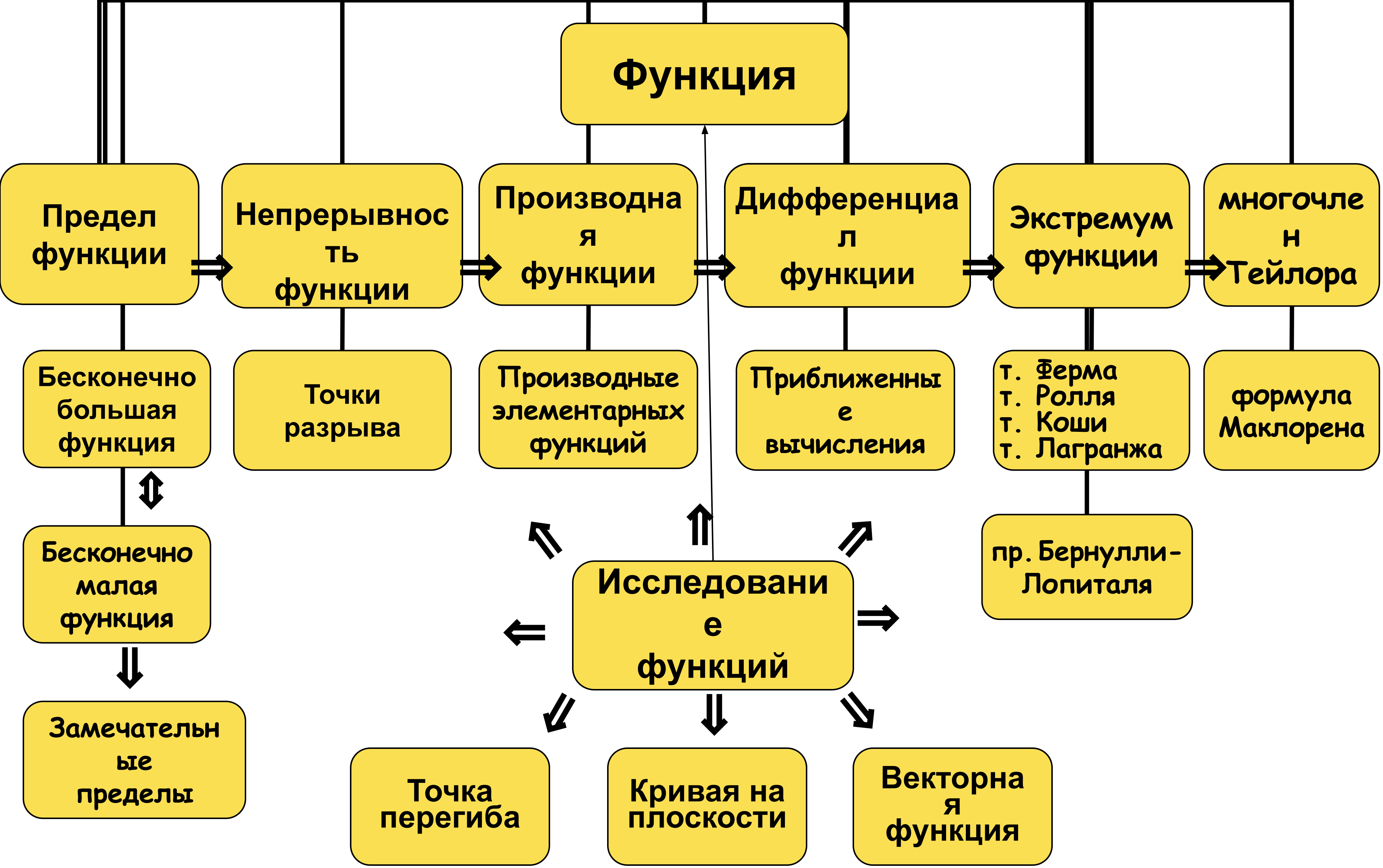
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Лекция – 1(2)


Функция
Предел функции
Непрерывность функции
Производная функции
Дифференциал функции
Экстремум функции
многочлен Тейлора
Бесконечно большая функция
Точки разрыва
Производные элементарных функций
Приближенные вычисления
т. Ферма
т. Ролля
т. Коши
т. Лагранжа
формула Маклорена
Бесконечно малая функция
пр. Бернулли-Лопиталя
Замечательные пределы
Исследование функций
Точка перегиба
Кривая на плоскости
Векторная функция

Предел функции

Определение 8. Пусть $a \in \mathbf{R}$. Окрестностью $O(a)$ точки a называется любой интервал (b, c), содержащий точку a.

