Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет” (ННГАСУ)

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ
(угловые соотношения)

ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

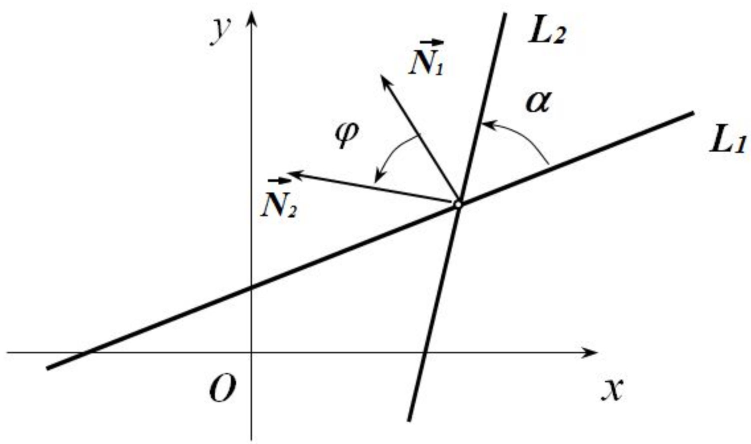
Лекция 4

Протасова Людмила Анатольевна
канд. физ.-мат. наук,
доцент кафедры математики ННГАСУ

Пусть прямые линии L_1 и L_2 заданы общими уравнениями

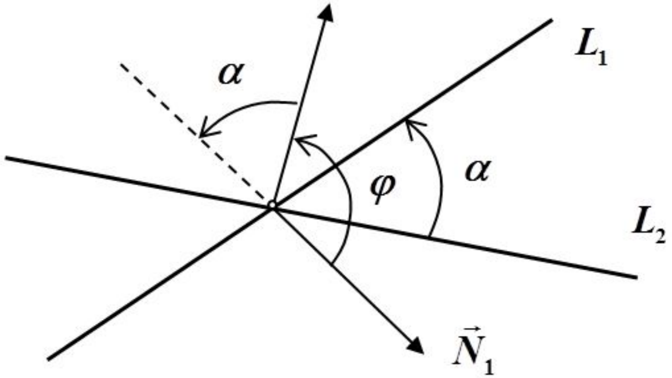
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Сведём вычисление угла α между прямыми к вычислению угла φ между нормальными векторами к этим прямым. Заметим, что угол между прямыми может быть только острым, а угол между векторами может быть и тупым. Поэтому, если угол φ между векторами $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2\}$ острый, то $\alpha = \varphi$.



Угол между прямыми

Если же угол φ между нормальными векторами тупой, то $\alpha = \pi - \varphi$. Поскольку $\cos\alpha = -\cos\varphi$, то $\cos\alpha = |\cos\varphi|$.



Таким образом, для вычисления угла между прямыми получаем формулу

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2\right|}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

В частности:

$$L_1 \perp L_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 = 0;$$

$$L_1 \parallel L_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Угол между прямыми

В последнем случае, если дополнительно выполняется равенство

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \qquad (*)$$

то эти прямые совпадают.

Обратим внимание на связь полученных условий взаимного расположения прямых с условиями разрешимости системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 B_2 - A_2 B_1.$

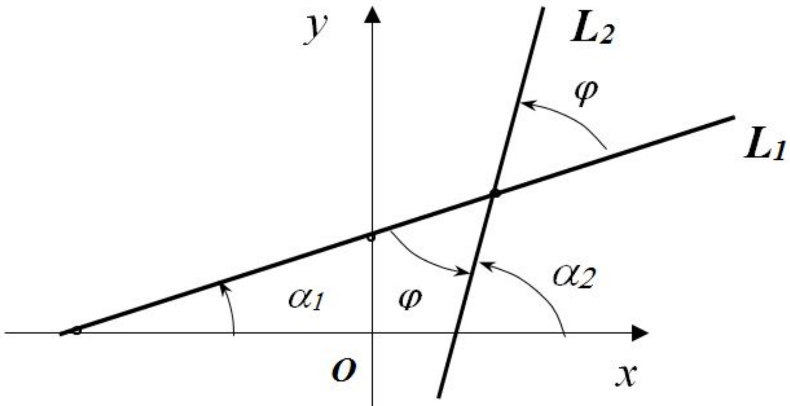
Если $\Delta \neq 0$, то, как известно, система имеет единственное решение, которому соответствует точка пересечения прямых L_1 и L_2. Если $\Delta = 0$, то выполнено условие параллельности этих прямых. При этом возможны два случая. В первом, когда выполнено условие $(*)$, прямые совпадают, и система имеет бесконечное множество решений (координаты любой точки прямой дают решение системы). Во втором случае, когда в условии $(*)$ не выполнено второе равенство, прямые параллельны, и система несовместна.

Условие совпадения прямых

Пусть две прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом:

$$y = k_1 x + b_1, \quad y = k_2 x + b_2.$$

Найдем угол φ между ними (φ – это наименьший положительный угол, который прямая L_2 составляет с прямой L_1).



Пусть α_1 и α_2 — углы между положительным направлением оси Ox и прямыми L_1 и L_2 соответственно. Тогда $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$ (внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, с ним не смежных). Отсюда следует, что $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Угол между прямыми

Так как $tg\,\alpha_1 = k_1$, $\mathrm{tg}\,\alpha_2 = k_2$, то $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

По этой формуле вычисляется положительный угол φ, который отсчитывается от прямой $y = k_1 x + b_1$ до прямой $y = k_2 x + b_2$. Иногда по заданному углу между прямыми и известному угловому коэффициенту одной из прямых нужно найти угловой коэффициент другой прямой. Поэтому нужно быть внимательными при применении формулы. Чтобы подчеркнуть, какой угол вычисляется по этой формуле, в ней ставят стрелку, показывающую, что угол отсчитывается от прямой с угловым коэффициентом k_1 до прямой с угловым коэффициентом k_2.

Заметим, что если требуется вычислить острый угол между прямыми, то правая часть формулы берется по модулю, то есть $\mathrm{tg}\,\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$.

Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то $\varphi = 0$ и $tg\varphi = 0$, следовательно, получаем, что $k_2 - k_1 = 0$, то есть $k_2 = k_1$. И обратно, если прямые L_1 и L_2 таковы, что $k_1 = k_2$, значит $tg\varphi = 0$, то есть прямые параллельны.

