$CE = BC = \sqrt{DC^2 + BD^2} = \sqrt{0.1^2 + 5^2} = 5.001м$$

Треугольники CBE и cbe (силовой) подобны по признаку параллельности сторон (CB||cb, BE||be, CE||ce), следовательно выполняются соотношения:

$$\frac{be}{BE} = \frac{ce}{CE} = \frac{cb}{CB} \quad \text{или} \quad \frac{P}{BE} = \frac{T_1}{CE} = \frac{T_2}{CB};$$

$$T_1 = \frac{P \cdot CE}{BE} = \frac{100 \cdot 5.001}{0.5} = 2500.5H;$$

$$T_2 = \frac{P \cdot CB}{BE} = \frac{100 \cdot 5.001}{0.5} = 2500.5H.$$

Ответ: $T_1 = 2500.5H, \quad T_2 = 2500.5H$

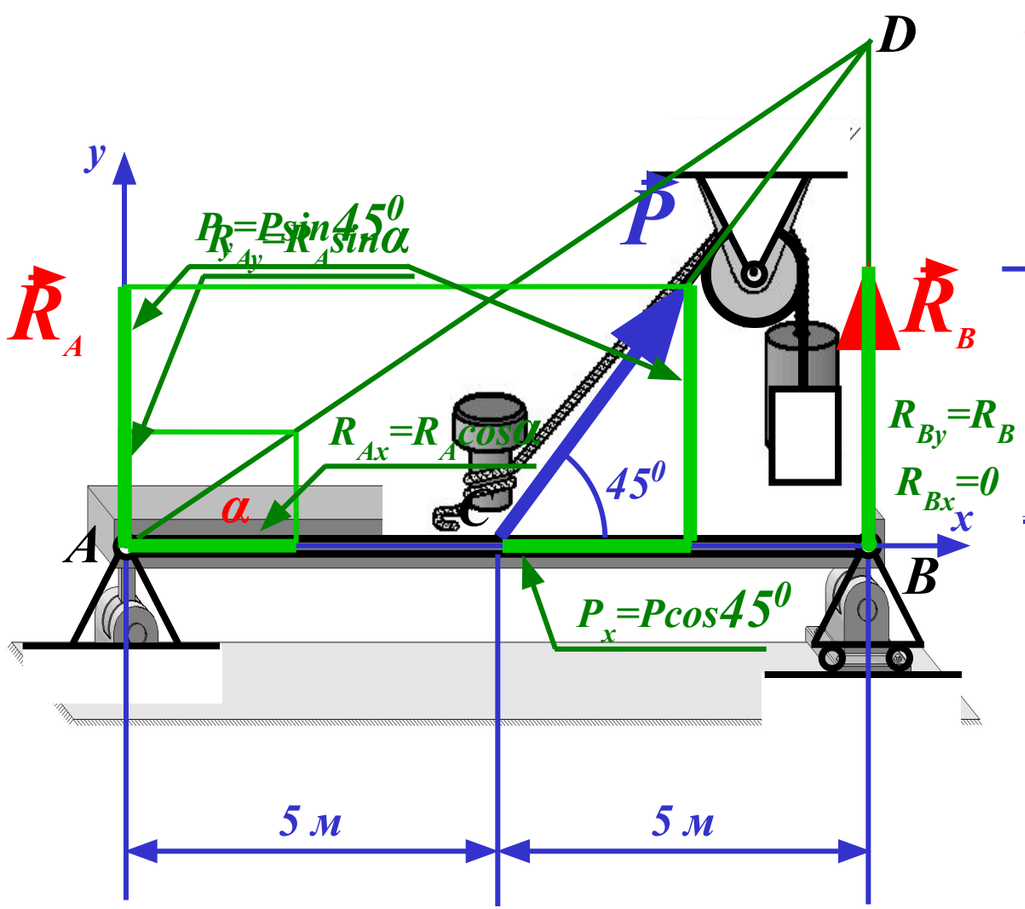
Система сходящихся сил

6. Примеры решения задач

6.3. Пример 3

Невесомая балка длиной 10м расположена на двух шарнирных опорах (неподвижной и подвижной) и находится в равновесии. В середине балки прикреплен трос подвешенного на блоке груза весом 1000Н. Угол наклона троса к горизонту 45^0.

Определить реакции шарниров балки.