Проколотой окрестностью $\dot{O}(a)$ точки a называется любая ее окрестность, из которой исключается сама точка a.

Определение 9. Пусть $\varepsilon > 0$, ε-окрестностью $O_\varepsilon(a)$ точки a называется интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Проколотой ε-окрестностью $\dot{O}_\varepsilon(a)$ точки a называется ее ε-окрестность, из которой исключена сама точка a. Окрестность ε и проколотую окрестность ε точки a можно задать в виде

$$O_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon),$$

$$\dot{O}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon).$$

Определение 10 (Коши). Число A называется *пределом функции* $f(x)$в точке a (или при $x \to a$), если функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ \ 0 < |x-a| < \delta \ \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Здесь принятые обозначения $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Заметим, что в самой точке a функция $f(x)$ может быть не определена.

Производная функции

Определение. Пусть ф. f(x) определена в окр. т. x

U(x)

Если существует предел

$$f'(x) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

то он наз. производной функции f в точке x.

Наряду с обозначением производной $f'(x)$ использ.

также: $\frac{df}{dx}(x)$, $\dot{f}(t)$

Дифференциал функции

Определение. Функция $y=f(x)$, определённая в $U(x_0)$, наз. дифференцируемой в точке x_0, если

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = A(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x\to 0$$

Величина $A(x_0)\cdot\Delta x$ наз. дифференциалом функции f в точке x_0 и обознач. $df(x_0)$ или dy.

Таким образом, $\Delta y = dy + o(\Delta x)$, $\Delta x\to 0$

т.е. дифференциал – это главная часть приращения при $\Delta x\to 0$ линейная относительно Δx.

Многочлен Тейлора

Таким образом, для функции $f(x)$, имеющей в т. x_0 непрерывную производную n порядка, справедлива ф-ла Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), \quad x \to x_0$$

или локальная ф-ла Тейлора.

Возникает вопрос о единственности полученного решения, а именно: возможно ли представление

$$f(x) = Q_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), \quad x \to x_0$$

с многочленом $Q_n(x)$, отличным от Тейлоровского.

Многочлен Тейлора наилучшим образом среди всех многочленов порядка n приближает $f(x)$ в $\overset{\circ}{U}(x_0)$ при $x \to x_0$.

Формула Маклорена

$\boxed{\text{Ф-ла Тейлора при } x_0 = 0 \text{ наз. ф-лой Маклорена}}$ (Maclaurin)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \quad (x \to 0)$$

Пример $\boxed{f(x) = e^x}$; $f^{(k)}(0) = e^x \big|_{x=0} = 1 \quad k = 1, 2, \ldots$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \to 0)$$

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} + o(x^n) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
функций одной переменной

Неопределённый интеграл

Определение. Функция $F(x)$ наз. первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если на этом интервале функция $F(x)$ дифференцируема и удовлетворяет тождеству $F'(x) = f(x)$ или

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Пример. $F(x) = x^2$, $f(x) = 2x$.

Очевидно, что если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на (a, b), то $F(x) + C$ – также первообразная.

Продолжение

Очевидно, что если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на (a,b), то $F(x)+C$ – также первообразная.

Теорема. Любые две первообразные для $f(x)$ на (a,b) различаются на константу.