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны ($\varphi = \dfrac{\pi}{2}$), то $ctg\varphi = \dfrac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0$, откуда $k_1 \cdot k_2 = -1$. Справедливо и обратное утверждение.

Угол между прямыми

Вывод. **Условия перпендикулярности и параллельности двух прямых** $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, выраженные через их угловые коэффициенты:

$$L_1 \perp L_2 \;\Leftrightarrow\; k_2 = -\frac{1}{k_1}; \quad L_1 \parallel L_2 \;\Leftrightarrow\; k_1 = k_2 .$$

В последнем случае, если дополнительно $b_1 = b_2$, то прямые L_1 и L_2 совпадают.

Пример. Найти угол между прямыми $L_1 : x - 2y + 1 = 0$ и $L_2 : 3x + y - 3 = 0$.

Решение. Запишем общее уравнение заданных прямых L_1 и L_2 в виде уравнений с угловыми коэффициентами k_1 и k_2, соответственно:

$L_1 : 2y = x + 1$ или $L_1 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, значит $k_1 = \frac{1}{2}$;

$L_2 : y = -3x + 3$, значит $k_2 = -3$.

Подставляя найденные значения k_1 и k_2 в формулу, находим угол φ между прямыми L_1 и L_2: $tg\varphi = \dfrac{-3 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\cdot(-3)} = \dfrac{-\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}} = 7$, откуда $\varphi = arctg\, 7$.

Ответ: $\varphi = arctg\, 7$.

Условия перпендикулярности и параллельности прямых

Пример. Составить уравнение прямой линии l, проходящей через точку $M(1;2)$ и перпендикулярной прямой $L: 3x+2y-5=0$.

Решение. Перепишем общее уравнение прямой L в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом k_L:

$L: 3x+2y-5=0$, $L: 2y=-3x+5$, $L: y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$, значит $k_L=-\frac{3}{2}$.

Прямые l и L перпендикулярны по условию, значит $k_l \cdot k_L=-1$,

следовательно, $k_l=-\frac{1}{k_L}=\frac{2}{3}$. Уравнение l приобретает вид $\boldsymbol{y=\frac{2}{3}x+b_l}$.

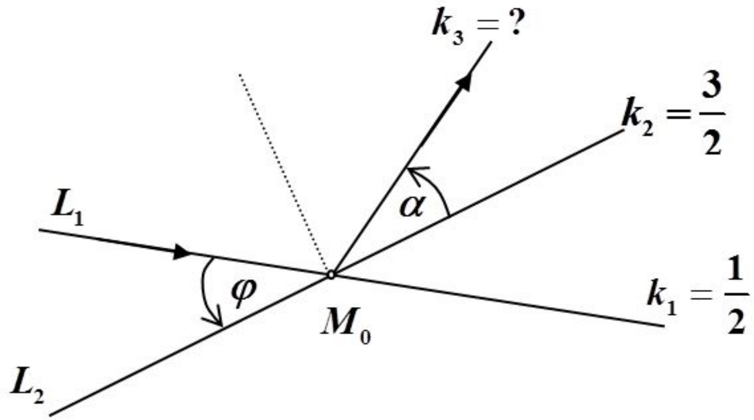
Подставляем в уравнение $x_0=1$, $y_0=2$: $\boldsymbol{2=\frac{2}{3}+b_l}$ и находим $\boldsymbol{b_l=\frac{4}{3}}$.

Искомое уравнение прямой l: $\boldsymbol{y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}}$. Или $l: 2x-3y+4=0$.

Ответ: $2x-3y+4=0$.

Пример

Пример. В плоскости луч света направлен по прямой $L_1: x-2y+5=0$ и дойдя до прямой $L_2: 3x-2y+7=0$ от неё отразился. Получить уравнение прямой, по которой направлен отражённый луч.



Решение. Вычисляем тангенс угла «падения» $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{7}$

Для тангенса угла «отражения» α вычисляем $tg\alpha=\dfrac{4}{7}=\left(k_3-\dfrac{3}{2}\right)\Big/\left(1+\dfrac{3}{2}k_3\right)$ и получаем угловой коэффициент $k_3=29/2$ прямой, по которой направлен отражённый луч.

Пример

Уравнение искомой прямой с найденным угловым коэффициентом приобретает вид $L_3:\ y = \frac{29}{2}x + b_3$.

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y + 7 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases},$$

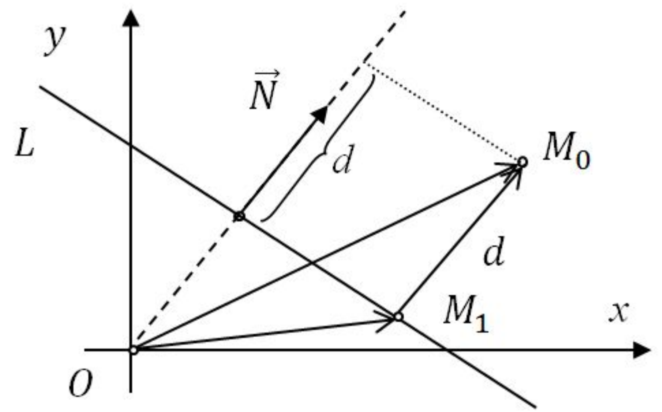
находим координаты точки $M_0(-1,2)$ пересечения прямых L_1 и L_2.

Подставляем найденные координаты в уравнение прямой L_3: $2 = -\frac{29}{2} + b_3$ и находим $b_3 = \frac{33}{2}$. Уравнение искомой прямой получаем в виде

$L_3:\ y = \frac{29}{2}x + \frac{33}{2}$ или $29x - 2y + 33 = 0$.

Ответ: $29x - 2y + 33 = 0$

Пример



Найдём расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

Пусть $M_1(x_1, y_1)$ – проекция точки M_0 на прямую. Искомое расстояние равно абсолютной величине проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на направление нормального вектора $\vec N = \{A, B\}$.

$$d = \left|Пр_{\vec N}\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \frac{\left|\vec N \cdot \overrightarrow{M_1M_0}\right|}{|\vec N|} = \frac{\left|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)\right|}{|\vec N|} = \frac{\left|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1\right|}{|\vec N|}$$

Точка $M_1(x_1, y_1)$ принадлежит прямой, поэтому $Ax_1 + By_1 = -C$.

