Занятие №3. Технология подготовки учащихся к овладению функционально-графическими методами решения задач с параметрами.

Прокофьев Александр Александрович

Зав.каф. ВМ-1, НИУ МИЭТ

Содержание курса

№	Тема занятий
1	Основные структурные изменения и особенности проведения государственной аттестации учащихся в 2015. Технология подготовки учащихся к овладению алгебраическими методами решения задач с параметрами.
2	Технология подготовки учащихся к овладению функциональными методами решения задач с параметрами.
3	Технология подготовки учащихся к овладению функционально-графическими методами решения задач с параметрами.
4	Технология подготовки учащихся к овладению геометрическими методами решения задач с параметрами.
5	Технология подготовки учащихся к овладению решения задач с параметрами комбинированными методами.
Итоговая аттестация	По результатам посещаемости и успешности выполнения контрольных работ.

Содержание

- О функционально-графических методах решения задач с параметрами
- ЕГЭ 2014-2015 (что было и что предлагают в материалах методических рекомендаций ФИПИ)
- Основные типы задач
- Технология подготовки учащихся к овладению функционально-графическими методами решения задач с параметрами
- Печатные и электронные ресурсы.

О функционально-графическом методе решения задач с параметрами

В задачах (уравнение, неравенство, система уравнений или неравенств) вида $F(x,a)\vee 0$ или $f(x,a)\vee g(x,a)$ или $\begin{cases} F_1(x,y,a)\vee 0, \\ F_2(x,y,a)\vee 0, \end{cases}$ (1)

где символ $\vee$ заменяет один из знаков $=, >, <, \geq, \leq,$ часто ставится вопрос исследовать (1) на: – наличие решений или их отсутствие, – единственность решения или наличие определенного количества решений, – наличие решений определенного типа и т.д.

Для решения подобных задачи можно применять графический метод решения (*метод наглядной графической интерпретации*), основанный на использовании графических образов, входящих в (1) выражений.

Графиком функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$ *называется множество всех точек координатной плоскости* Oxy *вида* $(x, f(x))$, *где* $x \in D(f)$.

Статья. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Использование метода наглядной графической интерпретации при решении уравнений и неравенств с параметрами. «Математика в школе», − М.: «Школьная пресса», 2011. №1. – С. 18-26, 2011. №2. – С. 25-32.

О функционально-графических методах решения задач с параметрами

Графический метод применительно к рассматриваемым задачам допускает несколько интерпретаций, имеющих общее название ***метод сечений***. В зависимости от того, какая роль отводится параметру при решении задачи с параметрами с использованием этого метода можно выделить два основных графических приема.

- Построение графического образа на координатной плоскости ***Oxy***. В этом случае (1) приводится, если это возможно, к виду

$$f_1(x) \vee g_1(x,a) \text{ или } \begin{cases} F(x,y) \vee 0, \\ G(x,y,a) \vee 0. \end{cases}$$

- построение графического образа на координатной плоскости ***Oxa***. В этом случае (1) приводится, если это возможно, к виду

$$f_2(x) \vee a.$$

Статья. Прокофьев А.А., Соколова Т.В. Обоснование применения графических методов решения задач с параметрами. «Математика в школе», − М.: «Школьная пресса», 2014, № 6. − С. 21–28; 2014, № 7. − С. 30–36.

Плюсы и минусы графических методов в сравнении с аналитическими методами

Применение графических методов оправдано в случаях, когда в условии задачи ставится вопрос о количестве решений в зависимости от значений параметра или нахождения значений параметра, при которых решение отсутствует или единственно.

Плюсы графических методов:

- во-первых, построив графический образ, можно определить, как влияет на них и, соответственно, на решение изменение параметра;
- во-вторых, иногда график дает возможность сформулировать аналитически необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи;
- в-третьих, ряд теорем позволяет на основании графической информации делать вполне строгие и обоснованные

Аналитический аппарат

1. **Теорема Коши.** Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ принимает два различных значения A и B, то она принимает и любое значение C, находящееся между ними (т. е. $A < C < B$).
2. Следствия из теоремы Коши:

   а) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она принимает на нем любые значения, лежащие между наибольшим и наименьшим значениями $f(x)$ на $[a;b]$.

   б) Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ или на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ в двух точках этого промежутка имеет значения разных знаков, то в некоторой точке x, расположенной между ними, функция принимает значение, равное нулю.

3. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ монотонно возрастает, а непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $\varphi(x)$ монотонно убывает, и существует точка пересечения x_0 графиков этих функций (т. е. $\varphi(x_0) = f(x_0)$), то такая точка единственна.
4. Если на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ возрастает, а функция $\varphi(x)$ убывает, причем $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и $f(a) < \varphi(a)$, а $f(b) > \varphi(b)$, то на $[a;b]$ существует единственная точка пересечения графиков $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Суть метода сечений для решения уравнений

В случаях исследования уравнения на наличие корней или их количество в зависимости от значений параметра применяют ***метод сечений***, состоящий в следующем.

Исходное уравнение приводится к виду $f(x) = g(x, a)$. Далее в системе координат Oxy строится график левой части и определяется количество точек его пересечения семейством графиков функций $y_a(x) = g(x, a)$ в зависимости от значений параметра a.

Другая разновидность этого метода состоит в том, что исходное уравнение приводится к виду $a = f(x)$. Далее в системе координат Oxa строится график правой части и определяется количество точек его пересечения семейством графиков функций $a = \mathrm{const}$.

На начальном этапе обучения (8-9 класс) графическому методу решения уравнений с параметром в качестве семейства функций вида $y_a(x) = g(x, a)$ используются линейные функции:

$y_a(x) = a$ – семейство прямых, параллельных оси абсцисс;

$y_a(x) = x + a$ – семейство прямых, параллельных прямой $y = x$;

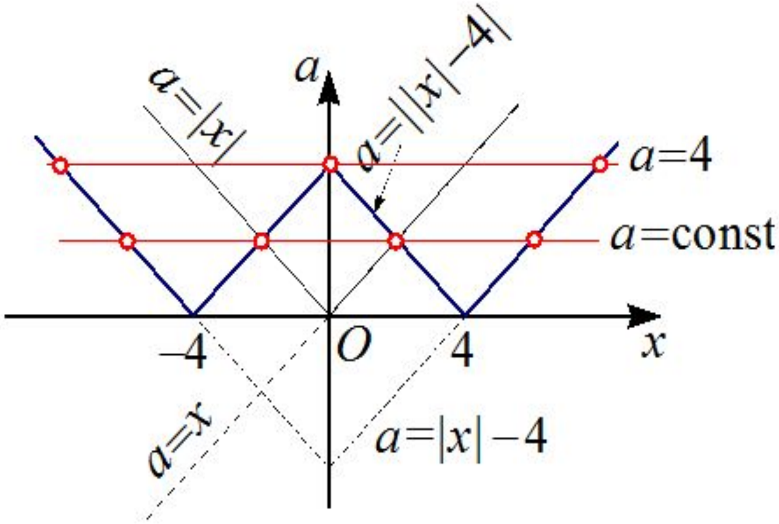
$y_a(x) = ax$ – семейство прямых («пучок»), проходящих через начало координат.

Плоскость *Оха*

Пример. Исследовать на количество корней уравнение $||x|-4| = a$ в зависимости от значений параметра a.

Решение. Выполняя элементарные преобразования

$$\Gamma_x \to \Gamma_{|x|} \to \Gamma_{|x|-4} \to \Gamma_{||x|-4|}$$



строим график функции $f(x) = ||x|-4|$.

Проводя прямые $a = \text{const}$, убеждаемся, что при $a < 0$ точек пересечения с графиком функции $f(x) = ||x|-4|$ нет; при $a = 0$ – две точки; при $0 < a < 4$ – четыре; при $a = 4$ – три; при $a > 4$ – две.

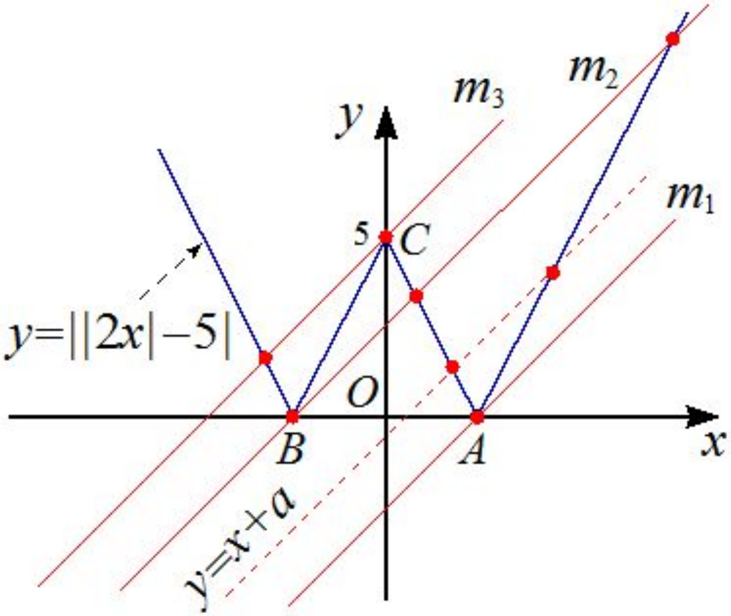
Ответ. При $a < 0$ решений нет; при $a = 0$ и $a > 4$ два решения; при $0 < a < 4$ – четыре; при $a = 4$ – три.

Статья: Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Различные подходы к решению задач С5 ЕГЭ. «Математика», − М.: Издательский дом «Первое сентября»: 2011, № 5. − С. 11–21.

Плоскость *Oxy*

Пример. Исследовать на количество корней уравнение $||2x|-5|=x+a$ в зависимости от значений параметра a.

Решение. Построим график $y=||2x|-5|$. Функция $y=x+a$ задает семейство прямых, получающихся из прямой $y=x$ параллельным переносом на a единиц вдоль оси Oy. Число решений уравнения при каждом значении a равно количеству точек пересечения графиков $y=||2x|-5|$ и $y=x+a$.



Имеется три критических положения m_1, m_2 и m_3 прямых вида $y=x+a$.

Прямая m_1 проходит через точку $A(2,5;0)$, m_2 – через точку $B(-2,5;0)$, m_3 – через точку $C(0;5)$. Прямым соответствуют значения параметра $a_1=-2,5$, $a_2=2,5$ и $a_3=5$ соответственно.

Ответ. При $a<-2,5$ решений нет; при $a=-2,5$ одно; при $-2,5<a<2,5$ и $a>5$ два; при $a=2,5$ и $a=5$ три; при $2,5<a<5$ четыре.

ГИА 2010/14 (функционально-графический метод)

23. Постройте график функции $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 16x + 48}{x+3}$ и определите, при каких значениях параметра k прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек.

$\boxed{-1{,}5;\ 0.}$

Учащиеся 9 класса должны демонстрировать владение этими методами!

23. Постройте график функции $y = \left|x^2 - x - 12\right|$ и определите, при каких значениях параметра a прямая $y = a$ имеет с графиком три или более общих точек.

$\boxed{4{,}75;\ 7.}$

23. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 3x + 7, \text{ если } x \le 0, \\ 7 - x, \text{ если } x > 0 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях параметра a прямая $y = a$ имеет с графиком ровно две общие точки.

