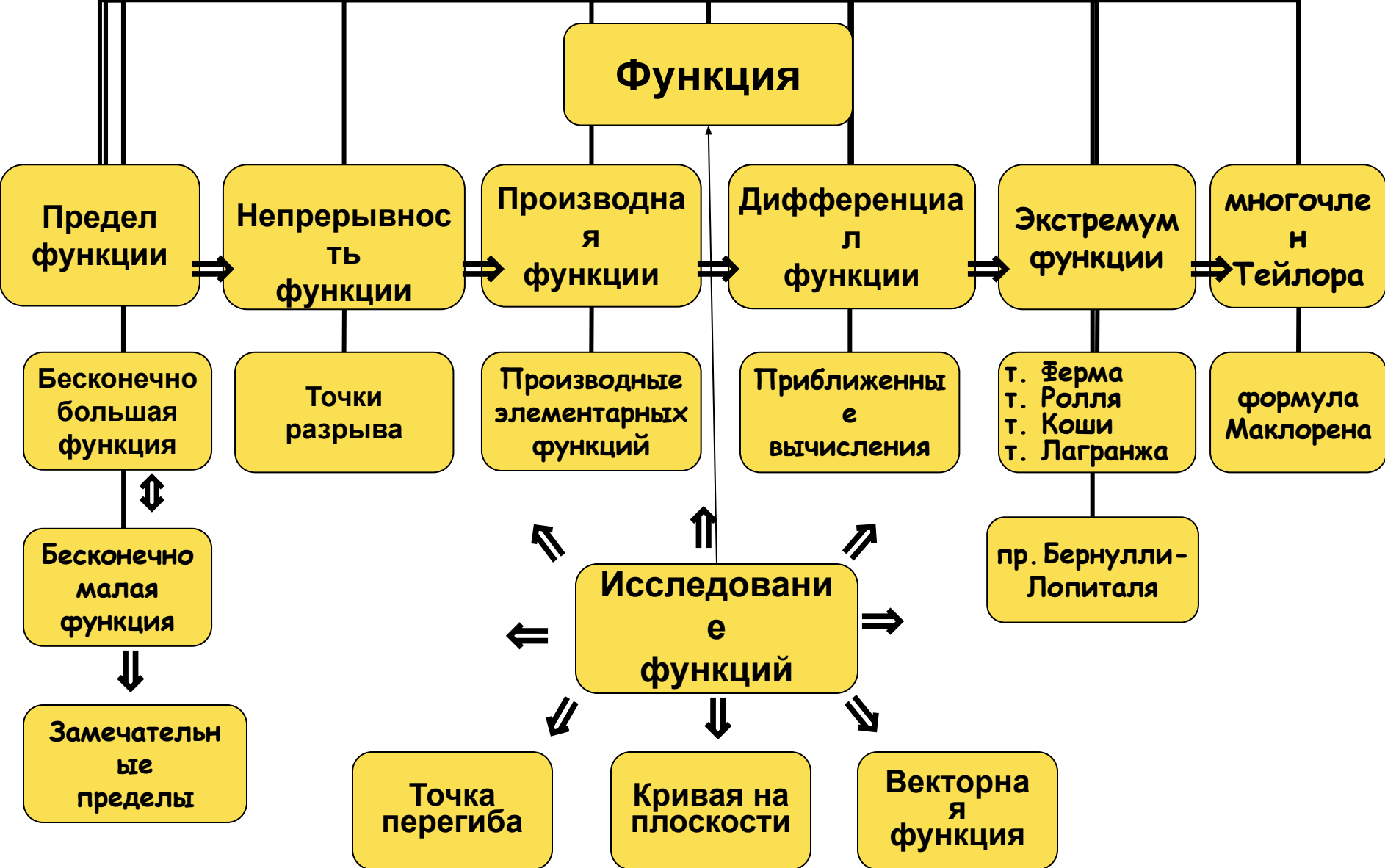


A sunset over the ocean with a ship silhouette. The sun is low on the horizon, casting a golden glow across the sky and water. A small silhouette of a ship is visible on the horizon line.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Лекция – 1(2)



Предел функции

Определение 8. Пусть $a \in \mathbf{R}$. Окрестностью $O(a)$ точки a называется любой интервал (b, c) , содержащий точку a .