Окончательно получим $\quad d = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

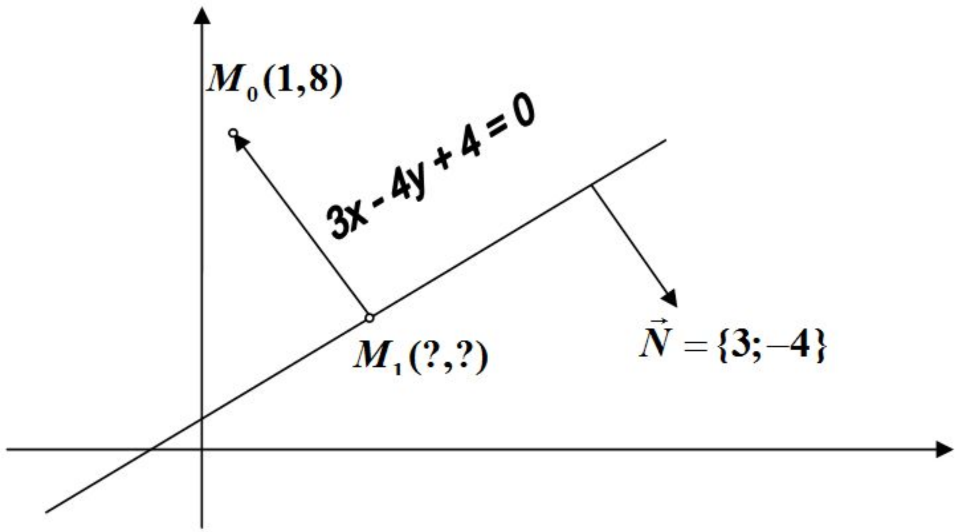
Знак проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ определяется знаком выражения $Ax_0 + By_0 + C$:
если $Ax_0 + By_0 + C > 0$, то $\overrightarrow{M_1M_0} \uparrow\uparrow \vec N$ и в формуле нужно взять знак плюс.

Расстояние от точки до прямой

Найдём координаты точки $M_1(x_1, y_1)$. Для этого выразим вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$ через расстояние d и единичный вектор $\vec{N}/|\vec{N}|$, нормальный к прямой

$$\overrightarrow{M_1M_0} = \pm\frac{d}{|\vec{N}|}\vec{N}$$

Пример. Найти проекцию точки $M_0(1,8)$ на прямую $3x - 4y + 4 = 0$.



Решение. Вычисляем расстояние точки M_0 до прямой

$$d = \frac{|3\cdot 1 - 4\cdot 8 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-25|}{5} = 5$$

Видим, что $\overrightarrow{M_1M_0} \uparrow\downarrow \vec{N}$, поэтому

$$\overrightarrow{M_1M_0} = -\frac{d}{|\vec{N}|}\vec{N} = -\frac{5}{5}\{3;\,4\}$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{M_1M_0} = \{1 - x_1; 8 - y_1\}$$

Отсюда, приравнивая координаты векторов, получаем координаты точки $M_1(4,4)$

Пример

Пример. Найти проекцию точки $M_0(1,8)$ на прямую $3x-4y+4=0$.

Второй способ решения. Найдём сначала уравнение прямой L_2, проходящей через точку $M_0(1,8)$ перпендикулярно заданной прямой L_1: $3x-4y+4=0$. Для этого представим уравнение L_1 в виде уравнения с угловым коэффициентом: $y=\frac{3}{4}x+1$. Здесь $k_1=\frac{3}{4}$. Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 используем в виде $k_1\cdot k_2=-1$, откуда находим $k_2=-\frac{4}{3}$. Тем самым, уравнение L_2 приобретает вид $y=-\frac{4}{3}x+b_2$. Хотим, чтобы прямая L_2 проходила через точку $M_0(1,8)$, поэтому подставляем её координаты в уравнение L_2 и находим $b_2=\frac{28}{3}$. Получили уравнение $L_2:\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{28}{3}$ или $4x+3y-28=0$.

Для нахождения координат проекции M_0 на L_1 осталось найти точку пересечения прямых L_1 и L_2. Решаем систему уравнений

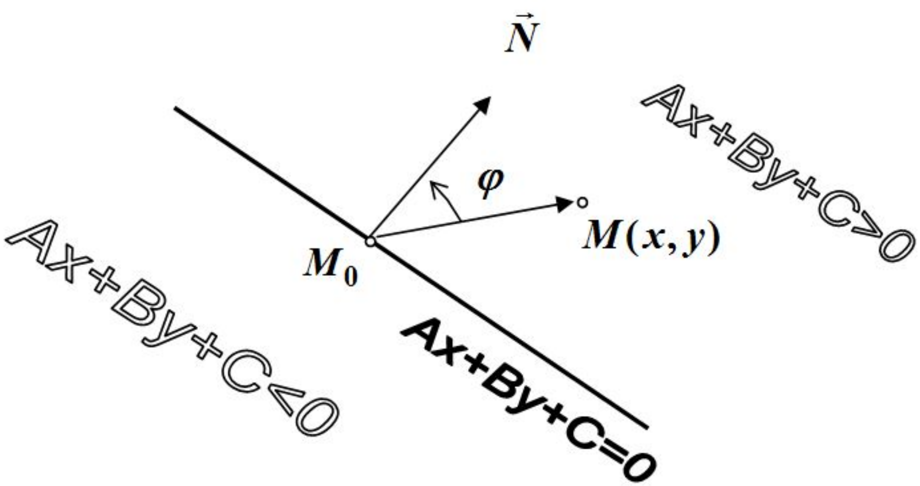
$$\begin{cases}3x-4y+4=0\\4x+3y-28=0\end{cases}$$ и находим координаты точки $M_1(4,4)$.

Ответ: $M_1(4,4)$

Пример

Выясним геометрический смысл неравенства $Ax + By + C > 0$.

Построим прямую $Ax + By + C = 0$ и нормальный к ней вектор $\vec{N} = \{A, B\}$. Рассмотрим множество точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют исходному неравенству. Возьмём на прямой произвольную, но фиксированную точку $M_0(x_0, y_0)$.



Поскольку $Ax_0 + By_0 + C = 0$, то, можно выразить $C = -Ax_0 - By_0$.