Решение:

$$BD = BC = 5\,м; \quad AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{100 + 25} = 11.18\ м;$$

$$\sin\alpha = {BD}/{AD} = 0.447; \quad \cos\alpha = {AB}/{AD} = 0.894;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{Xi} = 0: +R_A\cos\alpha + P\cos 45^0 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{Yi} = 0: +R_A\sin\alpha + P\sin 45^0 + R_B = 0.$$

Решение уравнений равновесия:

$$R_A = -\frac{P\cos 45^0}{\cos\alpha} = -\frac{1000\cdot 0.707}{0.894} = -790.83\,H;$$

$$R_B = -R_A\sin\alpha - P\sin 45^0$$
$$= 790.83\cdot 0.447 - 1000\cdot 0.707 = -353.50\,H$$

Ответ: $R_A = -790.83\,H, \quad R_B = -353.50\,H$

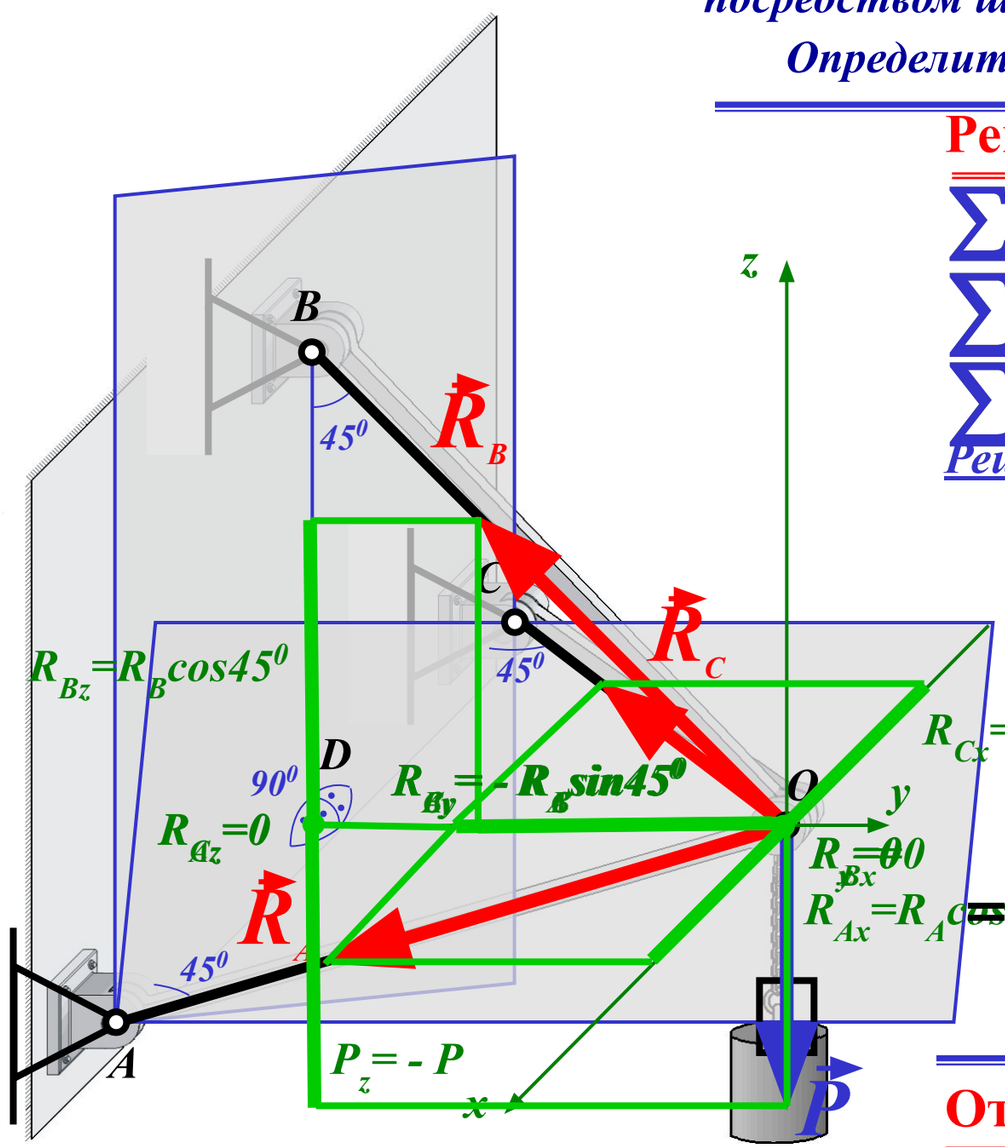
Система сходящихся сил

6. Примеры решения задач

6.4. Пример 4

Груз весом 1000Н подвешен к вертикальной стене на стержневом кронштейне и находится в равновесии. Стержни скреплены между собой и прикреплены к стене посредством шарниров. Углы, образуемые стержнями со стеной, равны 45^0.