Проколотой окрестностью $\dot{O}(a)$ точки a называется любая ее окрестность, из которой исключается сама точка a .

Определение 9. Пусть $\varepsilon > 0$, ε -окрестностью $O_\varepsilon(a)$ точки a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Проколотой ε -окрестностью $\dot{O}_\varepsilon(a)$ точки a называется ее ε -окрестность, из которой исключена сама точка a . Окрестность ε и проколотую окрестность ε точки a можно задать в виде

$$O_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

$$\dot{O}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon).$$

Определение 10 (Коши). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a (или при $x \rightarrow a$), если функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Здесь принятые обозначения $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$.

Заметим, что в самой точке a функция $f(x)$ может быть не определена.

Производная функции

Определение. Пусть ф. $f(x)$ определена в окр. т. x

$U(x)$

Если существует предел

$$f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

то он наз. производной функции f в точке x .

Наряду с обозначением производной $f'(x)$ используем.

Также: $\frac{df}{dx}(x)$, $\dot{f}(t)$

Дифференциал функции

Определение. Функция $y = f(x)$, определённая в $U(x_0)$, наз. дифференцируемой в точке x_0 , если

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Величина $A(x_0) \cdot \Delta x$ наз. дифференциалом функции f в точке x_0 и обознач. $df(x_0)$ или dy .

Таким образом, $\Delta y = dy + o(\Delta x)$, $\Delta x \rightarrow 0$

т.е. дифференциал — это главная часть приращения при $\Delta x \rightarrow 0$ линейная относительно Δx .

Многочлен Тейлора

Таким образом, для функции $f(x)$, имеющей в т. x_0 непрерывную производную n порядка, справедлива ф-ла Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0$$

или локальная ф-ла Тейлора.

Возникает вопрос о единственности полученного решения, а именно: возможно ли представление

$$f(x) = Q_n(x) + o((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0$$

с многочленом $Q_n(x)$, отличным от Тейлоровского.

Многочлен Тейлора наилучшим образом среди всех многочленов порядка n приближает $f(x)$ в $\bar{U}(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$.

Формула Маклорена

Ф-ла Тейлора при $x_0 = 0$ наз. ф-лой Маклорена

(Маслаичин)

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

Пример $f(x) = e^x$; $f^{(k)}(0) = e^x \Big|_{x=0} = 1 \quad k=1, 2, \dots$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} + o(x^n) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$


ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ функций одной переменной

Неопределённый интеграл

Определение. Функция $F(x)$ наз. первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b) , если на этом интервале функция $F(x)$ дифференцируема и удовлетворяет тождеству $F'(x) = f(x)$ или

$$dF(x) = f(x) dx.$$

Пример. $F(x) = x^2$, $f(x) = 2x$.

Очевидно, что если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на (a, b) , то $F(x) + C$ - также первообразная. 

Продолжение

Очевидно, что если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на (a, b) , то $F(x) + C$ - также первообразная.

Теорема. Любые две первообразные для $f(x)$ на (a, b) различаются на константу.

Док-во. Пусть $F_1(x), F_2(x)$ - первообразные для $f(x)$ на (a, b) , обозначим $\bar{\Phi}(x) = F_1(x) - F_2(x)$, тогда $\forall x \in (a, b)$

$$\bar{\Phi}'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Из теоремы Лагранжа $\Rightarrow (\bar{\Phi}'(x) \equiv 0 \Rightarrow \bar{\Phi}(x) \equiv C) \blacktriangleright$

Определение. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на (a, b) наз. неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на (a, b) . Обозначается

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad F'(x) = f(x)$$

$f(x)$ - подынтегральная функция

$f(x) dx$ - подынтегральное выражение. $f(x) dx = dF(x)$

Неопределённое интегрирование - операция, обратная дифференцированию (с точностью до константы).