Подставив C в неравенство, получим $Ax + By - Ax_0 - By_0 > 0$

Видим, что левая часть его равна скалярному произведению векторов $\vec{N} = \{A, B\}$ и $\overrightarrow{M_0M}$:

$\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = A(x - x_0) + B(y - y_0) > 0$. Итак, неравенству удовлетворяют все точки плоскости, для которых угол между векторами $\vec{N}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ – острый. Все такие точки принадлежат одной полуплоскости.

Линейные неравенства

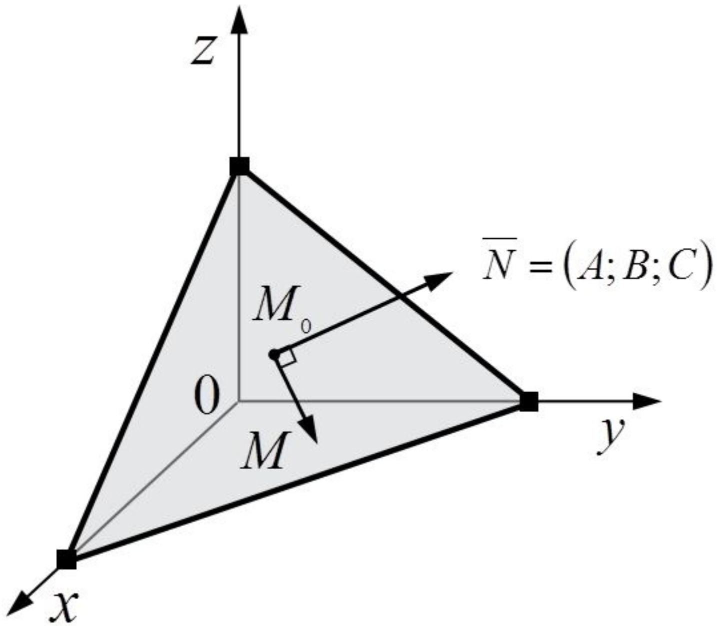
Чтобы выяснить, какая из двух полуплоскостей «отвечает» неравенству $Ax + By + C > 0$, достаточно проверить его выполнение для какой-нибудь одной точки из любой полуплоскости. Если координаты этой точки ему удовлетворяют, то и координаты всех точек полуплоскости, в которой выбрана «пробная» точка, будут его решениями, если нет – то нужная полуплоскость – другая.

Вывод. Если точка $M_0(x_0; y_0) \notin L$ и она лежит по ту же сторону от прямой $L: Ax + By + C = 0$, что и вектор нормали $\vec{N} = \{A, B\}$, то трёхчлен $Ax + By + C$ положителен (и наоборот).

Следствие. Всякая прямая $L: Ax + By + C = 0$ делит плоскость на две полуплоскости: положительную и отрицательную. В положительную полуплоскость направлен вектор $\vec{N} = \{A, B\}$.

Пример (домашнее задание). Используя метод пробной точки, построить область, задаваемую неравенством $y \le \frac{x}{3} - 1$.

Метод пробной точки



Пусть в прямоугольной декартовой системе координат задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\overline{N}\{A; B; C\}$. Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overline{N}$. Выберем произвольную точку $M(x; y; z)$ на плоскости π. Тогда вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ лежит на плоскости. Так как $\vec{N} \perp \pi$ по условию, то и $\vec{N} \perp \overrightarrow{M_0M}$, а значит скалярное произведение $\overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0$, или в координатах

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение является уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярной вектору $\overline{N}\{A; B; C\}$.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Вектор $\overline{N}$ называется **вектором нормали плоскости**.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;2;3)$ и перпендикулярной вектору $\overline{PQ}$, если $P(0;1;7)$ и $Q(-1;2;5)$.

Решение. Находим координаты вектора $\overline{PQ}$, являющегося вектором нормали плоскости: $\overline{N} = \overline{PQ} = \{-1;1;-2\}$.

Подставляя в уравнение (1) координаты точки $M_0(1;2;3)$ и найденные координаты вектора $\overline{N}$, находим искомое уравнение плоскости:

$$-1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)-2\cdot(z-3)=0 \quad \text{или} \quad -x+y-2z+5=0$$

Ответ: $-x+y-2z+5=0$.

Далее преобразуем уравнение (1):

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0 \quad \text{или}$$

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0.$$

Обозначив $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, получаем **общее уравнение плоскости** вида

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (2)$$

Общее уравнение плоскости

Уравнение (2) является уравнением первой степени относительно x, y и z.

Следовательно, мы обосновали теорему:

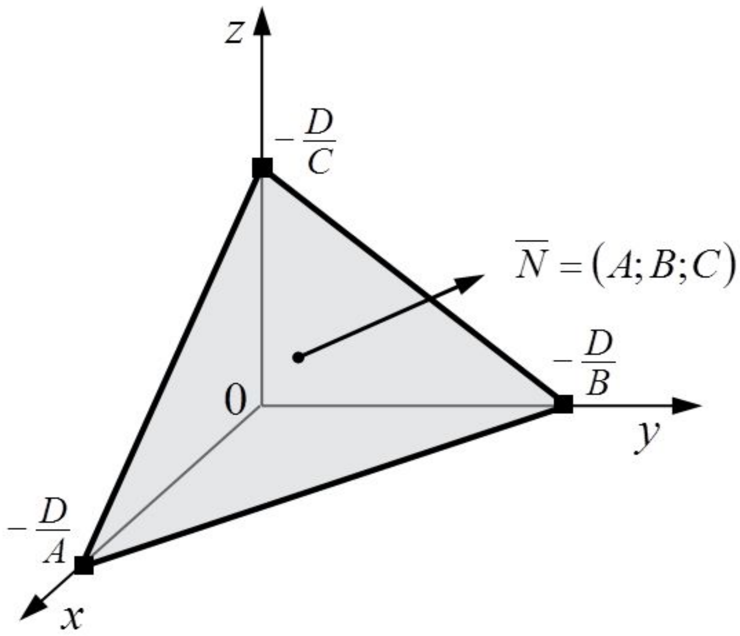
Теорема 1. **В декартовой системе координат любая плоскость определяется уравнением первой степени относительно переменных x, y, z.**

Перейдём к обратному утверждению. Рассмотрим уравнение (2): $Ax + By + Cz + D = 0$ при условии $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Этому уравнению заведомо удовлетворяют координаты хотя бы одной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, то есть выполняется равенство $(\tilde{2})$: $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Найдём разность (2) - $(\tilde{2})$ и получим $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Это уравнение (1), определяющее плоскость, проходящую через данную точку и перпендикулярную данному вектору.