$\boxed{(0;\ 12{,}25].}$

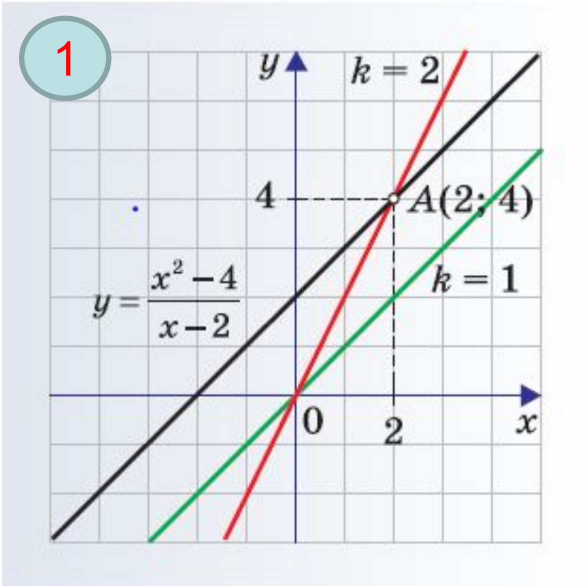
$\boxed{-\dfrac{25}{3};\ (-8;\ 8).}$

23. Постройте график функции $y = \dfrac{3x+1}{6x^2 + 2x}$ и определите, при каких значениях параметра a прямая $y = a$ не имеет с графиком общих точек.

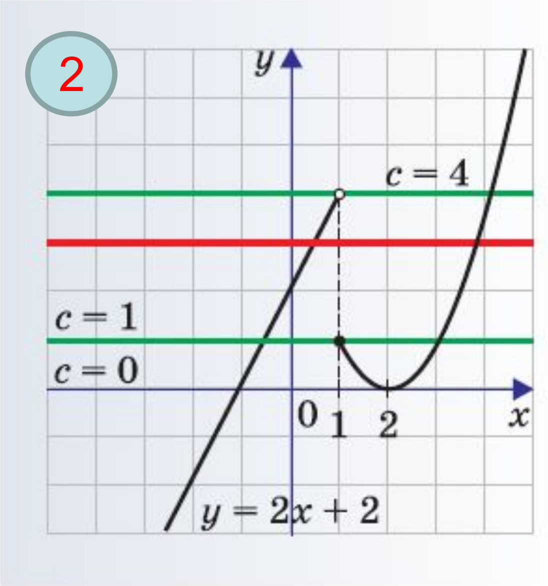
ФИПИ

Подготовка к ОГЭ (8 лицейский класс)

Задача 1. Найдите значения параметра k, при которых прямая $y = kx$ не имеет общих точек с графиком функции $y = \frac{x^2-4}{x-2}$ (рис. 1).



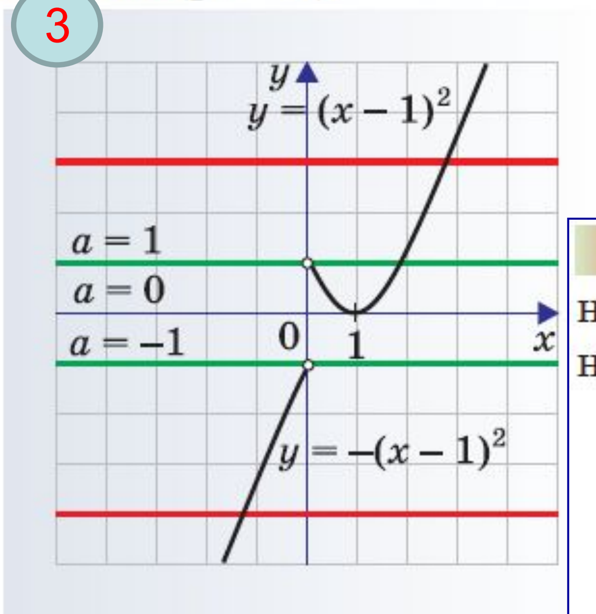
Задача 2. Найдите значения параметра c, при которых прямая $y = c$ пересекает график функции $y = \begin{cases} 2x+2, & x<1, \\ (x-2)^2, & x \ge 1 \end{cases}$ (рис. 2) в двух точках.



Подготовка к ОГЭ (8 лицейский класс)

Задача 3. Найдите графически значения параметра a, при которых уравнение $\frac{|x|}{x}(x-1)^2 = a$ имеет один корень (рис. 3).

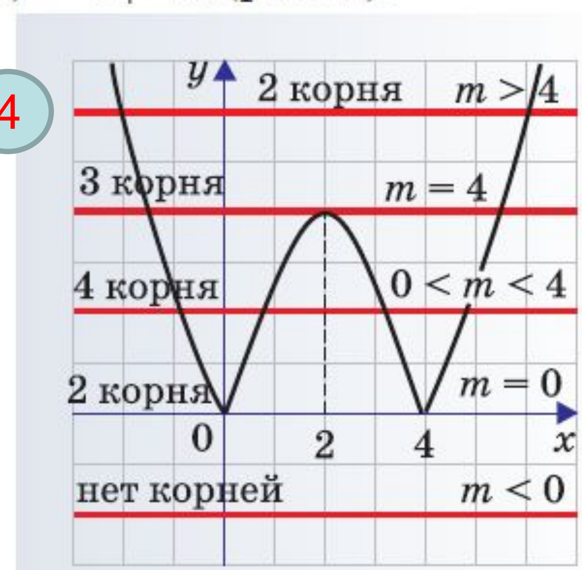
3



МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИ
Е. БЕЛОНОГОВА,
г. Москва
сентябрь 2011

Задача 4. (*уровень А*). Для каждого значения параметра m найдите число корней уравнения $|(x-2)^2 - 4| = m$ (рис. 4).

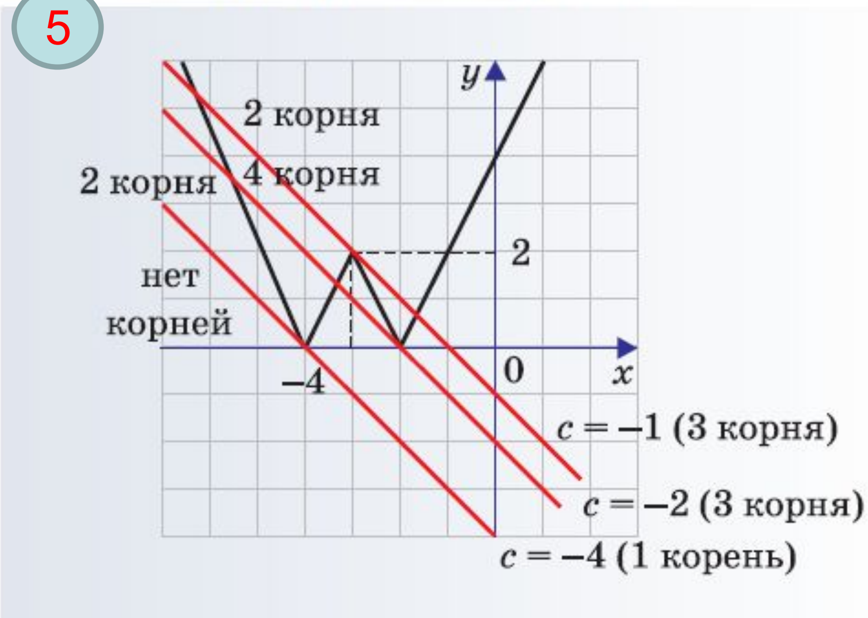
4



Подготовка к ОГЭ (8 лицейский класс)

Задача 5. (*уровень B*). Для каждого значения параметра c найдите число корней уравнения $||2x-6|-2| = -x + c$ (рис. 5).

5



МАТЕМАТИКА

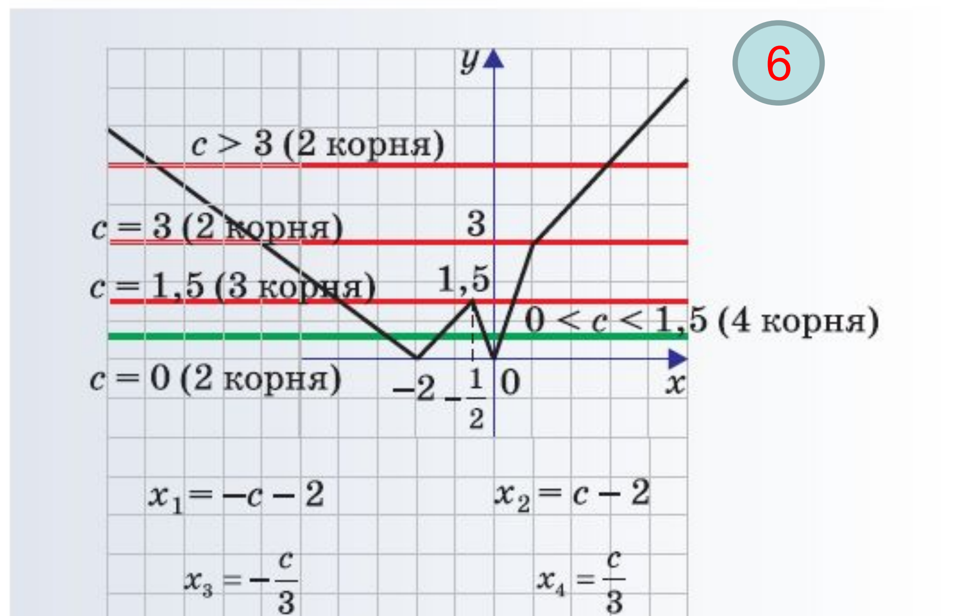
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Е. БЕЛОНОГОВА, г. Москва

сентябрь 2011

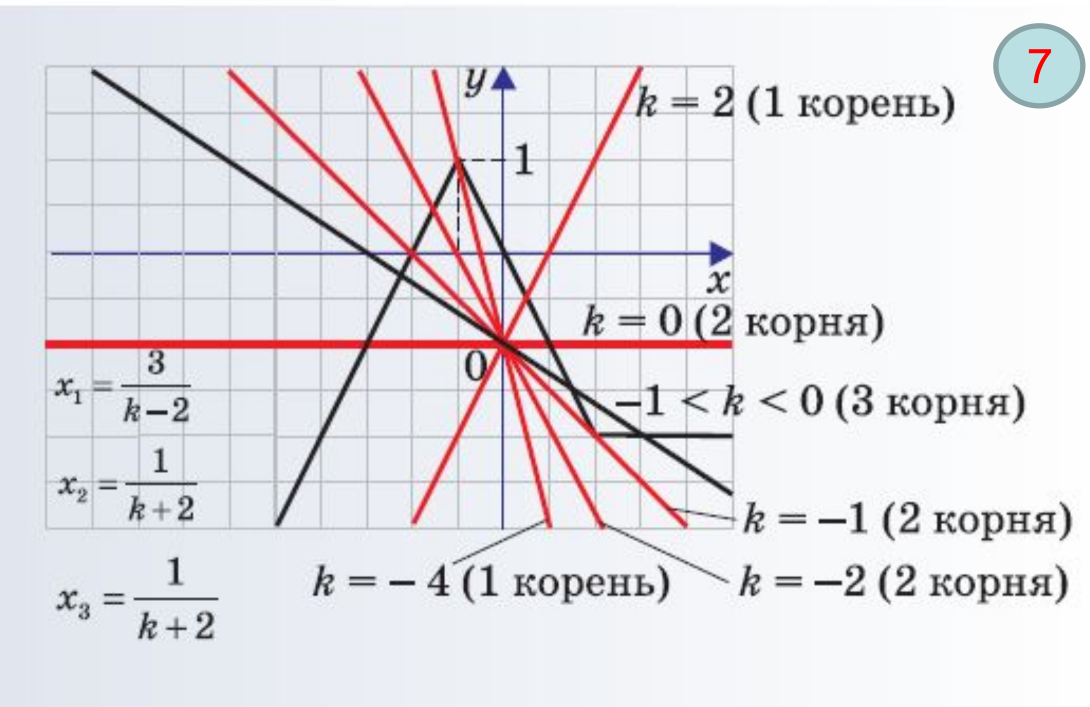
Задача 6. (*уровень C*). Найдите графически в зависимости от значений параметра c число корней уравнения $||2x-1|-|x-1|| = c$. При каких значениях c уравнение имеет четыре корня? Найдите эти корни (рис. 6).