Свойства неопределённого интеграла

1. $d \int f(x) dx = f(x) dx$, действительно
 $d \int f(x) dx = d \{ F(x) + C \} = dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C$, действительно

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C$$

Таким образом, знаки интеграла и дифференциала взаимно уничтожаются (если отбросить постоянную C)

3. $\int A f(x) dx = A \int f(x) dx$ ($A \neq 0$)

4. $\int \{ f(x) + g(x) \} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Таблица интегралов

$$1. \int 0 \cdot dx = C$$

$$2. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$3. \int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$4'. \int e^x dx = e^x + C$$



$$5. \int \sin x \, dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad \left| \begin{array}{l} \text{всегда} \\ \text{ОДЗ.} \end{array} \right.$$

$$7. \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C, \quad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C. \quad \underline{x \neq 0}$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C, \quad a \neq 0$$



Интегрирование подстановкой и заменой переменной

$$I = \int f(x) dx \quad \text{на } (a, b)$$

Пусть $x = x(t)$ - строго монотонная и диффр. на (a, b)

$\Rightarrow t = t(x)$ - обратная функция

Преобразуем подынтегральное выражение с помощью подстановки $x = x(t)$:

$$f(x) dx = f(x(t)) x'(t) dt = u(t) dt$$

Пусть $U(t)$ - первообразная для $u(t)$, тогда

$$I = \int f(x) dx = \int u(t) dt = U(t) + C = U(t(x)) + C$$

- формула интегрирования подстановкой

Эффективность её применения связана с удачным выбором функции $x = x(t)$.

Одновременно справедливость формулы может быть легко установлена дифференцированием:

$$\frac{d}{dx} \{ U(t(x)) + C \} = U'(t(x)) \cdot t'(x) = u(t(x)) t'(x) =$$

$$= f(x) [x'(t) \cdot t'(x)] = f(x)$$

$$u = f \cdot \frac{dx}{dt}$$

Пример

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left. \begin{array}{l} \text{ОДЗ: } |x| \leq a \\ x = a \sin t \quad |t| \leq \frac{\pi}{2} \\ t = \arcsin \frac{x}{a} \end{array} \right| = \int \frac{a \cos t dt}{\sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)}} = \int \frac{a \cos t dt}{a \cos t} = t = \arcsin \frac{x}{a}$$

Иногда более целесообразна замена $t = t(x)$.

Например,

$$I = \int \sin^3 x \cos x dx \quad \left| \begin{array}{l} t = \sin x \end{array} \right.$$

$$I = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C \quad \longrightarrow$$

А проще сразу поводить под дифференциал

$$I = \int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d \sin x = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

1) Примеры. 1) $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

2) $\int \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C$

3) $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C$

4) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} =$

$$= \int \frac{d(\operatorname{tg} \frac{x}{2})}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$



Продолжение

$$\begin{aligned} \text{Пример 2. } \int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} &= \frac{1}{5} \int (5x-2)^{-1/2} d(5x-2) = \\ &= \frac{1}{5} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = \frac{1(5x-2)^{1/2}}{5 \cdot 1/2} + C = \frac{2}{5} \sqrt{5x-2} + C, \end{aligned}$$

где было положено $u = 5x - 2$. Использовались правило 4) и табличный интеграл I.

$$\text{Пример 3. } \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) + C.$$

Неявно подразумевалось $u = x^2$, причем применялись правило 4) и табличный интеграл V.

$$\text{Пример 4. } \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} d(x^3) = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

в силу правила 4) и табличного интеграла VII.

Продолжение

2°. Тригонометрические подстановки.

1) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2 - x^2}$, то обычно полагают $x = a \sin t$; отсюда

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t.$$

2) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 - a^2}$, то полагают $x = a \sec t$; отсюда

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} t.$$

3) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 + a^2}$, то полагают $x = a \operatorname{tg} t$; отсюда

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec t.$$

Интегрирование по частям

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

$$u \, dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \quad \Leftrightarrow \quad \int u(x)v'(x) \, dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) \, dx$$

Примеры

$$1) \int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot d \ln x = x \ln x - x + C$$

$$2) \int x \cos x \, dx = \int x \cdot d \sin x = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx = \\ = x \cdot \sin x + \cos x + C$$

$$3) \int x^2 e^x \, dx = \int x^2 d e^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2 = \\ = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x d e^x = \\ = x^2 e^x - 2 \left\{ x e^x - \int e^x dx \right\} = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + C \\ = (x^2 - 2x + 2) e^x + C.$$

Рекуррентные соотношения

$$I_n = \int x^n e^x \, dx$$

$$J_n = \int x^n \cos x \, dx, \quad K_n = \int x^n \sin x \, dx$$

Простейшие интегралы, содержащие квадратный трехчлен

1°. Интегралы вида $\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx$. Основной прием вычисления — приведение квадратного трехчлена к виду

$$ax^2 + bx + c = a(x + k)^2 + l, \quad (1)$$

1

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad a \neq 0$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right\} = a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm h^2 \right\} \end{aligned}$$

$$t = x + \frac{b}{2a}, \quad dt = dx, \quad h = \sqrt{\left| \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right|}$$

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm h^2} = \frac{1}{a} \cdot \begin{cases} \frac{1}{h} \operatorname{arctg} \frac{t}{h} + C, & (+) \\ \frac{1}{2h} \ln \left| \frac{t-h}{t+h} \right| + C, & (-) \end{cases}$$

Пример

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + (\sqrt{3})^2} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$$

2

Интегралы вида $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$. Путем выделения из квадратного трехчлена полного квадрата данный интеграл сводится к одному из следующих двух основных интегралов

$$1) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0);$$

$$2) \int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + A}| + C.$$

3

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{a\{t^2 \pm h^2\}}}$$

$$\underline{a > 0} \quad I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm h^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| t + \sqrt{t^2 \pm h^2} \right| + C$$

$$\underline{a < 0} \quad \Rightarrow \quad I = \int \frac{dt}{\sqrt{a(t^2 - h^2)}} = \left. \begin{array}{l} \text{В чрговном случае} \\ a(t^2 - h^2) < 0 \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{|a|(h^2 - t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dt}{\sqrt{h^2 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{t}{h} + C$$

Обобщенные случаи

4

$$I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$$

Основная идея:

$$(Ax + B) dx = \underbrace{M d(ax^2 + bx + c)}_{\text{мкэйтө по } x} + N \cdot dx \quad \left| \frac{M, N - \text{константы}}{\right.}$$

$$(Ax + B) dx = M(2ax + b) dx + N \cdot dx$$

$$\underline{A}x + \underline{B} = \underline{2aM}x + \underline{Mb} + \underline{N} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A = 2aM \\ B = Mb + N \end{cases} \quad \left| \quad M = \frac{A}{2a}, \quad N = B - Mb = B - \frac{Ab}{2a} \right.$$

5

$$\bar{I} = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

$$(Ax + B) dx = M d(ax^2 + bx + c) + N dx$$

$$M = \frac{A}{2a}, \quad N = B - \frac{AB}{2a}$$

$$\bar{I} = M \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + N \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$= 2M \sqrt{ax^2 + bx + c} + N \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

6

$$\bar{I} = \int \frac{dx}{(mx+n) \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$t = \frac{1}{mx+n}, \quad mx+n = \frac{1}{t}$$

$$x = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{t} - n \right); \quad dx = - \frac{dt}{mt^2}$$

$$\bar{I} = - \int \frac{t dt}{mt^2 \sqrt{\frac{a}{m^2} \left(\frac{1}{t} - n \right)^2 + \frac{b}{m} \left(\frac{1}{t} - n \right) + c}}$$

$$1/t = z$$

$$= - \frac{1}{m} \int \frac{dt}{t \sqrt{\frac{P_2(t)}{t^2}}} = - \frac{1}{m} \int \frac{dt}{\sqrt{P_2(t)}}$$

An aerial, high-angle photograph of a ship's deck during a storm. The sea is dark blue with white-capped waves crashing against the ship. The deck is green and white, with various pieces of equipment, including a large yellow crane and several spools of rope. A white text box is overlaid on the right side of the image.

Спасибо за внимание !