Теорема 2. **Всякое уравнение первого порядка относительно переменных x, y, z вида (2) определяет в некоторой прямоугольной декартовой системе координат плоскость.**

Теоремы об общем уравнении плоскости



Если $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, уравнение (2) можно записать в виде

$$Ax + By + Cz = -D$$

или после деления

$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{y}{-D/C} = 1$$

Обозначив $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$,

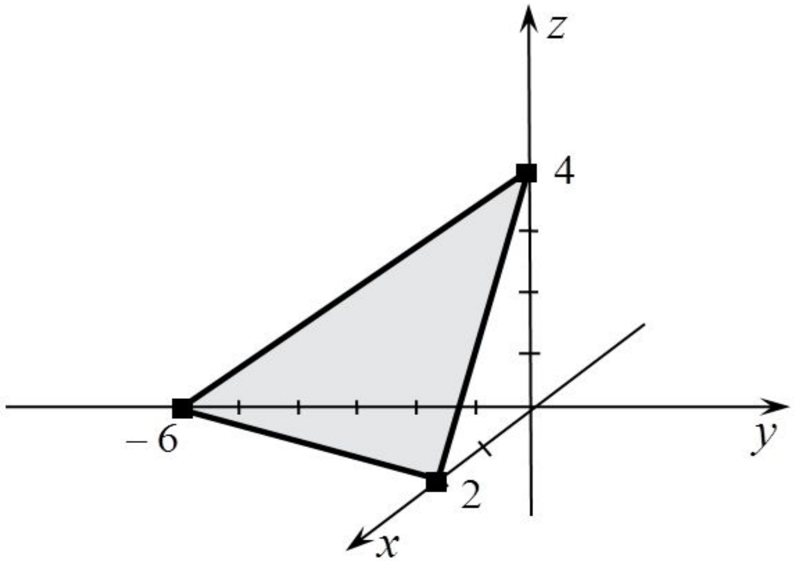
получаем **уравнение плоскости «в отрезках»**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (3)$$

Здесь a, b и c - величины отрезков, которые плоскость отсекает от осей координат

Уравнение плоскости в отрезках

Пример. Построить плоскость $6x-2y+3z-12=0$.



Решение. Приведем заданное уравнение к уравнению вида (3):

$$\frac{6x}{12}-\frac{2y}{12}+\frac{3z}{12}=1$$ или

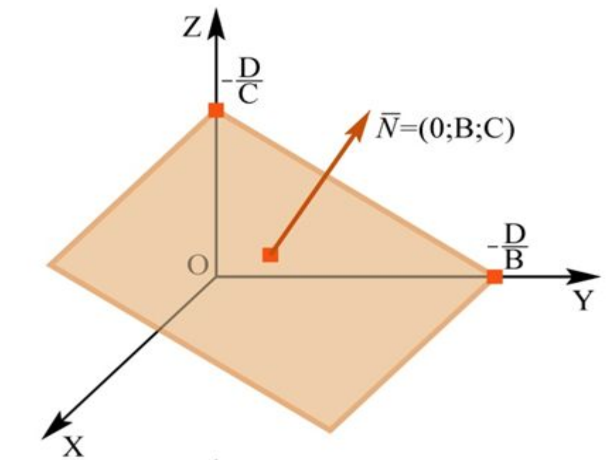
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{4}=1.$$

Отметим на оси Ox точку $M_1(2;0;0)$, на оси Oy точку $M_2(0;-6;0)$, на оси Oz точку $M_3(0;0;4)$, и через эти точки проведем искомую плоскость.

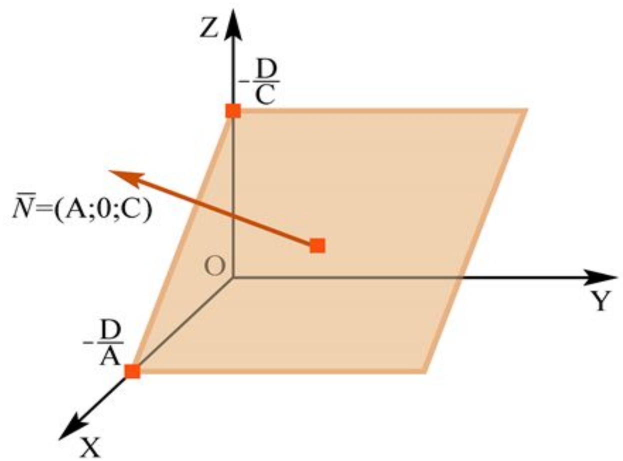
Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;2;3)$ и отсекающей от осей координат равные отрезки.

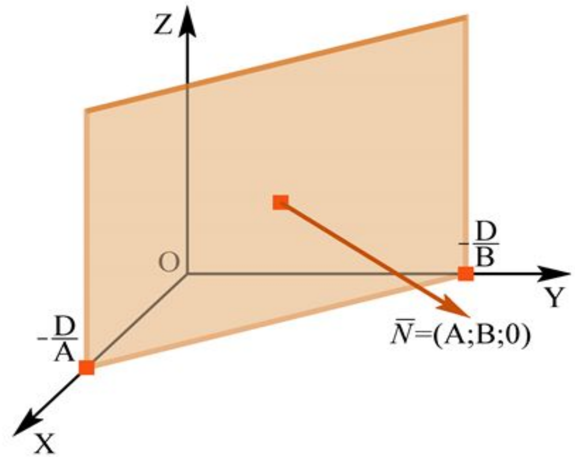
Решение. Так как $a=b=c$ по условию, то уравнение (3) можно переписать в виде $x+y+z=a$. Подставляя координаты точки $M_0(1;2;3)$, находим $a=6$. Следовательно, $x+y+z=6$ – уравнение искомой плоскости.