6



Подготовка к ОГЭ (8 лицейский класс)

Задача 7. (*уровень С*). В зависимости от значений параметра k найдите число корней уравнения $|x-1|-|2x+1|+x=kx-1$ (рис. 7). При каких значениях k уравнение имеет три корня? Найдите эти корни.



При разработке курса автором ставились следующие цели:

- развитие логического мышления учащихся;
- привитие графической культуры: умение строить графики различной степени сложности и применять их как иллюстрацию к задаче;
- научить умению анализировать и обобщать результаты решения задач;
- научить самостоятельно искать подходы к решению нестандартных задач.

ГИА 2009 (пример оформления)

Пример 2 (*ГИА-9, 2009, демонстрационный вариант, № 21*). Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает в трех различных точках ломаную, заданную условием:

$$y = \begin{cases} 2x + 4, & \text{если } x < -3, \\ -2, & \text{если } -3 \leqslant x \leqslant 3, \\ 2x - 8, & \text{если } x > 3, \end{cases}$$

$\triangle$ Построим заданную ломаную (рис. 3.4). Все прямые, заданные уравнением $y = kx$, проходят через начало координат и будут пересекать ломаную в трех различных точках, если их угловой коэффициент больше углового коэффициента прямой $y = k_1x$, проходящей через точку $A(-3; -2)$, и меньше углового коэффициента прямой $y = k_2x$, параллельной прямым $y = 2x + 4$ и $y = 2x - 8$.

Коэффициент k_1 найдем, подставив в уравнение прямой $y = k_1x$ координаты точки $A(-3; -2)$: $-2 = -3k_1$, $k_1 = \dfrac{2}{3}$.

ГИА 2009 (пример оформления)

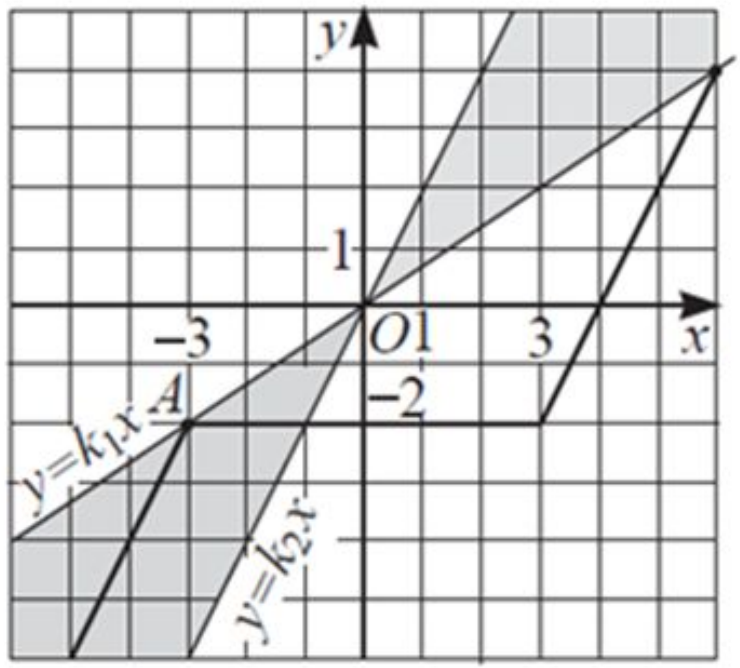


Рис. 3.4

Так как прямые $y = k_2 x$ и $y = 2x + 4$ параллельны, то $k_2 = 2$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют прямые $y = kx$ при $\frac{2}{3} < k < 2$. ▲

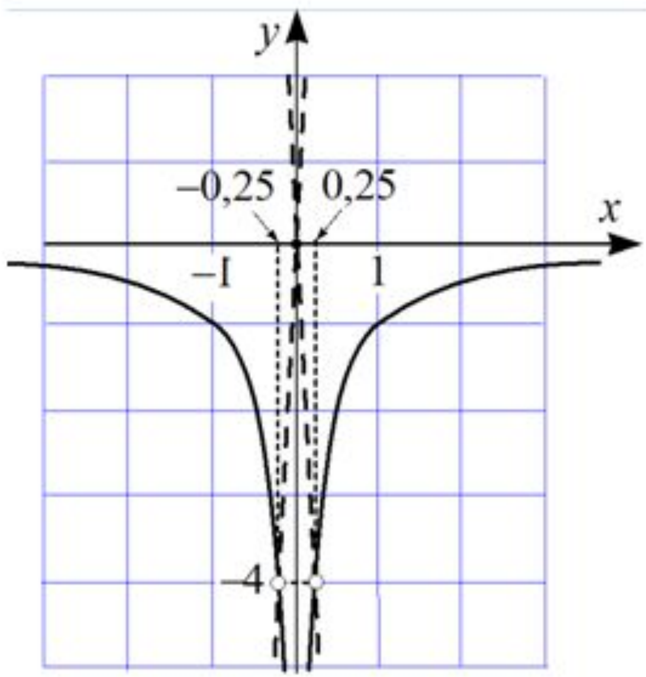
Ответ: $\frac{2}{3} < k < 2$.

ГИА 2014 (пример оформления)

Пример (ГИА). **Постройте график функции $y = \dfrac{4|x|-1}{|x|-4x^2}$ и определите значения k, при каждом из которых прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.**

Решение. Используя четность данной функции, строим график функции при $x > 0$ и симметрично отображаем его относительно оси ординат.

Пусть $x > 0$. Тогда $\begin{cases} y = \dfrac{4|x|-1}{|x|-4x^2}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4x-1}{x(1-4x)}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 0{,}25, \\ y = -\dfrac{1}{x}. \end{cases}$



Графиком функции в левой полуплоскости – ветвь гиперболы $y = -\dfrac{1}{x}$ с выколотой точкой с координатами $(0{,}25; -4)$. Далее отображаем ее относительно оси ординат.

Условию задачи удовлетворяют следующие прямые: во-первых, это ось абсцисс, задающаяся уравнением $y = 0$, с угловым коэффициентом $k = 0$;

во-вторых, это две прямые, графики которых проходят через точки $(0{,}25; -4)$ и $(-0{,}25; -4)$, с угловыми коэффициентами $k = 16$ и $k = -16$ соответственно.

Ответ: $-16; 0; 16$.

ЕГЭ 2010/14 (функционально-графический метод)

Год	Условие
2010	Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+\|x^2-6x+8\|$ меньше 1.
2011	(ЕГЭ 2011, С5) Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система $\begin{cases}(\|x\|-4)^2+(y-4)^2=4,\\(x-1)^2+y^2=a^2\end{cases}$ имеет единственное решение.
2012	(ЕГЭ 2012, С5) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left\|\frac{7}{x}-4\right\|=ax-3$ на промежутке $(0;+\infty)$ имеет более двух корней.
2013	(ЕГЭ 2013, С5) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax+\sqrt{-27-12x-x^2}=7a+3$ имеет единственный корень.

ЕГЭ 2015 (спецификация и кодификатор)

Пункты, указанные в спецификаторе и относящиеся к заданию 20.

20	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1–2.3	2.1, 2.2, 3.2, 3.3	В	4	–	30

Пункты, указанные в кодификаторе, относящиеся к пунктам спецификации 2.1-3.3. Однако полезны 4.1.3 и 4.2.1.

2.2.8	Использование свойств и графиков функций при решении неравенств
2.2.10	Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем
3.1.3	График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях
3.1.5	Преобразования графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат
4.1.3	Уравнение касательной к графику функции
	Исследование функций
4.2.1	Применение производной к исследованию функций и построению графиков

ФИПИ

Литература для подготовки по заданию 20 ЕГЭ 2015 профильного уровней

Литература для подготовки по заданию 20 ЕГЭ 2015 профильного уровней

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2012

Функция и параметр

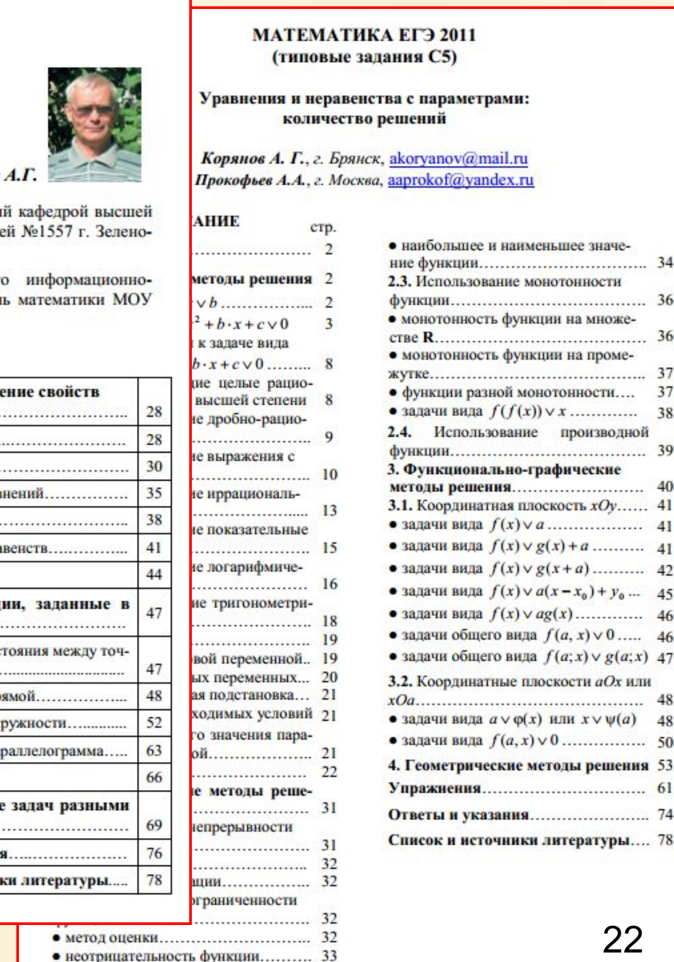
(типовые задания С5)

Прокофьев А.А. *Корянов А.Г.*

Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru

Корянов А.Г. – методист по математике городского информационно-методического Центра (МБОУ БГИМЦ) г. Брянска, учитель математики МОУ лицей №27 г. Брянска; e-mail: akoryanov@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ стр.



МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011
(типовые задания С5)

Уравнения и неравенства с параметрами: количество решений

Корянов А. Г., г. Брянск, akoryanov@mail.ru
Прокофьев А.А., г. Москва, aaprokof@yandex.ru

АНИЕ стр.

Классификация задач, решаемых функционально-графическими методами

1. К первому типу отнесем задачи, в условии которых спрашивается о количестве решений уравнения или системы уравнений в зависимости от значения параметра.
2. Ко второму типу задач отнесем такие, в которых необходимо найти значения параметра, при которых задача имеет заданное количество решений (единственное, k решений, бесконечно много).
3. Третий тип представляют задачи, в которых необходимо получить решение для всех значений параметра или для значений параметра из заданного промежутка.
4. Четвертый тип представляют задач, в которых необходимо найти значения параметра, при которых множество решений удовлетворяет заданным условиям.