Определить реакции стержней кронштейна.



Решение:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{Xi} = 0: \quad R_A \cos 45^0 - R_C \cos 45^0 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{Yi} = 0: -R_A \sin 45^0 - R_B \sin 45^0 - R_C \sin 45^0 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{Zi} = 0: \quad R_B \cos 45^0 - P = 0.$$

Решение уравнений равновесия:

$$R_B = P/\cos 45^0 = 1000/0.707 = 1414.43H;$$

$$R_A \cos 45^0 = R_C \cos 45^0; \rightarrow R_A = R_C;$$

$$R_A \sin 45^0 - R_B \sin 45^0 - R_A \sin 45^0 = (2R_A + R_B)\sin 45^0 = 0; \rightarrow R_A = -R_B/2 = -707.22H;$$

$$R_A = R_C = -707.22H$$

Ответ: $R_A = -707.22H$, $R_B = 1414.43H$, $R_C = -707.22H$.

Система сходящихся сил

6. Примеры решения задач

6.5. Пример 5

Груз весом 1кН подвешен на стержневом кр… Крепления стержней в точках A, B, C и D – шарнирные… D – 15⁰, BD и AD – 45⁰. Острый угол между плоскос…

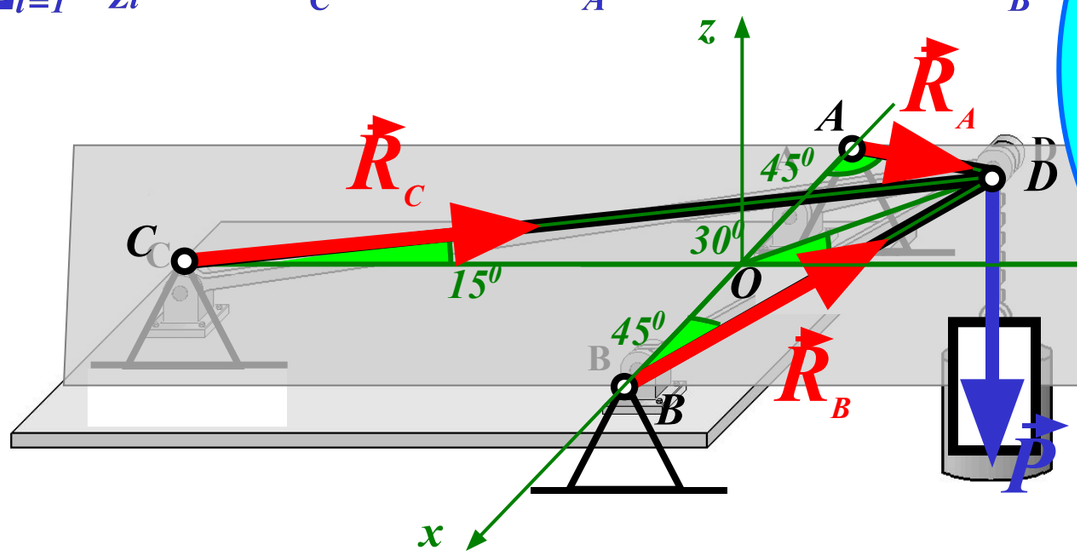
Определить реакции стержней крони…

Решение:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{Xi} = 0 : R_A \cos 45^0 - R_B \cos 45^0 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{Yi} = 0 : R_C \cos 15^0 + R_A \sin 45^0 \cos 30^0 + R_B \sin$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{Zi} = 0 : R_C \sin 15^0 + R_A \sin 45^0 \sin 30^0 + R_B s$$