Примеры

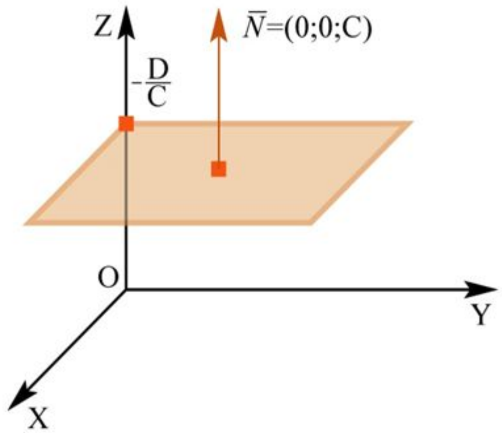


Рассмотрим случай, когда в уравнении (2) коэффициент $A = 0$. Тогда вектор нормали $\vec{N} = \{0; B; C\}$ оказывается перпендикулярен координатной оси Ox, а плоскость $By + Cz + D = 0$, тем самым, - параллельна этой оси. Аналогично – при нулевых коэффициентах B или C

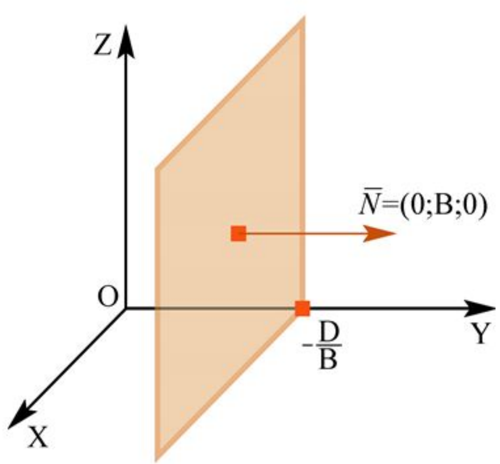


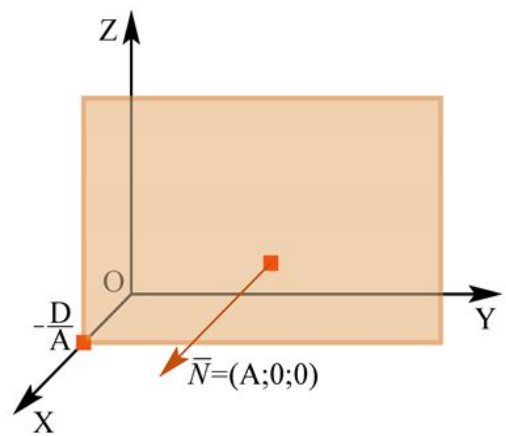


Плоскости, параллельные координатным осям

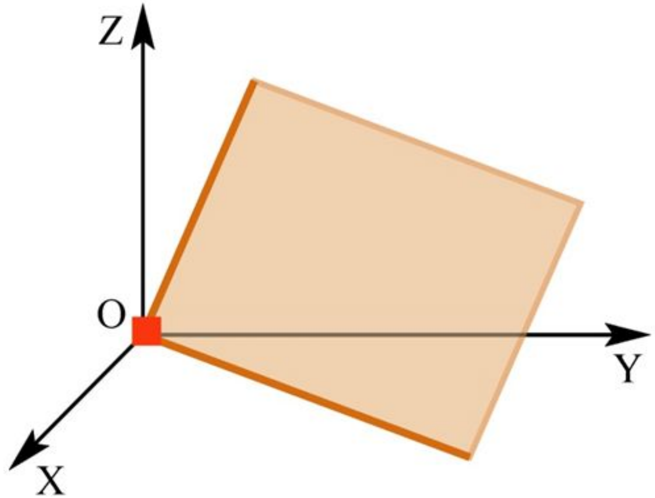


Если равны нулю два коэффициента перед переменными уравнения (2), например, $A = B = 0$, то вектор нормали $\vec{N} = \{0; 0; C\}$ перпендикулярен координатной плоскости xOy, а сама плоскость $Cz + D = 0$ – параллельна ей. Аналогично – при двух других нулевых коэффициентах перед переменными.

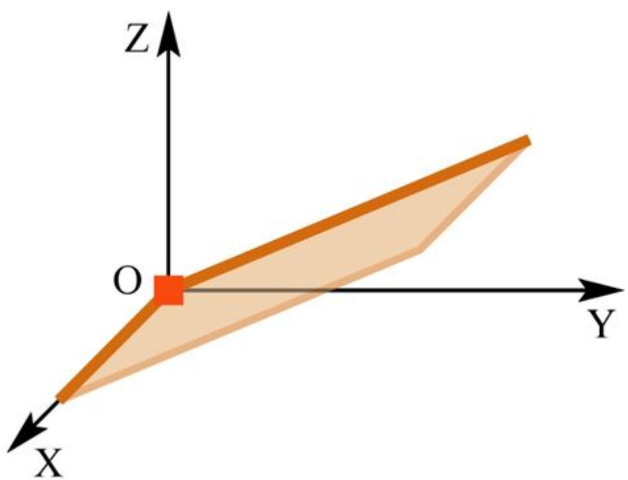




Плоскости, параллельные координатным плоскостям



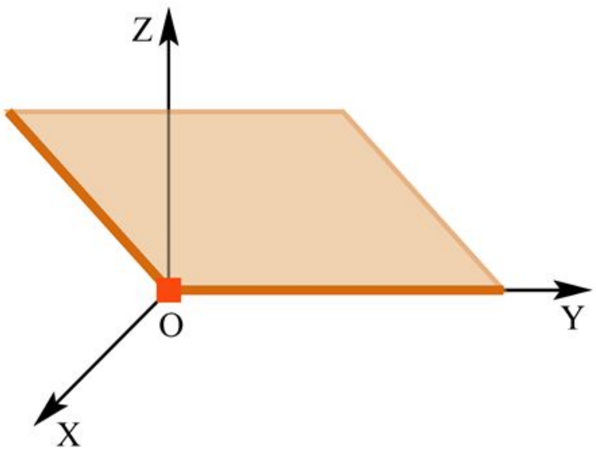
Если в уравнении (2) $D = 0$, то оно задаёт плоскость, проходящую через начало координат. Для её построения достаточно рассмотреть прямые, которые получаются при пересечении плоскости с координатными плоскостями.