Функционально-графические методы в электронных пособиях Прокофьева А.А. и Корянова А.Г.

Из оглавления пособия 2011 года:

Адреса:
http://alexlarin.net/ege/2012/C5-2012.http://alexlarin.net/ege/2012/C5-2012. html
и
http://www.alexlarin.net/ege/2011/c52011.html

С чего следует начать?

А. А. Прокофьев

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

ПОДГОТОВКА к ГИА и ЕГЭ

2-е издание, исправленное и дополненное

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний

Для овладения графическими методами решения задач с параметрами необходимо повторить основные способы построения семейства графиков функций $f(x;a)$ с помощью элементарных преобразований. Обычно в задачах используются функции, графики которых строятся средствами элементарной математики (то есть без использования дифференциального исчисления). Считается, что график функции $f(x)$ известен.

Таблица элементарных преобразований графика функции

Функция	Преобразование графика функции $y = f(x)$
$y = f(x) + A$	Параллельный перенос его вдоль оси Oy на A единиц вверх при $A > 0$ и на $\lvert A \rvert$ единиц вниз при $A < 0$.
$y = f(x - a)$	Параллельный перенос его вдоль оси Ox на a единиц вправо при $a > 0$ и на $\lvert a \rvert$ единиц влево при $a < 0$.
$y = kf(x)$, $k > 0$	Растяжение его вдоль оси Oy в k раз, если $k > 1$, и сжатие в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$.
$y = f(kx)$, $k > 0$	Сжатие его вдоль оси Ox в k раз, если $k > 1$, и растяжение в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$.
$y = -f(x)$	Симметричное отражение его относительно оси Ox.
$y = \lvert f(x) \rvert$	Часть графика, расположенная ниже оси Ox, симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть останется без изменения.
$y = f(-x)$	Симметричное отражение его относительно оси Oy.
$y = f(\lvert x \rvert)$	Часть графика, расположенная в области $x \geq 0$, остается без изменения, а его часть для области $x < 0$ заменяется симметричным отображением относительно оси Oy части графика для $x > 0$.

Последовательность действий при построении из графика функции $y = f(x)$ графика функции $y = c \cdot f(kx + l) + b$

1. Представляем искомую функцию в виде

$$y = c \cdot f(k(x + a)) + b.$$

Для этого нужно вынести коэффициент k за скобку:

$$y = c \cdot f\left(k\left(x + \frac{l}{k}\right)\right) + b,$$

и обозначить $\frac{l}{k}$ через a.

2. Строим график функции $y = p_1(x)$, где

$$p_1(x) = f(kx).$$

3. Строим график функции $y = p_2(x)$, где

$$p_2(x) = p_1(x + a) = f(k(x + a)).$$

4. Строим график функции $y = p_3(x)$, где

$$p_3(x) = c \cdot p_2(x) = c \cdot f(k(x + a)).$$

5. Строим график функции $y = p_4(x)$, где

$$p_4(x) = p_3(x) + b = c \cdot f(k(x + a)) + b.$$

Задачи для самостоятельного решения функционально-графическим методом

В задачах 1-5 для каждого значения параметра a определите число решений данного уравнения.

1. а) $x+\dfrac{|x|}{x}=a$; б) $|x(x-2)|=a$; в) $x+\dfrac{1}{x}=a$.

2. а) $x^2+2x-3=a^2-4a$; б) $|x+2|(x-3)=a^2-1$;

в) $\sqrt{x+2a}=x$.

3. а) $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a-|a|}$; б) $x-\dfrac{1}{|x|}=a-\dfrac{1}{a}$; в) $\dfrac{|x|+1}{x}=a^2+a-1$.

4. а) $\sqrt{x-2}=ax$; б) $\sqrt{9-x^2}=(a-1)x$; в) $ax^2+4|x|-5=0$.

5. а) $\sqrt{9-x^2}=a|x|+5$; б) $(x-1)^2=2|x-a|$; в) $ax+\dfrac{|x|}{x}=2a+1$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. **а)** При $a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ одно решение; при $a \in [-1;1]$ – нет; **б)** при $a < 0$ решений нет; при $a = 0$ или $a > 1$ – два; при $0 < a < 1$ – четыре; при $a = 1$ – три; **в)** при $a \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ – два; при $a = -2$ или $a = 2$ – одно; при $-2 < a < 2$ – нет. **2.** **а)** При $a = 2$ – одно; при $a \neq 2$ – два; **б)** при $a \in (-\infty;-1] \cup (1;+\infty)$ – одно; при $a = -1$ или $a = 1$ – два; при $-1 < a < 1$ – три; **в)** при $a < -1/8$ – нет; при $a = -1/8$ или $a > 0$ – одно; при $-1/8 < a \leq 0$ – два. **3.** **а)** при $a < 0$ – два; при $a \geq 0$ – нет; **б)** при $a = 0$ – нет; при $a \in (-1-\sqrt{2};0) \cup (-1+\sqrt{2};+\infty)$ – одно; при $a = -1-\sqrt{2}$ или $a = -1+\sqrt{2}$ – два; при $a \in (-\infty;-1-\sqrt{2}) \cup (0;-1+\sqrt{2})$ – три; **в)** при $a \in [-2;-1] \cup [0;1]$ – нет; при $a \in (-\infty;-2) \cup (-1;0) \cup (1;+\infty)$ – одно. **4.** **а)** При $a \in (-\infty;0) \cup (\sqrt{2}/4;+\infty)$ – нет; при $a = 0$ или $a = \sqrt{2}/4$ – одно; при $0 < a < \sqrt{2}/4$ – два; **б)** при $a = 1$ – два; при $a \neq 1$ – одно. *Указание.* Графиком функции $y = \sqrt{9-x^2}$ является полуокружность радиуса 3 с центром в точке $(0;0)$; **в)** при $a \geq -4/5$ – два; при $a < -4/5$ – нет. **5.** **а)** При $a \in (-\infty;-5/3) \cup \{-4/3\}$ – два; при $a \in [-5/3;-4/3)$ – четыре; при $a > -4/3$ – нет; **б)** при $a \in (-\infty;0,5) \cup (1,5;+\infty)$ – два; при $a = 0,5$ или $a = 1,5$ – три; при $a \in (0,5;1,5)$ – четыре; **в)** при $a \in (-\infty;-1] \cup (0;+\infty)$ – одно; при $-1 < a < 0$ – два; при $a = 0$ – бесконечно много.

Суть метода сечений для решения неравенств

При решении или исследовании на наличие решений неравенства (или решений, удовлетворяющих некоторым условиям, также применяют ***метод сечений***, состоящий в следующем.

Исходное неравенство приводится к виду $f(x) \vee g(x, a).$ Далее в системе координат Oxy строится график левой части неравенства и определяются точки пересечения его семейством графиков функций $y_a(x) = g(x, a)$ и на образовавшихся промежутках, на которые эти точки разбили область допустимых значений переменной x рассматривается взаимное положение графиков функций $f(x)$ и $y_a(x)$.

Для графической интерпретации при решении неравенств методом интервалов (или обобщенным методом интервалов) используется числовая прямая Ox (или Oa) или ***метод областей*** на плоскости Oxa (или Oax).

Статья. Прокофьев А.А., Шабунин М.И. Задачи на координатной плоскости. «Математика в школе», − М.: «Школьная пресса», 2011. − №9. − С. 20-29; 2011. − №10. − С. 18-23.

Метод областей

Для изображения на координатной плоскости Oxy множества решений уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем используется построение на координатной плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют этим уравнениям, неравенствам, системам.

При решении неравенства $f(x, y) \geq 0,$ равносильного смешанной системе

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ f(x, y) > 0, \end{cases}$$

применяется метод областей, являющийся обобщением метода интервалов на случай двух переменных. Для этого вначале находят все нули выражения $f(x, y),$ то есть все такие точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $f(x, y) = 0.$ В общем случае это уравнение задает некоторую кривую (или несколько кривых) на плоскости $Oxy.$ Полученные кривые разбивают плоскость на множества, для координат всех точек которых выражение имеет постоянный знак. Далее отбирают требуемые подмножества, координаты точек которых удовлетворяют неравенству $f(x, y) > 0.$ Это можно сделать подстановкой координат произвольной точки из рассматриваемого подмножества в выражение $f(x, y).$

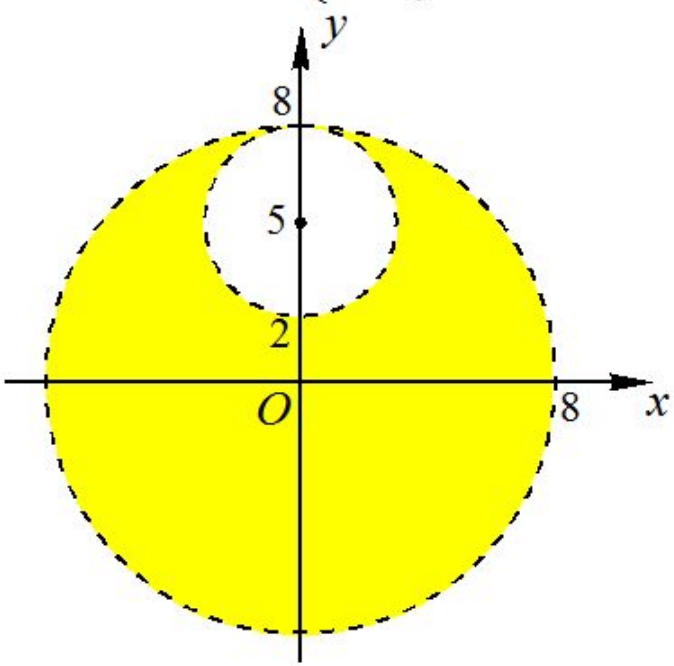
Метод областей

Пример. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству: $\dfrac{y-8}{x^2+y^2-64} > \dfrac{1}{10}$.

Решение. Исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$\frac{x^2+y^2-10y+16}{x^2+y^2-64} < 0, \qquad \frac{x^2+(y-5)^2-9}{x^2+y^2-64} < 0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств: (I) $\begin{cases} x^2+(y-5)^2 < 9 \\ x^2+y^2 > 64 \end{cases}$ и (II) $\begin{cases} x^2+(y-5)^2 > 9 \\ x^2+y^2 < 64. \end{cases}$



Система (I) не имеет решений, так как множество решений первого неравенства – внутренность круга K_1 радиуса 3 с центром в точке $(0;5)$, а множество решений второго неравенства – внешность круга K_2 радиуса 8 с центром в точке $(0;0)$.

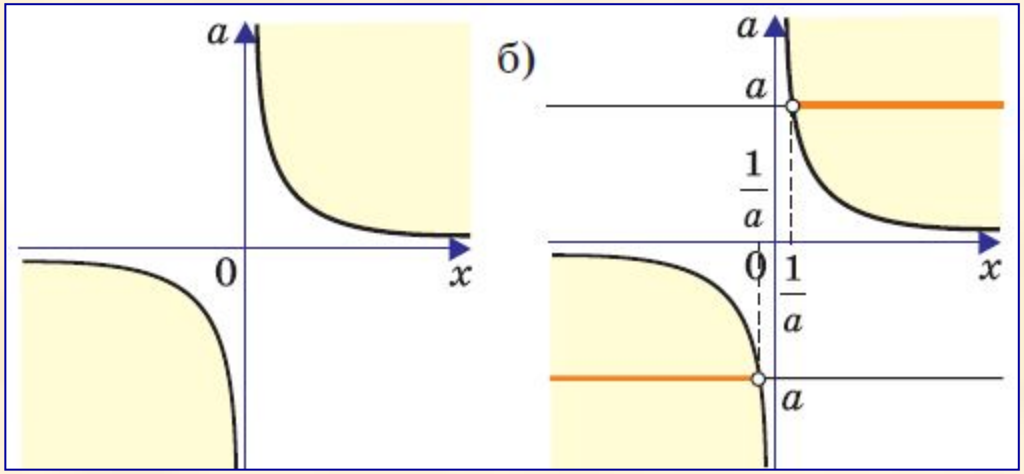
Множество решений системы (II) – множество точек, изображенных на рисунке и лежащих вне круга K_1 и внутри круга K_2.