$$R_A = R_B;$$

$$= 0; \quad R_C \cos 15^0 + 2R_A \sin 45^0 \cos 30^0 = 0;$$

$$-P = 0; \quad R_C = \frac{-2R_A \sin 45^0 \cos 30^0}{\cos 15^0};$$

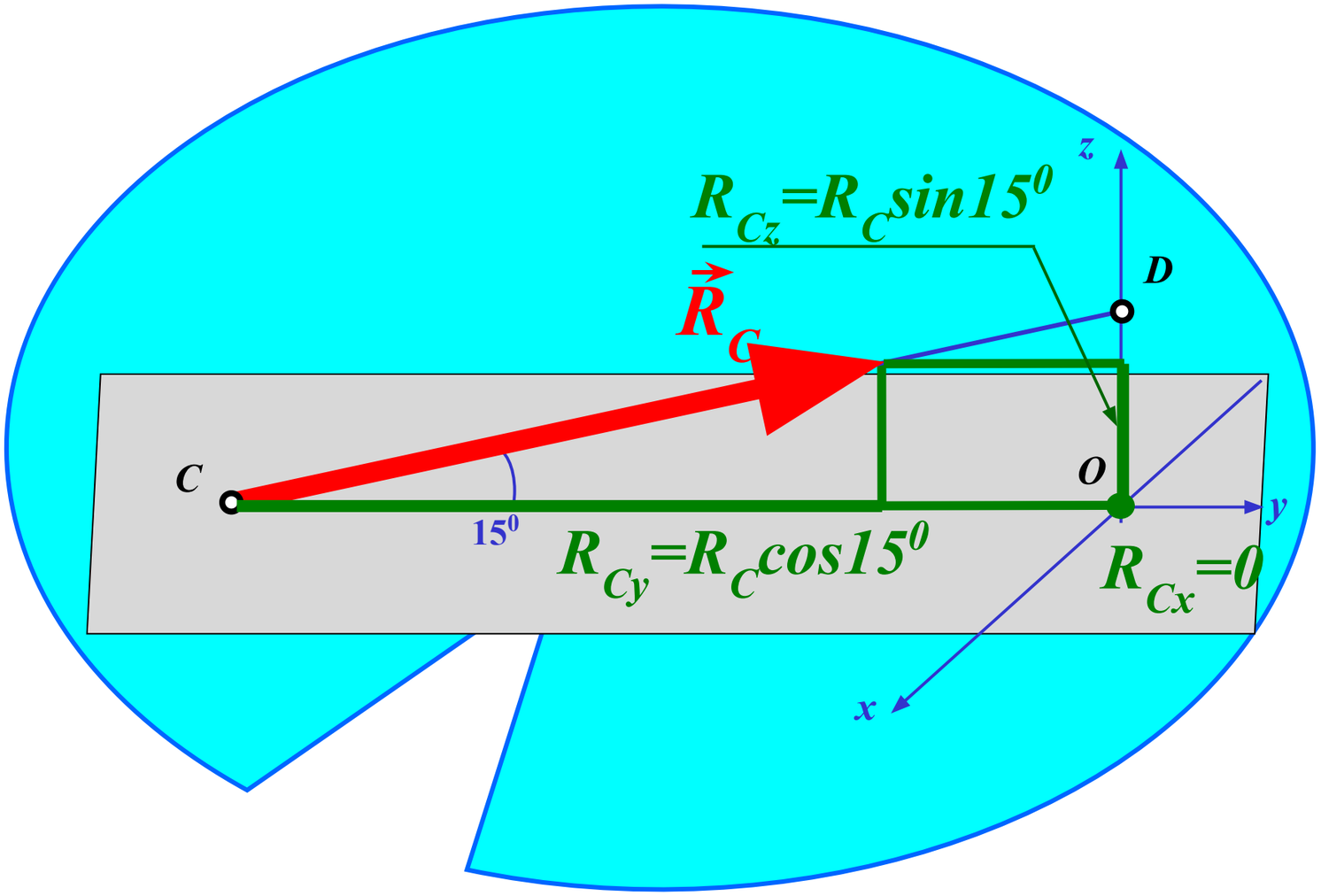
$$-2R_A \sin 45^0 \cos 30^0 = \quad \sin 15^0 + 2R_A \sin 45^0 \sin 30^0 - P = 0;$$