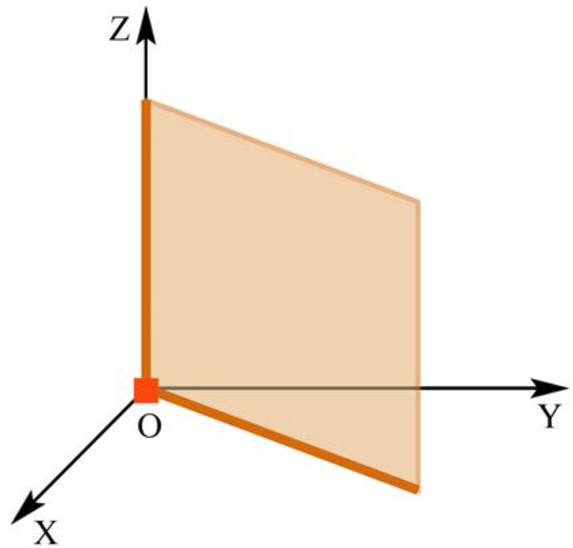


Допустим, что нулевыми оказываются коэффициент при одной из переменных и свободный коэффициент. Например, $A = D = 0$. В этом случае уравнение (2) приобретает вид $By + Cz = 0$ и задаёт плоскость, проходящую через ось Ox. Для её построения достаточно добавить ещё одну прямую – например, линию пересечения плоскости с координатной плоскостью yOz.

Плоскость, проходящая через начало координат

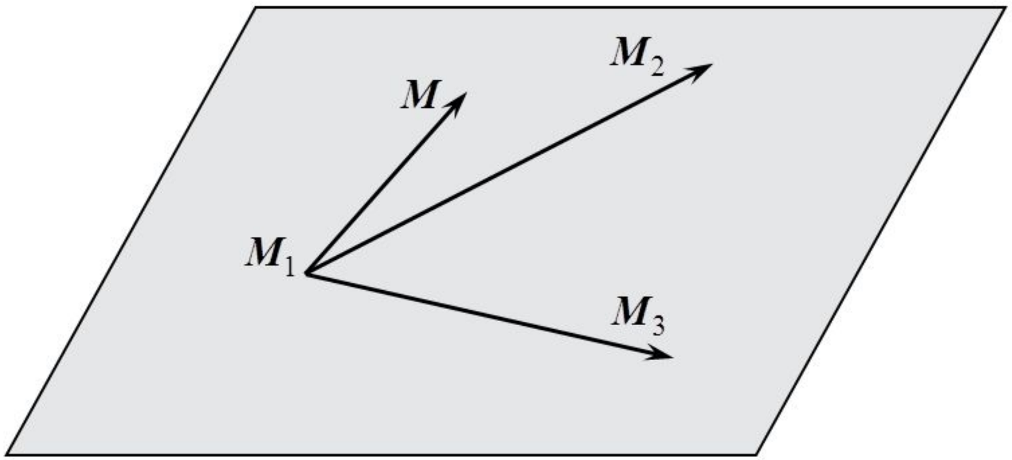
При $B = D = 0$ или $C = D = 0$ ситуации аналогичны.





Плоскости, проходящие через координатные оси

Выведем теперь уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки



$M_1(x_1;y_1;z_1)$

$M_2(x_2;y_2;z_2)$

$M_3(x_3;y_3;z_3)$

Рассмотрим произвольную точку плоскости $M(x;y;z)$.

Три вектора $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ компланарны, поэтому их смешанное произведение равно нулю:

$$\left(\overline{M_1M}\times\overline{M_1M_2}\right)\cdot\overline{M_1M_3}=0.$$

Плоскость, проходящая через три заданные точки

Координаты векторов $\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$;

$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ и $\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$

используем для записи смешанного произведения в координатах:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

В таком виде уравнение называется **уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки**. Раскрывая этот определитель, получим общее уравнение плоскости.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(-1;4;3)$ и $M_3(2;2;4)$.

Решение. Подставляем в уравнение (4) координаты заданных точек:

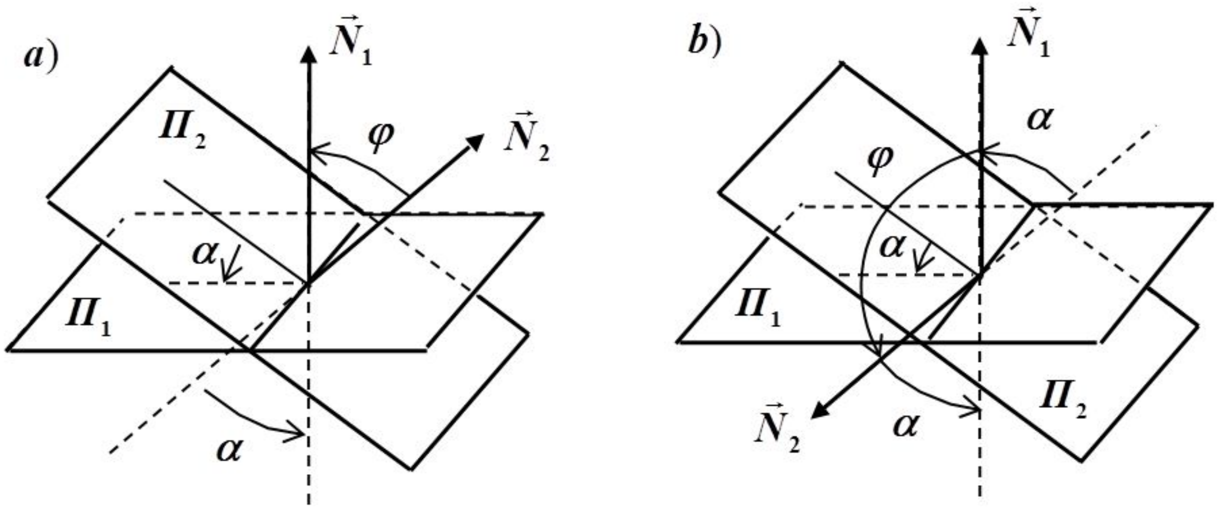
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 4-2 & 3-3 \\ 2-1 & 2-2 & 4-3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, приходим к уравнению $2\cdot(x-1) + 2\cdot(y-2) - 2\cdot(z-3) = 0$ или $x + y - z = 0$.