Графическая интерпретация при решений неравенств

Пример 1. Решим неравенство

$$ax > 1.$$

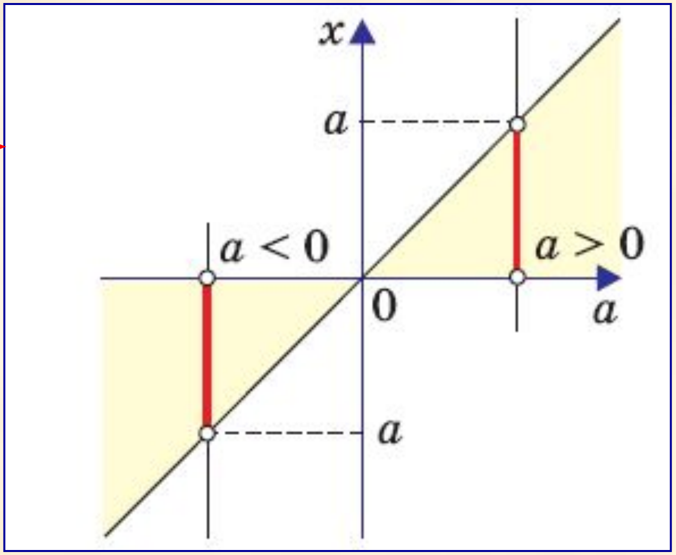
Ответ. если $a = 0$, то решений нет, если $a > 0$, то $x > \frac{1}{a}$, если $a < 0$, то $x < \frac{1}{a}$.



Пример 2. Решим неравенство

$$x(x - a) < 0.$$

Ответ. При $a < 0$ это будет множество $(a; 0)$, при $a > 0$ — множество $(0; a)$, а при $a = 0$ решений нет.

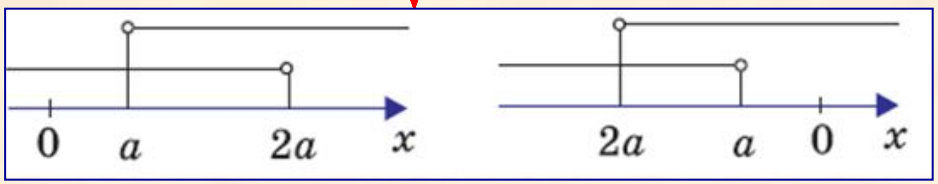


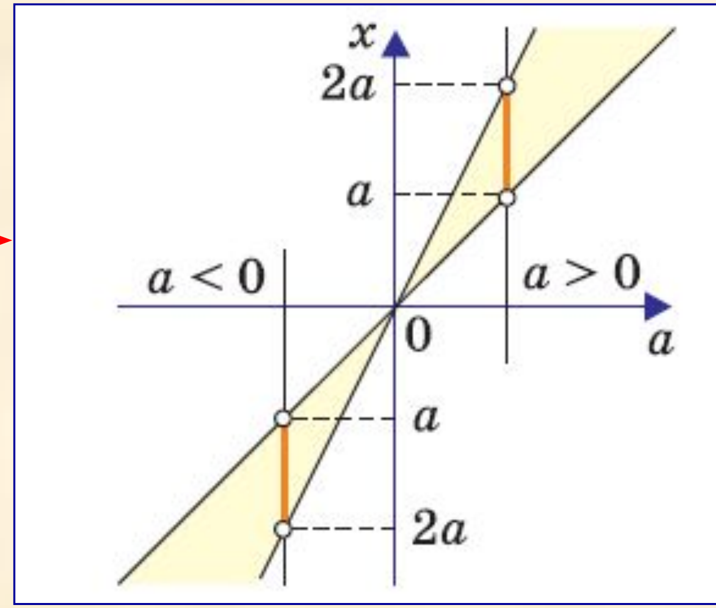
Графическая интерпретация при решений неравенств

Пример 3. Решим неравенство

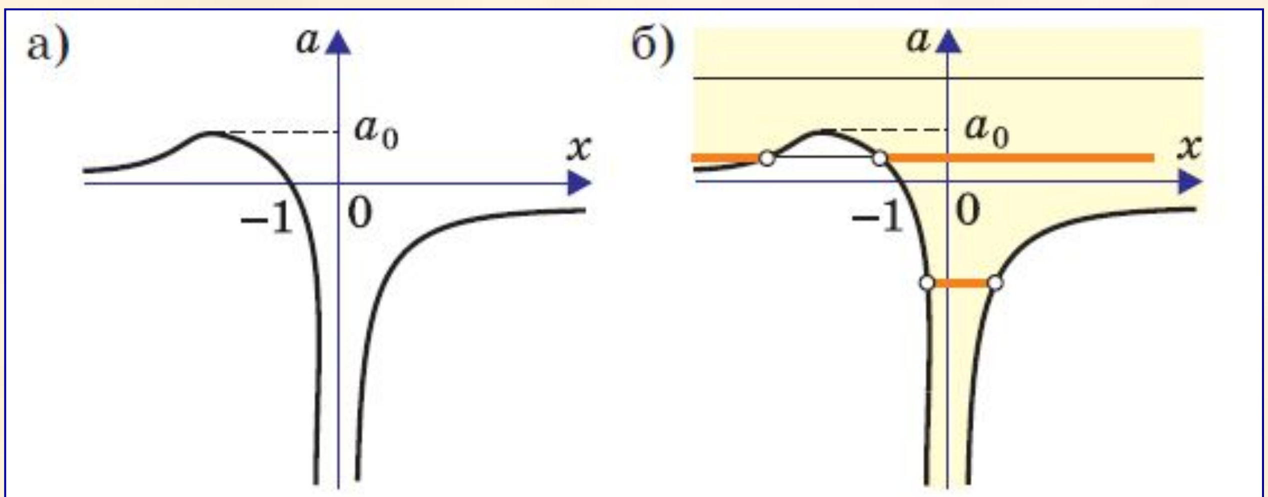
$$(x-a)(x-2a)<0.$$

Ответ. если $a=0$, то решений нет,
если $a>0$, то $(a;2a)$, если $a<0$, то $(2a;\ a)$



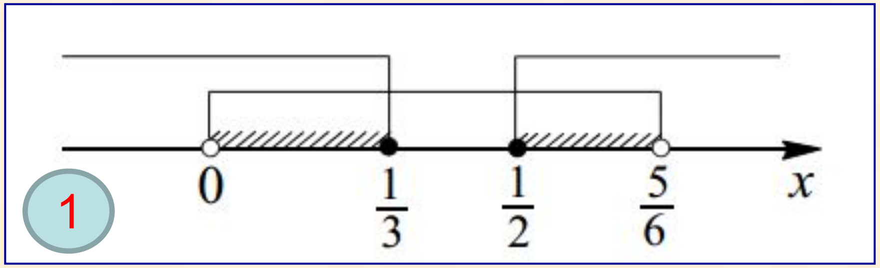


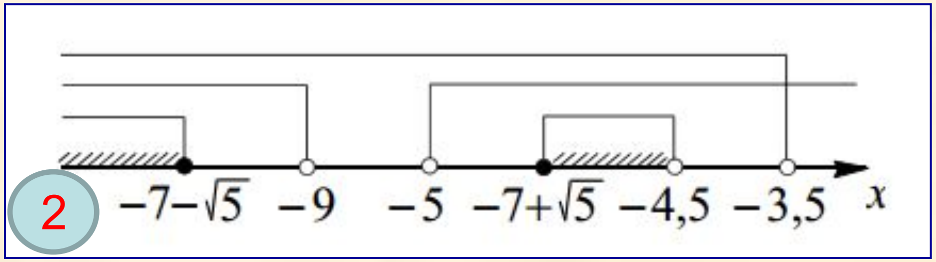
Пример 4. Общий случай для произвольной области.



О включении множеств

При решении неравенств и систем неравенств часто приходится сталкиваться с ситуацией включении или объединении множеств одного из семейств и множества другого. После того как вопрос задачи будет переформулирован в терминах включения (пересечения) множеств как правило, используется геометрическая интерпретация множества решений на числовой прямой. Это особенно полезно при анализе неравенств. Напомним, что множество решений неравенства наглядно можно изобразить линией, поднятой над той частью числовой прямой, которая содержит числа, составляющие множество решений (см. рис. 1 и 2).





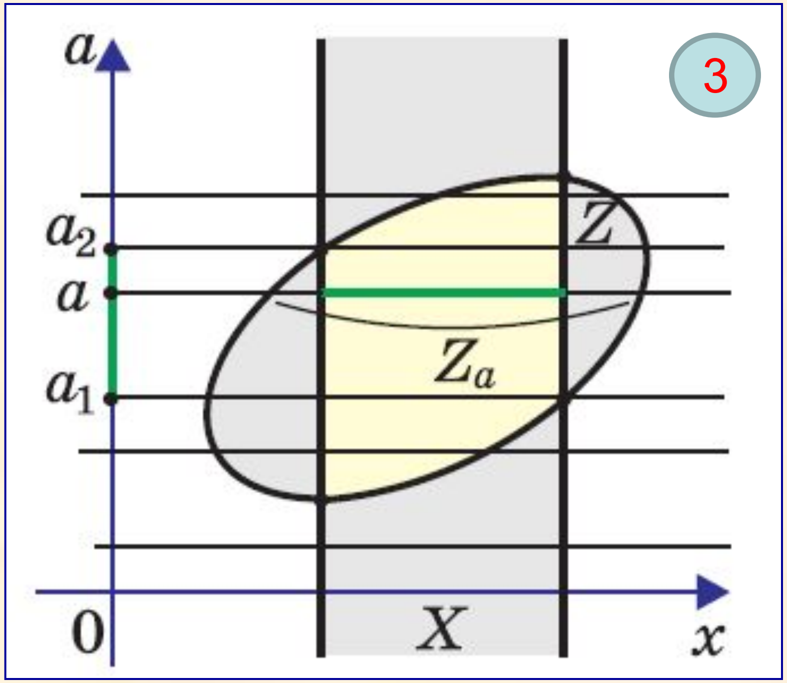
Если получены множества X и Z, то множеству X∩Z соответствую элементы числовой прямой, над которыми находится две линии.