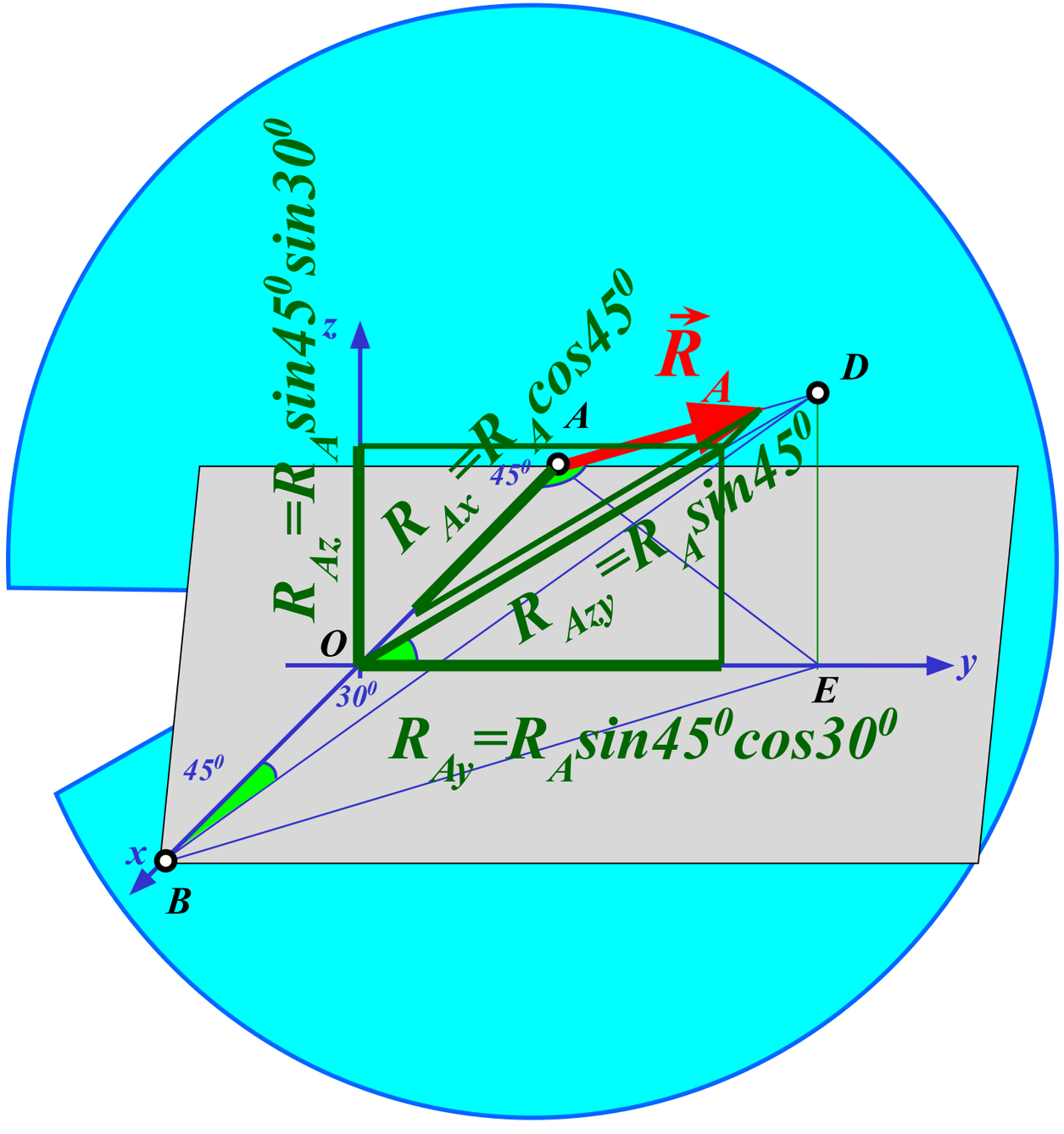
$$R_A = \frac{P}{2 \sin 45^0 (\sin 30^0 - \cos 30^0 \operatorname{tg} 15^0)} = 2.64\,кН;$$