Док-во. Пусть $F_1(x)$, $F_2(x)$ – первообразные для $f(x)$ на (a,b), обозначим $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$, тогда $\forall x \in (a,b)$

$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Из теоремы Лагранжа $\Rightarrow \left(\Phi'(x) \equiv 0 \Rightarrow \Phi(x) \equiv C \right)$ ►

Определение. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на (a, b) наз. неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на (a, b). Обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

$f(x)$ – подынтегральная функция

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение. $f(x)dx = dF(x)$

Неопределённое интегрирование – операция, обратная дифференцированию (с точностью до константы).

Свойства неопределённого интеграла

1 1. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$, действительно

$$d\int f(x)\,dx = d\{F(x)+C\} = dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

2 2. $\int dF(x) = F(x) + C$, действительно

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Таким образом, знаки интеграла и дифференциала взаимно уничтожаются (если отбросить постоянную C)

3 $$\int A f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx \qquad (A \neq 0)$$

4 $$\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Таблица интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$

3. $\int x^{-1} dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$

4. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C, \quad a > 0, \; a \neq 1$

4.' $\int e^{x} dx = e^{x} + C$

Продолжение

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ | в естеств ОДЗ.

!

7. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$, $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$

8. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$, $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$. $x \neq 0$

9. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, $a > 0$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $a > 0$

11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$, $a \neq 0$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C$, $a \neq 0$

Интегрирование подстановкой и заменой переменной

$$I = \int f(x)\,dx \text{ на } (a, b)$$

Пусть $x = x(t)$ – строго монотонная и дифф. на (a, b)

$\Rightarrow$ $t = t(x)$ – обратная функция

Преобразуем подынтегральное выражение с помощью подстановки $x = x(t)$:

$$f(x)\,dx = f(x(t))\,x'(t)\,dt = u(t)\,dt$$

Пусть $U(t)$ – первообразная для $u(t)$, тогда

$$I = \int f(x)\,dx = \int u(t)\,dt = U(t) + C = U(t(x)) + C$$

– формула интегрирования подстановкой.

Эффективность её применения связана с удачным выбором функции $x = x(t)$.

Окончательно справедливость формулы может быть явно установлена дифференцированием:

$$\frac{d}{dx}\{U(t(x)) + C\} = U'(t(x)) \cdot t'(x) = u(t(x))\,t'(x) =$$

$$= f(x)\left[x'(t) \cdot t'(x)\right] = f(x)$$

$$u = f \cdot \frac{dx}{dt}$$

Пример

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\left|\begin{array}{l}\text{ОДЗ}: |x|\le a\\ x=a\sin t \quad |t|\le\frac{\pi}{2}\\ t=\arcsin\frac{x}{a}\end{array}\right|=\int\frac{a\cos t\,dt}{\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}}=\int\frac{\cancel{a\cos t}\,dt}{\cancel{a\cos t}}=t=\arcsin\frac{x}{a}$$

Иногда более целесообразна замена $t=t(x)$.

Например,

$$I=\int\sin^3 x\cos x\,dx \qquad \Big|\; t=\sin x$$

$$I=\int t^3\,dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\sin^4 x}{4}+C$$

Продолжение

А проще сразу подводить под дифференциал

$$I=\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int \sin^3 x\, d\sin x = \frac{\sin^4 x}{4}+C$$

1 Примеры. 1) $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

2 $$\int \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$$

3 $$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

4 $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

Продолжение

Пример 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int (5x-2)^{-1/2}\, d(5x-2) =$

$$= \frac{1}{5}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C = \frac{1}{5}\frac{(5x-2)^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C,$$

где было положено $u = 5x - 2$. Использовались правило 4) и табличный интеграл I.

Пример 3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^4}\right) + C.$

Неявно подразумевалось $u = x^2$, причем применялись правило 4) и табличный интеграл V.

Пример 4. $\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\,d(x^3) = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$

в силу правила 4) и табличного интеграла VII.

Продолжение

2°. Тригонометрические подстановки.

1) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2 - x^2}$, то обычно полагают $x = a\sin t$; отсюда

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t.$$

2) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 - a^2}$, то полагают $x = a\sec t$; отсюда

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\,\mathrm{tg}\,t.$$

3) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 + a^2}$, то полагают $x = a\,\mathrm{tg}\,t$; отсюда

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a\sec t.$$

Интегрирование по частям

$$d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du$$

$$u\,dv = d(u\cdot v) - v\cdot du$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \iff \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

Примеры

1) $\int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot d\ln x = x\ln x - x + C$

2) $\int x\cos x\, dx = \int x \cdot d\sin x = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx =$

$= x \cdot \sin x + \cos x + C$

3) $\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2 =$

$= x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2\int x\, de^x =$

$= x^2 e^x - 2\left\{x e^x - \int e^x dx\right\} = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$

$= (x^2 - 2x + 2) e^x + C.$

Реккурентные соотношения

$I_n = \int x^n e^x dx$

$J_n = \int x^n \cos x\, dx$, $K_n = \int x^n \sin x\, dx$

. Простейшие интегралы, содержащие квадратный трехчлен

1°. Интегралы вида $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$. Основной прием вычисления — приведение квадратного трехчлена к виду

$$ax^2 + bx + c = a(x + k)^2 + l, \tag{1}$$

1

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad a \neq 0$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right\} = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm h^2\right\}$$

$$t = x + \frac{b}{2a}, \quad dt = dx, \quad h = \sqrt{\left|\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right|}$$

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm h^2} = \frac{1}{a} \cdot \begin{cases} \frac{1}{h}\operatorname{arctg}\frac{t}{h} + C, & (+) \\ \frac{1}{2h}\ln\left|\frac{t-h}{t+h}\right| + C, & (-) \end{cases}$$

Пример

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$$

2 . Интегралы вида $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$. Путем выделения из квадратного трехчлена полного квадрата данный интеграл сводится к одному из следующих двух основных интегралов

1) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \ (a>0);$

2) $\int \sqrt{x^2+A}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C.$

См. слайд 23

3

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{d\cancel{x}t}{\sqrt{a\{t^2\pm h^2\}}}$$

$\underline{a>0}$

$$I=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm h^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm h^2}\right|+C$$

$\underline{a<0}$

$$\Longrightarrow\quad I=\int\frac{dt}{\sqrt{a(t^2-h^2)}}=$$

<u>В противном случае</u>

$\underline{a(t^2+h^2)<0}$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{|a|(h^2-t^2)}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dt}{\sqrt{h^2-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{t}{h}+C$$

Обобщенные случаи

4

$$I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}\, dx$$

Основная идея:

$$(Ax+B)\,dx = \underbrace{M\,d(ax^2+bx+c)}_{\text{линейно по } x} + N\cdot dx \quad \Big| \quad \underline{M, N \text{ – констант}}$$

$$(Ax+B)\,dx = M(2ax+b)\,dx + N\cdot dx$$

$$(\underline{A}x+\underline{\underline{B}})\,dx = (\underline{2aM}\,x + \underline{\underline{Mb}} + \underline{\underline{N}})\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A = 2aM \\ B = Mb + N \end{cases} \quad \Big| \quad M = \frac{A}{2a}, \quad N = B - Mb = B - \frac{Ab}{2a}$$

Продолжение

5

$$I = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$(Ax+B)\,dx = M\,d(ax^2+bx+c) + N\,dx$$

$$M = \frac{A}{2a}, \quad N = B - \frac{Ab}{2a}$$

$$I = M\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + N\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$= 2M\sqrt{ax^2+bx+c} + N\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Продолжение

6

$$I = \int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$t = \frac{1}{mx+n}, \quad mx+n = \frac{1}{t}$$

$$x = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{t} - n\right); \quad dx = -\frac{dt}{mt^2}$$

$$I = -\int \frac{t\,dt}{mt^2\sqrt{\frac{a}{m^2}\left(\frac{1}{t}-n\right)^2 + \frac{b}{m}\left(\frac{1}{t}-n\right) + c}}$$

1/t = z

$$= -\frac{1}{m}\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{P_2(t)}{t^2}}} = -\frac{1}{m}\int \frac{dt}{\sqrt{P_2(t)}}.$$

Спасибо за внимание !