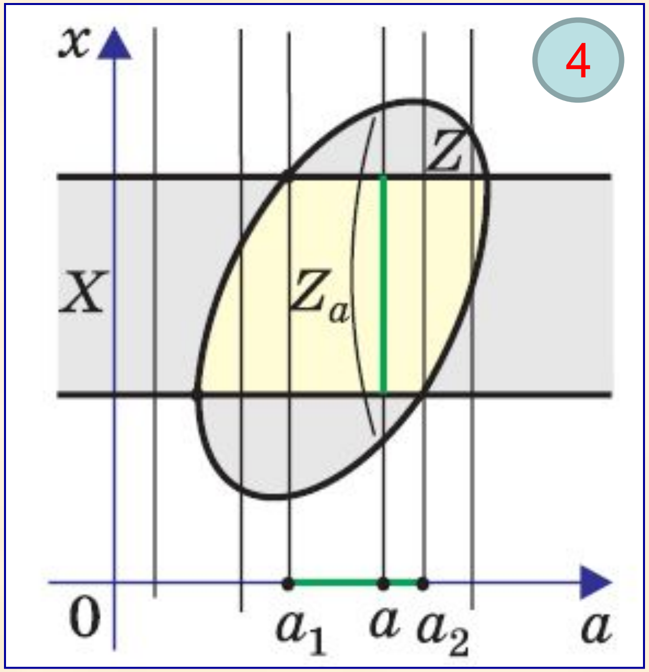
При решении неравенств с использованием метода областей на соответствующей плоскости множества X и Z получаются как проекции на координатную ось общей части полученной области и прямой, параллельной соответствующей числовой оси (см. на следующем слайде рис. 3 и 4).

О включении множеств в методе областей

В случае использования плоскости Oxa рассматриваются сечения области прямыми $\boldsymbol{a}$=const, параллельными оси абсцисс, и получаются множества Z_a, состоящие из точек (x, a) (рис. 3) . В соответствии с постановкой задачи выбираем подходящие значения параметра).

В случае использования плоскости Oax рассматриваются сечения области прямыми $\boldsymbol{a}$=const , параллельными оси ординат, и получаются множества Z_a, состоящие из точек (a, x) (рис. 4). В соответствии с постановкой задачи выбираем подходящие значения параметра).





Метод наглядной интерпретации на прямой

Пример 1. Определим, при каких значениях параметра a все решения неравенства

$$\log_x (5x^2 - 8x + 3) > 2 \qquad (1)$$

являются одновременно решениями неравенства

$$x^2 - 2x - a^4 + 1 \geq 0. \qquad (2)$$

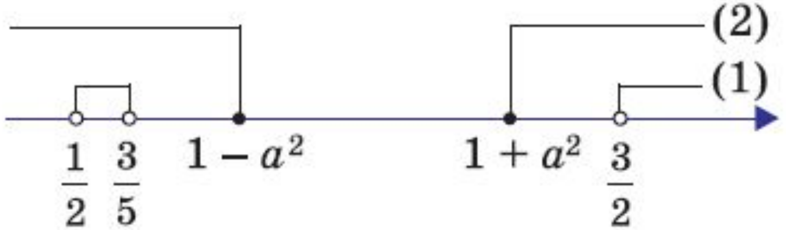
Формулировка задачи в терминах включения множеств выглядит так: при каких a множество решений неравенства (1) содержится в множестве решений неравенства (2)? Для ответа на этот вопрос надо решить неравенство (1), затем описать семейство множеств, являющихся множествами решений неравенства (2), и, используя наглядную интерпретацию, найти, при каких a соответствующая множествам семейства линия «накрывает» линию над первым множеством.

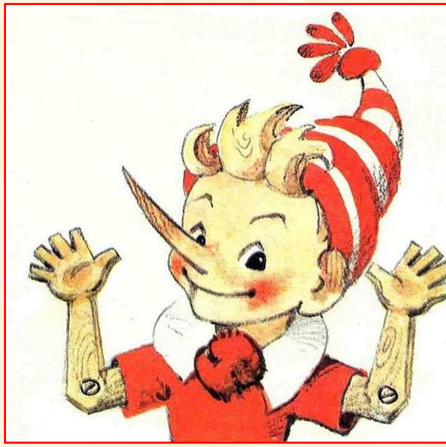
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)\left(4x^2-8x+3\right)}{x^2} > 0, \\ 5x^2-8x+3>0, \\ x>0. \end{cases}$$

$$(0,5;\ 0,6) \cup (1,5;\ +\infty).$$

$$(2)\ (-\infty;\ 1-a^2]\ ;\ [1+a^2;\ +\infty).$$

$$0,6 \leq 1 - a^2 \Leftrightarrow a^2 \leq 0,4 \text{ и } 1 + a^2 \leq 1,5 \Leftrightarrow a^2 \leq 0,5.$$





Ответ. $a \in \left[-\sqrt{0,4};\ \sqrt{0,4}\right].$

Метод наглядной интерпретации на прямой

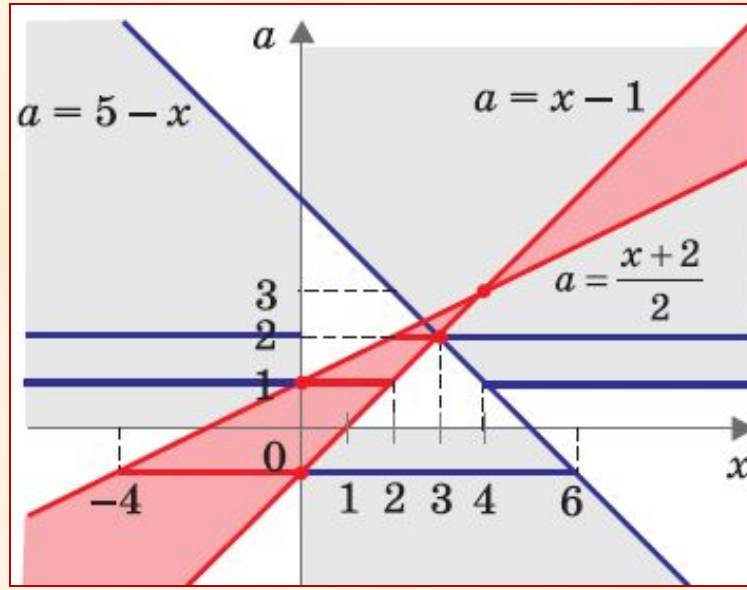
Задача 9. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (1-3a)x + 2a^2 \le 2$ удовлетворяет неравенству $ax(x-5+a) \ge 0$.

Решение. Рассмотрим уравнение $x^2+(1-3a)x+2a^2-2=0$ как квадратное относительно x. Дис-

$x^2+(1-3a)x+2a^2 \le 2 \Leftrightarrow (x-2a+2)(x-a-1) \le 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2a+2 \ge 0, \\ x-a-1 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2a+2 \le 0, \\ x-a-1 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \le \dfrac{x+2}{2}, \\ a \ge x-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a \ge \dfrac{x+2}{2}, \\ a \le x-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение $ax(x-5+a) \ge 0$ при условии $ax \ge 0$ (I и III четверти) представляет собой множество точек, лежащих над прямой $a = 5 - x$, то есть таких, что $a \ge 5 - x$, а при условии $ax \le 0$ (II и IV четверти) — множество точек, лежащих под этой прямой, то есть $a \le 5 - x$.



Ответ: $a = \pm 1$, $a = 2$, $a = 3$.

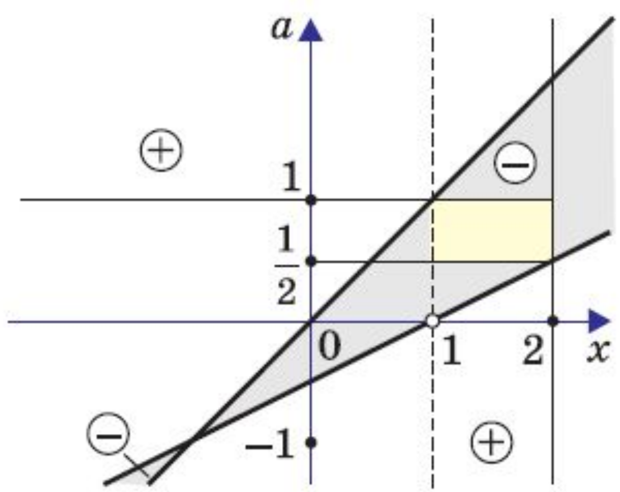
Метод наглядной интерпретации на прямой и плоскости

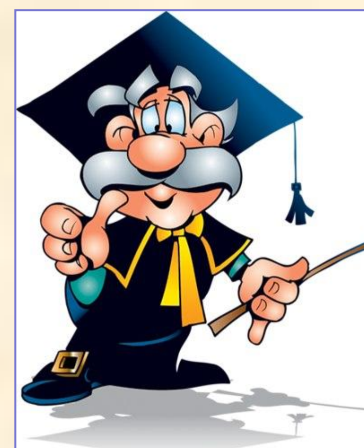
Пример 2. Найдем все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(1;\ 2]$ выполняется неравенство

$$\frac{x-2a-1}{x-a}<0.$$

$a \in (0{,}5;\ 1].$

Проверим ответ, используя изображение множества пар $(x;\ a)$, удовлетворяющих неравенству (1). Числитель $x-2a-1$ дроби в (1) обращается в нуль при $a=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$, знаменатель — при $a=x$.





Метод наглядной интерпретации на прямой и плоскости

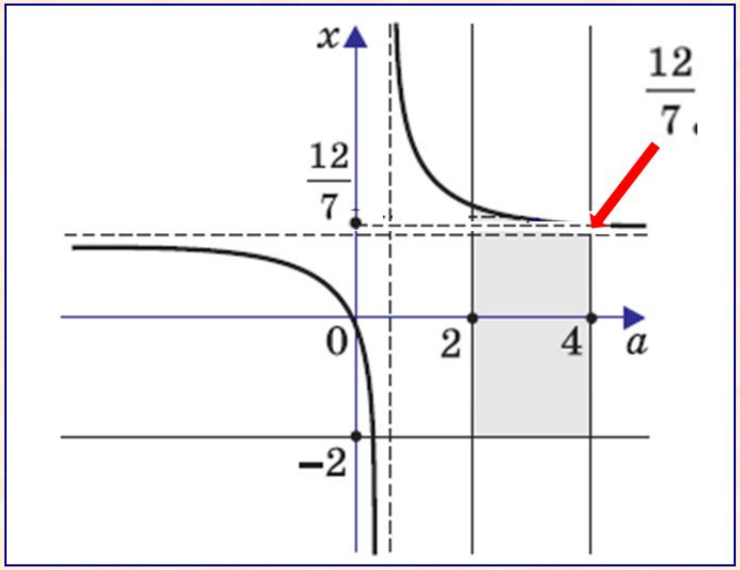
Пример 4. Найдем все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(2a-1)x^2+(2-a)x-6a<0 \qquad (1)$$

при любом $a \in (2; 4)$.

Левая часть неравенства (1) обращается в нуль при $x_-(a) = -2$ и $x_+(a) = \dfrac{3a}{2a-1}$. Ясно, что при $a \in (2; 4)$ будет $x_+(a) > 0$, тем более $x_+(a) > x_-(a)$ при указанных a. Следовательно, при каждом $a \in (2; 4)$ множество X_a решений неравенства (1) представляет собой промежуток $\left(-2; \dfrac{3a}{2a-1}\right)$.

Функция $\dfrac{1}{2a-1}$ убывает на $[2; 4]$, следовательно, $x_+(a)$ достигает на правом конце промежутка наименьшего значения, равного $\dfrac{12}{7}$.



Ответ: $\left(-2; \dfrac{12}{7}\right)$.

Метод наглядной интерпретации на прямой

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
1–15 мая 2011 mat.1september.ru

Задача 4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x+a-4|+\left(\frac{a^2-4a+3}{|a-2|}-|a-2|\right)\cdot|x-2|+$$
$$+\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x-a|\le 1$$

выполняется ровно для двух различных значений x.