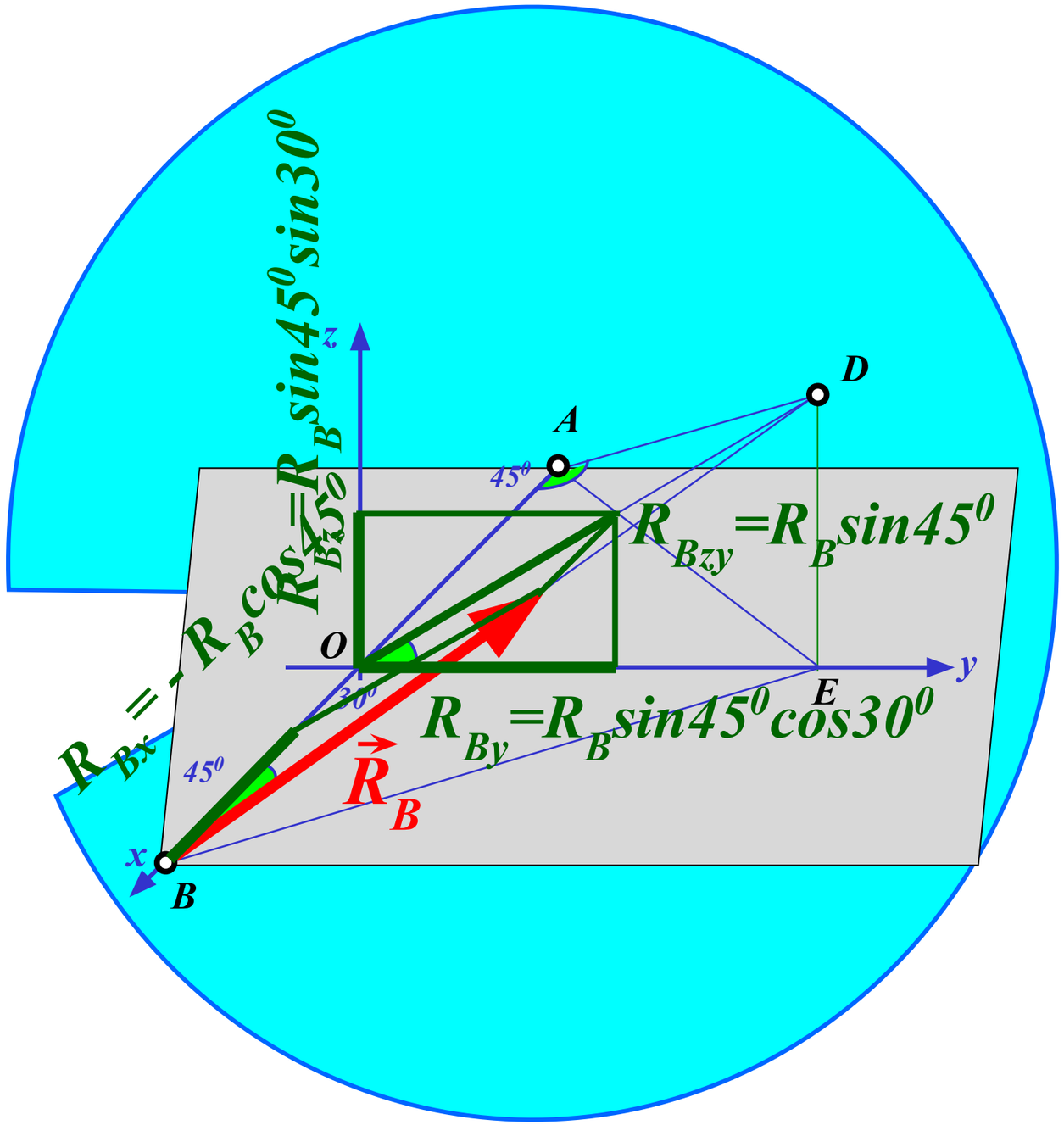
$$R_B = R_A = 2.64\,кН;$$

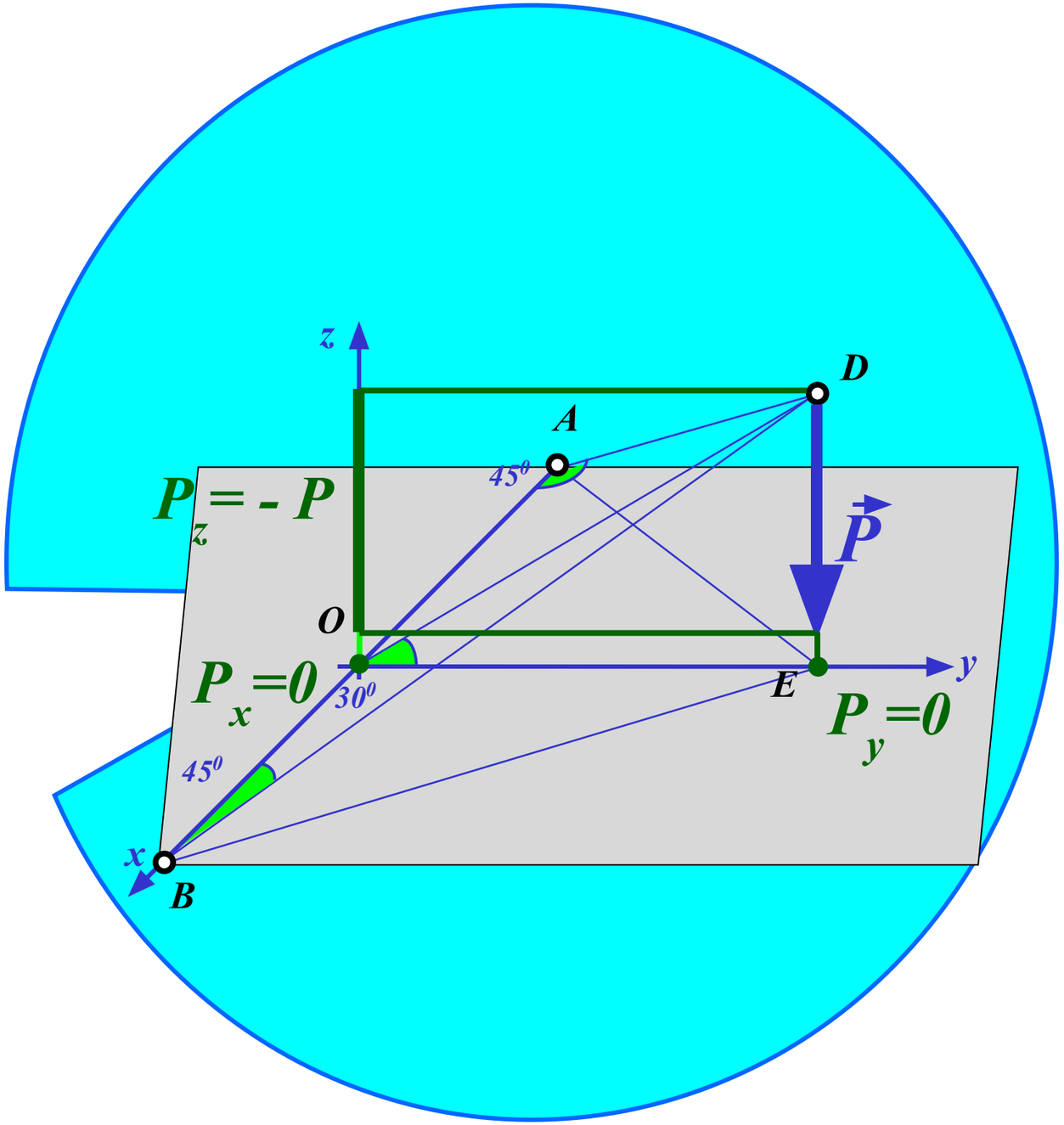
$$R_C = \frac{-2 \cdot 2.64 \cdot 0.707 \cdot 0.866}{0.966} = -3.35\,кН;$$

Ответ: $R_A = 2.64\,H$, $R_B = 2.64\,H$, $R_C = -3.35\,H$.


$R_{Cz}=R_C sin15^0$
z
D
$\vec{R}_C$
C
O
y
15^0
$R_{Cy}=R_C cos15^0$
$R_{Cx}=0$
x


$R_{Az} = R_A \sin 45^0 \sin 30^0$
z
$R_A \cos 45^0$
$\vec{R}_A$
D
A
45^0
$R_{Ax} = R_A \sin 45^0$
$R_{Azy} = R_A$
O
y
E
30^0
$R_{Ay} = R_A \sin 45^0 \cos 30^0$
45^0
x
B


$R_{Bz}=R_B\sin45^0\sin30^0$
z
D
A
45^0
$R_{Bzy}=R_B\sin45^0$
$R_{Bz}=R_B\cos45^0$
O
y
E
30^0
$R_{By}=R_B\sin45^0\cos30^0$
$R_{Bx}=-R_B\cos45^0$
45^0
$\vec{R}_B$
x
B


z
D
A
45⁰
P = - P
z
P
O
P x =0
30⁰
E
y
P y =0
45⁰
x
B