Пример

Пусть заданы две плоскости Π_1 и Π_2 уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$



Найдем угол между ними в предположении, что они пересекаются. Пересекаясь, плоскости образуют две пары равных двугранных углов. Углом α между плоскостями Π_1 и Π_2 будем считать меньший из этих двугранных углов. Выразим угол α между плоскостями через угол φ между нормальными к ним векторами $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$. Если угол φ острый, то $\alpha = \varphi$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Если же угол φ – тупой, то $\alpha = \pi - \varphi$, поэтому $\cos\alpha = -\cos\varphi$.

Угол между плоскостями

В итоге для вычисления угла α между плоскостями имеем формулу

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В частности, **условие перпендикулярности** и **условие параллельности двух плоскостей** имеют вид

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$$

$$\Pi_1 \text{ параллельна } \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \text{ коллинеарен } \vec{N}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

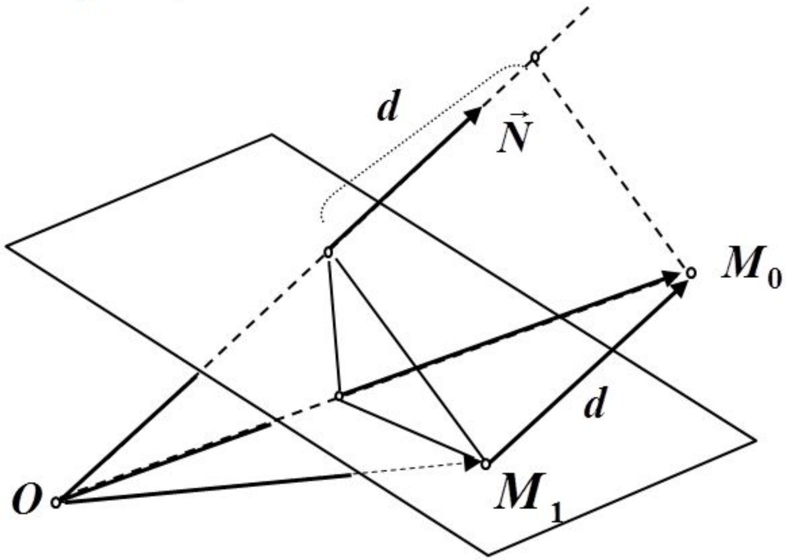
В последнем случае, если дополнительно выполняется равенство

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

то эти плоскости совпадают.

Взаимное расположение плоскостей

Пусть требуется вычислить расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.



Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – проекция точки M_0 на данную плоскость. Искомое расстояние равно абсолютной величине проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на направление нормального вектора $\vec{N} = \{A, B\}$

$$d = \left|Пр_{\vec{N}} \overrightarrow{M_1M_0}\right| = \frac{|\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{N}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{|\vec{N}|} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{|\vec{N}|}$$

Расстояние от точки до плоскости

Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ принадлежит плоскости, поэтому $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

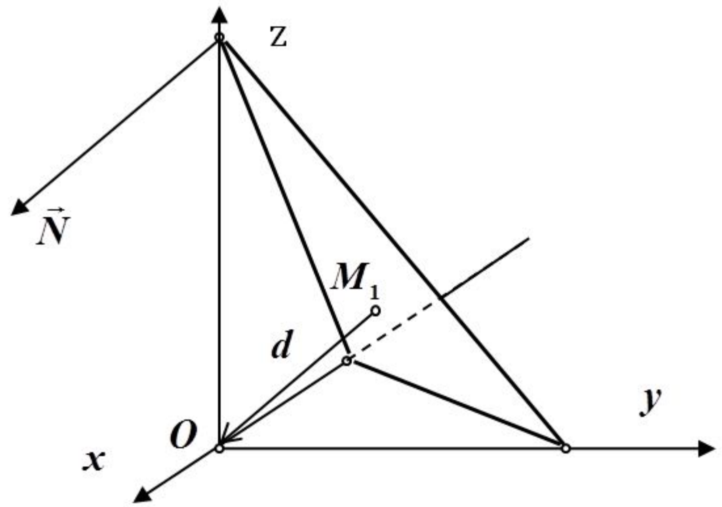
Найдём координаты точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Для этого выразим вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$ через найденное расстояние d и единичный вектор $\frac{1}{|\vec{N}|}\vec{N}$, нормальный к плоскости: $\overrightarrow{M_1M_0} = \pm\frac{d}{|\vec{N}|}\vec{N}$. Знак проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ определяется знаком выражения $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$, т.е., если $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D > 0$, то $\overrightarrow{M_1M_0} \uparrow\uparrow \vec{N}$ и в формуле нужно взять знак плюс.

Пример. Найти проекцию начала координат на плоскость $3x - 2y - z + 7 = 0$. Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – проекция точки $(0,0,0)$ на данную плоскость. Вычисляем расстояние точки $(0,0,0)$ до плоскости

$$d = \frac{|3\cdot 0 - 2\cdot 0 - 1\cdot 0 + 7|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|7|}{\sqrt{14}} \approx 1.9$$

Отсюда следует, что $\overrightarrow{M_1O} = \{-x_1, -y_1, -z_1\} \uparrow\uparrow \vec{N} = \{3, -2, -1\}$

Пример



Из равенства

$$\overline{M_1O} = \pm\frac{d}{|\vec{N}|}\vec{N},$$

взятого со знаком плюс, имеем

$$\{-x_1, -y_1, -z_1\} = \frac{7}{\sqrt{14}}\frac{\{3, -2, -1\}}{\sqrt{14}}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} -x_1 = \dfrac{3}{2} \\ -y_1 = -1 \\ -z_1 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Тем самым, координаты $M_1(-1,5; 1; 0,5)$.

Пример

1. Как определяют угол между прямыми на плоскости, если они заданы общими уравнениями?
2. Как определяют угол между прямыми на плоскости, если они заданы уравнениями с угловым коэффициентом?
3. Запишите условие совпадения прямых.
4. Выведите условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
5. Получите формулу для вычисления расстояния от точки до прямой на плоскости.
6. Поясните геометрический смысл линейных неравенств.
7. Получите уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
8. Получите общее уравнение плоскости.
9. Проведите исследование общего уравнения плоскости.
10. Докажите теоремы об общем уравнении плоскости.
11. Получите уравнение плоскости в отрезках.
12. Получите уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.
13. Как вычисляется угол между плоскостями?
14. Выведите условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
15. Получите формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости

Теоретические вопросы