Решение. Учитывая, что

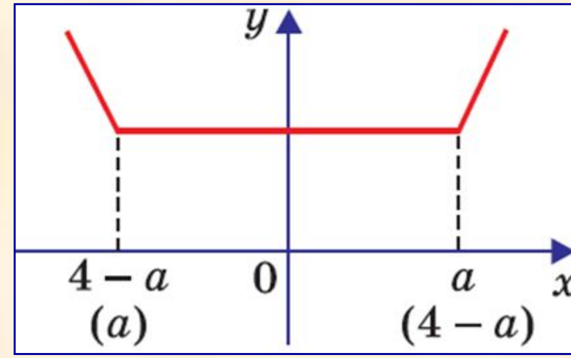
$$\frac{1}{2}(a-2)^2\left(|x+a-4|+|x-a|\right)\le|x-2|+|a-2|.$$

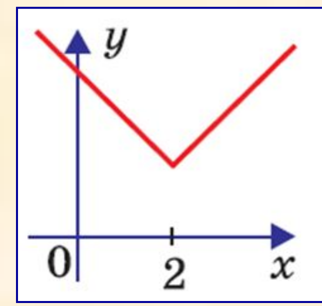
Учитывая, что $\frac{1}{2}(a-2)^2>0$, получим, что график функции $y=\frac{1}{2}(a-2)^2\left(|x+a-4|+|x-a|\right)$ будет иметь форму «корыта», график функции $y_3=|x-2|+|a-2$ будет иметь форму «галочка».

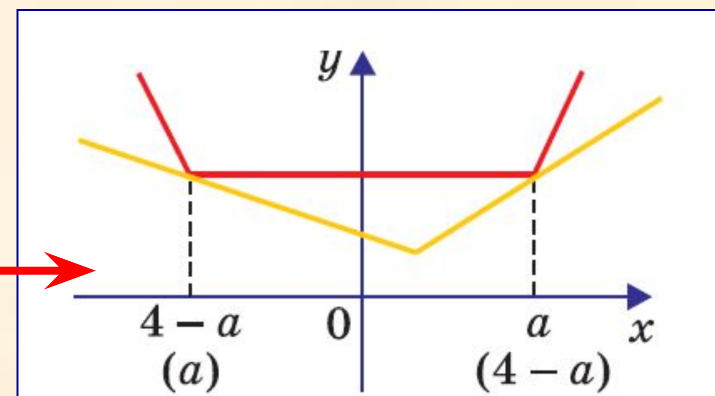
Нужно, чтобы «галочка» y_3 лежала целиком под «корытом» и имела с ним две точки пересечения. Это возможно в единственном случае. Отсюда $y=y_3$ при $x=4-a$ и $x=a$.

Подставляя $x=4-a$ и $x=a$ в уравнение

$$\frac{1}{2}(a-2)^2\left(|x+a-4|+|x-a|\right)=|x-2|+|a-2|,$$

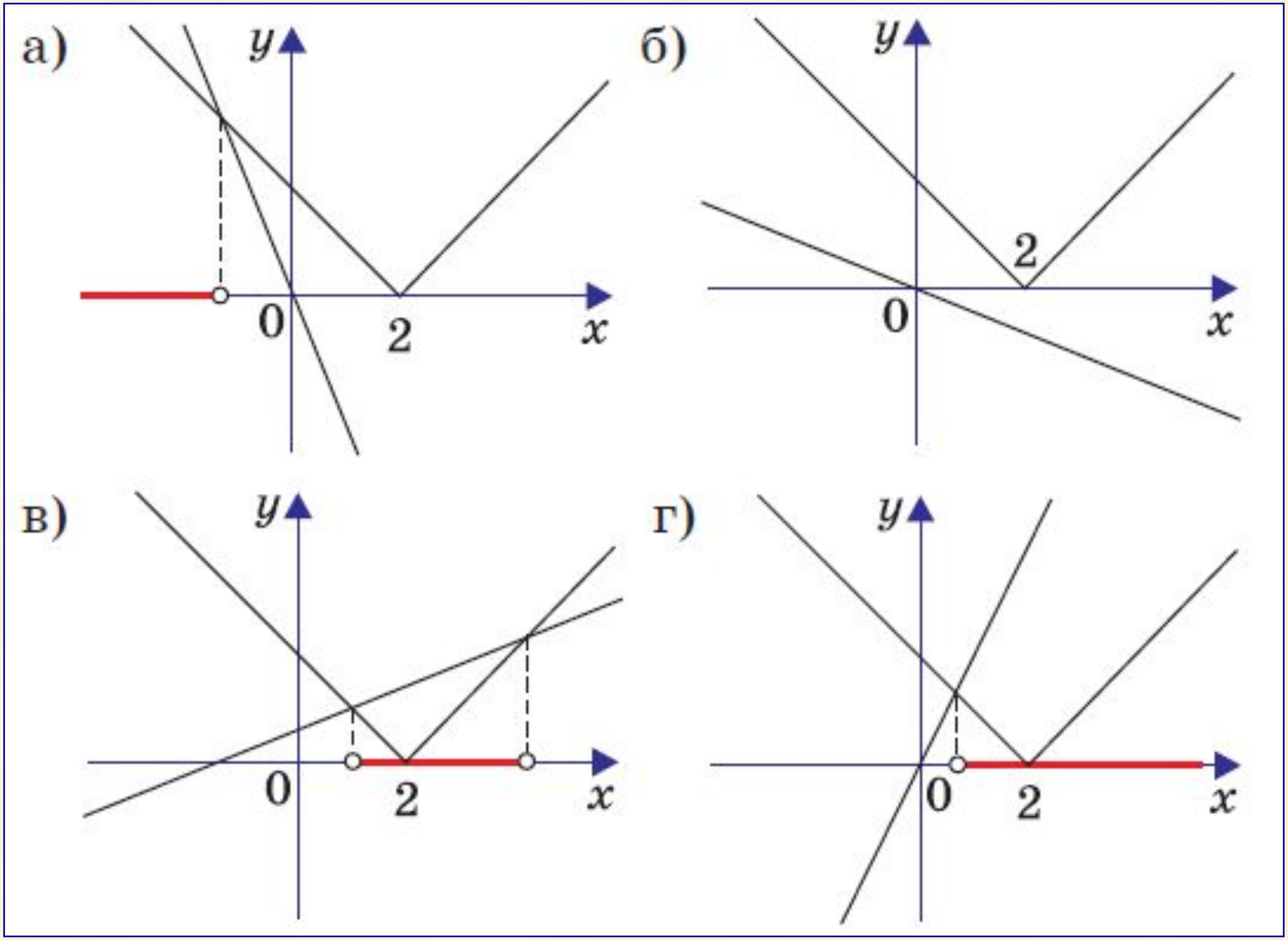






получим ответ: $a=2\pm\sqrt{2}.$

Графическая интерпретация решения неравенства на числовой прямой



Метод наглядной интерпретации на прямой и плоскости

Пример 7. (*ЕГЭ-2010, тренировочная работа МИОО.*) Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства

$$|2x-a|+1\le|x+3|$$

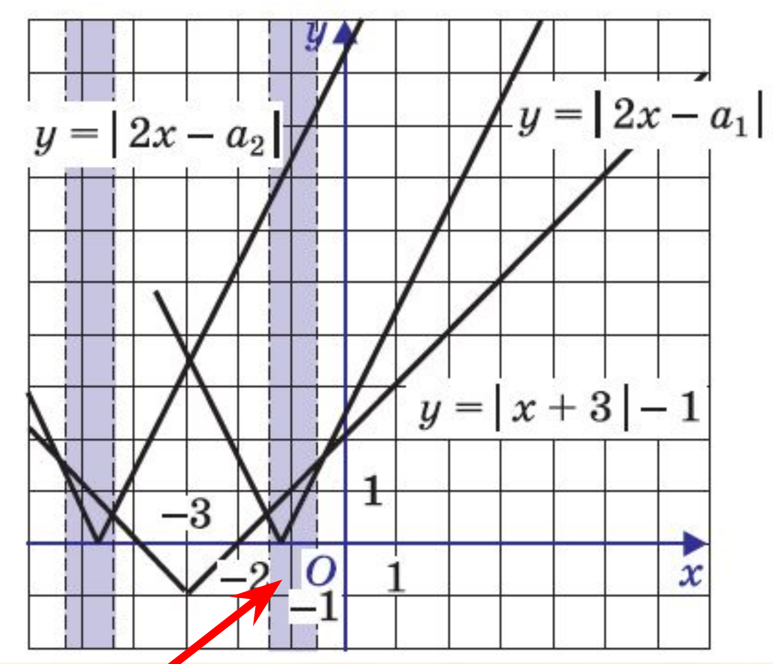
образуют отрезок длины 1.

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
А. КОРЯНОВ,
А. ПРОКОФЬЕВ,
1–15 март 2011

Решение. Преобразуем исходное неравенство к виду $|2x-a|\le|x+3|-1$. Раскрывая модули в выражении, стоящем в правой части неравенства, получим:

$$g(x)=|x+3|-1=\begin{cases}x+2, \text{если } x\ge-3,\\ -x-4, \text{если } x\le-3.\end{cases}$$

При каждом фиксированном значении параметра a график функции $y_a(x)=|2x-a|$ получается параллельным переносом графика функции $y=|2x|$ вдоль оси Ox на $\frac{a}{2}$ единиц.



В первом случае абсциссы точек пересечения графиков функций получаются из решения уравнений $x+2=2x-a_1$ и $x+2=-2x+a_1$. Отсюда получаем $x=a_1+2$ и $x=\frac{a_1-2}{3}$. В этом случае длина отрезка равна $(a_1+2)-\frac{a_1-2}{3}=\frac{2a_1+8}{3}$. Соответственно, длина равна 1 при $a_1=-2{,}5$.

Во втором случае $a_2=-9{,}5$.

Ответ: $-2{,}5$; $-9{,}5$.

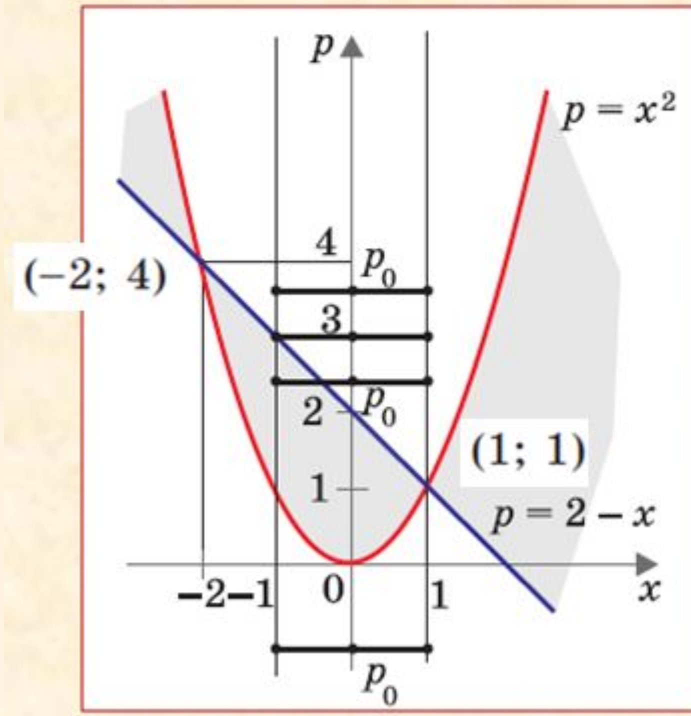
Метод наглядной интерпретации на прямой и плоскости

Задача 8. Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество решений неравенства $(p - x^2)(p + x - 2) \le 0$ не содержит ни одной точки из отрезка $x \in [-1; 1]$.

Решение. Изобразим на координатной плоскости Oxp решения данного неравенства.

$$(p - x^2)(p + x - 2) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p \ge x^2, \\ p \le 2 - x \end{cases} \\ \begin{cases} p \le x^2, \\ p \ge 2 - x, \end{cases} \end{array}\right.$$

Прямые $x = -1$ и $x = 1$ пересекают параболу $p = x^2$ в точках $(-1; 1)$ и $(1; 1)$ соответственно, а прямую $p = 2 - x$ в точке $(-1; 3)$ и той же точке $(1; 1)$. Условие задачи выполнено в том и только том случае, когда отрезок прямой $p = p_0$, заключенный между прямыми $x = -1$ и $x = 1$, не пересекает изображенное нами множество. Как видно из рисунка, это происходит только при $p_0 \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.



Ответ: $p \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Для самостоятельной работы

ФИПИ

Пример 9. (*ЕГЭ-2010, досрочный.*) Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства

$$x^2 + (5a + 3)x + 4a^2 \le 4$$

удовлетворяет неравенству $ax(x - 4 - a) \le 0$.

Ответ: $-\frac{5}{3}$; $-\frac{3}{2}$; -1; 1.

Пример 12. (*ЕГЭ-2010, пересдача.*) Найдите все значения a, при каждом из которых любая прямая, перпендикулярная оси ординат имеет нечетное число общих точек с графиком функции

$$f(x) = (2a - 3)x - (x + 3)|x - a|.$$

Ответ: $a \le 0$.

Пример 17. (*ЕГЭ-2010, вторая волна.*) Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции

$$f(x) = x^2 - 11|x - a| - x$$

на отрезке $[-8; 7]$ не принимается ни на одном из концов этого отрезка.

Ответ: $-2 < a < 5$.

(ЕГЭ 2012, С5) Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на множестве $|x| \geqslant 1$ не меньше 6.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \{0\}$.

Метод наглядной интерпретации

Пример 11. *(ЕГЭ-2010, тренировочная работа МИОО.)* Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Решение. Данная задача может быть переформулирована следующим образом:

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - |x^2 + 2x - 3| = a$ имеет более двух корней. Или по-другому: график функции $g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$ имеет с прямой $y_a = a$ более двух общих точек.

$$g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| =$$

$$= \begin{cases} -2x + 3, \text{ если } x \le -3 \text{ или } x \ge 1, \\ 2(x + 0{,}5)^2 - 3{,}5, \text{ если } -3 < x < 1. \end{cases}$$

Построив на плоскости Oxy график функции $g(x)$ (рис. 9), замечаем, что уравнение $g(x) = a$ имеет более двух корней при выполнении условий $g(-0{,}5) < a < g(1)$ или $-3{,}5 < a < 1$.

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
А. КОРЯНОВ,
А. ПРОКОФЬЕВ
1–15 март 2011

Ответ: $-3{,}5 < a < 1$.

Часто используемые семейства функций

Рассмотрим часто встречающиеся в подобных задачах семейства функций $y_a(x) = g(x, a)$ или уравнения $G(x, y, a) = 0$ и их графики.

1. Семейство линейных функций $g(x, a) = a(x - x_0) + y_0$, графики которых - прямые, проходящие через точку (x_0, y_0) и имеющие угловой коэффициент, равный a («пучок прямых» – так обычно называют это семейство графиков).

2. Семейство функций $g(x, a) = k\,|\,x - x_0(a)\,| + y_0(a)$, графики которых получаются из графика $y = k\,|\,x\,|$ параллельным переносом на вектор $\{x_0(a), y_0(a)\}$ (семейство «уголков»).

3. Семейство окружностей $(x - x_0(a))^2 + (y - y_0(a))^2 = (r(a))^2$ с центром в точке $(x_0(a), y_0(a))$, радиуса $|\,r(a)\,|$.

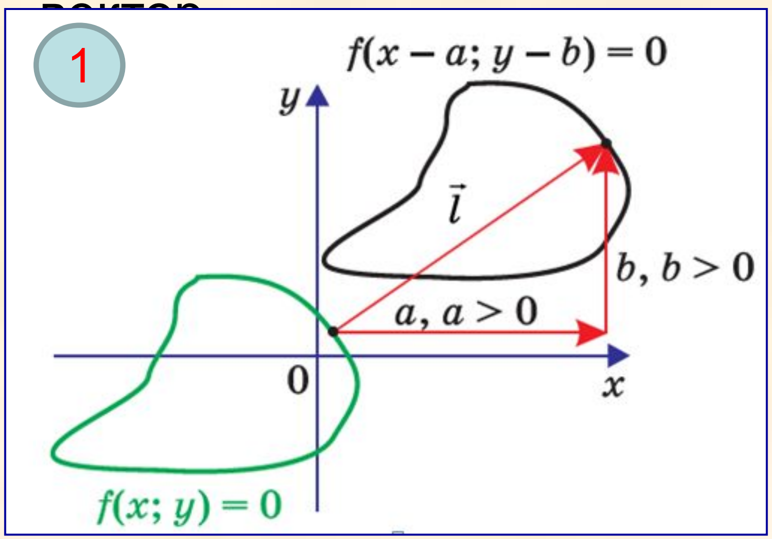
При решении уравнения (неравенства) вида $f(x) \vee a$ на плоскости Oxa строятся график функции $f(x)$ (назовем его «*неподвижным*») и прямые $a = \mathrm{const}$ параллельные оси Ox. Далее в соответствии с условием задачи исследуется расположение построенных графиков.

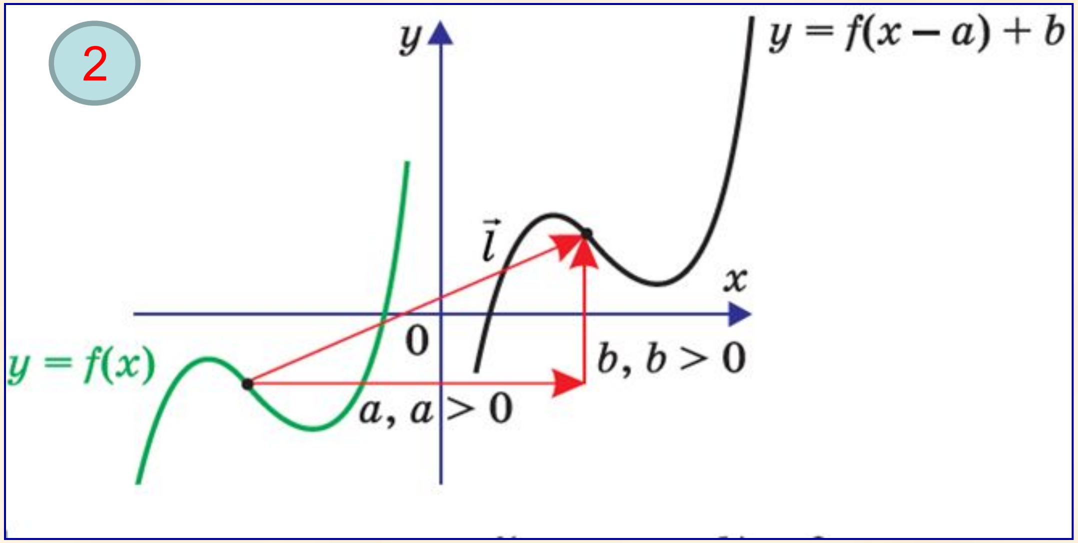
Перемещение графиков семейства функции

В общем случае при фиксированном значении параметра a кривая семейства $f(x-x_0(a), y-y_0(a))=0$, соответствующая этому значению параметра, получается из кривой, заданной уравнением $f(x;y)=0$, параллельным переносом на вектор $\vec{l}=\{x_0(a); y_0(a)\}$.

Уравнение семейства функций $y=f(x-x_0(a))+y_0(a)$ можно записать в виде $(y-y_0(a))-f(x-x_0(a))=0$ и далее строить графики при каждом фиксированном значении параметра a, сдвигая график функции $y=f(x)$ соответственно на вектор $\vec{l}=\{x_0(a); y_0(a)\}$.

На рис. 1 и 2 показано соответствующее смещение кривых на вектор $\vec{l}=\{a, b\}$.





Пример с перемещением графиков («уголок»)

Пример 2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 + 2x - 3| - 2a = |x - a| + 3$$

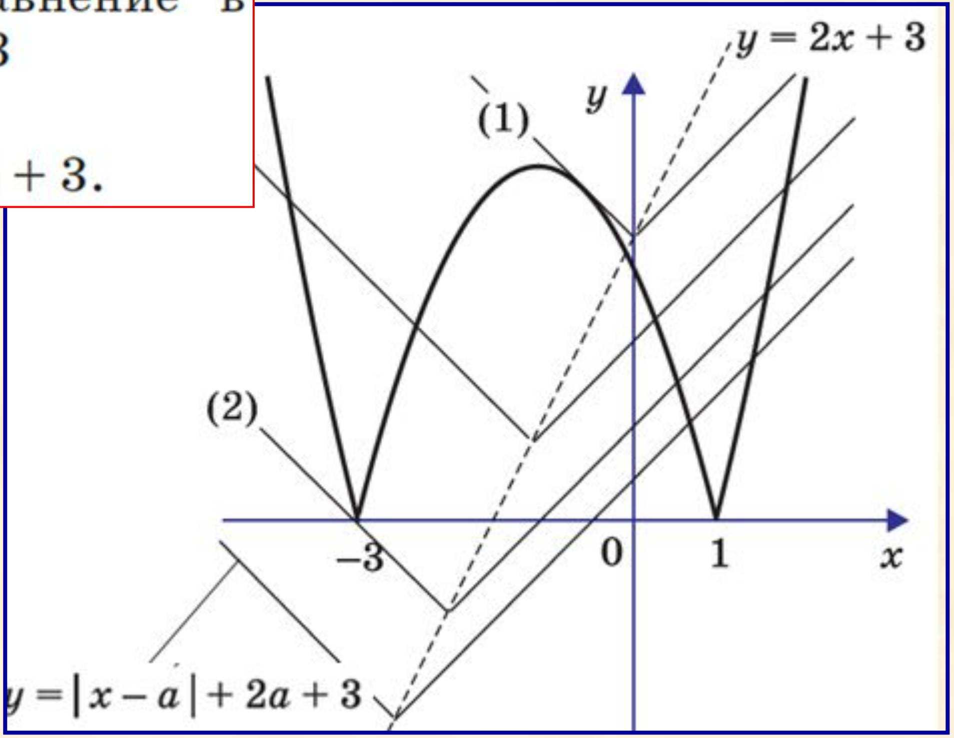
имеет ровно три различных корня.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $|x^2 + 2x - 3| = |x - a| + 2a + 3$ и рассмотрим графики функций

$$y = |x^2 + 2x - 3| \text{ и } y = |x - a| + 2a + 3.$$

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №5 – 6 (754)
С. ШЕСТАКОВ №5 – 6 (754)

График функции $y = |x - a| + 2a + 3$ получается из графика функции $y = |x|$ параллельным переносом на вектор $\vec{l}(a;\ 2a+3)$.



Графиком функции $y = |x - a| + 2a + 3$ является прямой угол с вершиной в точке $(x_0;\ y_0)$, где $x_0 = a$, $y_0 = 2a + 3$. Из двух последних формул следует,

что $y_0 = 2x_0 + 3$. Следовательно, вершина угла $y = |x - a| + 2a + 3$ лежит на прямой $y = 2x + 3$, а не является произвольной точкой плоскости.

Ответ: $\dfrac{1}{12}$; -2.

Пример с «пучком прямых» (ЕГЭ 2013)

Пример 3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \left| \frac{1}{x} + 4 \right| = 2a$$

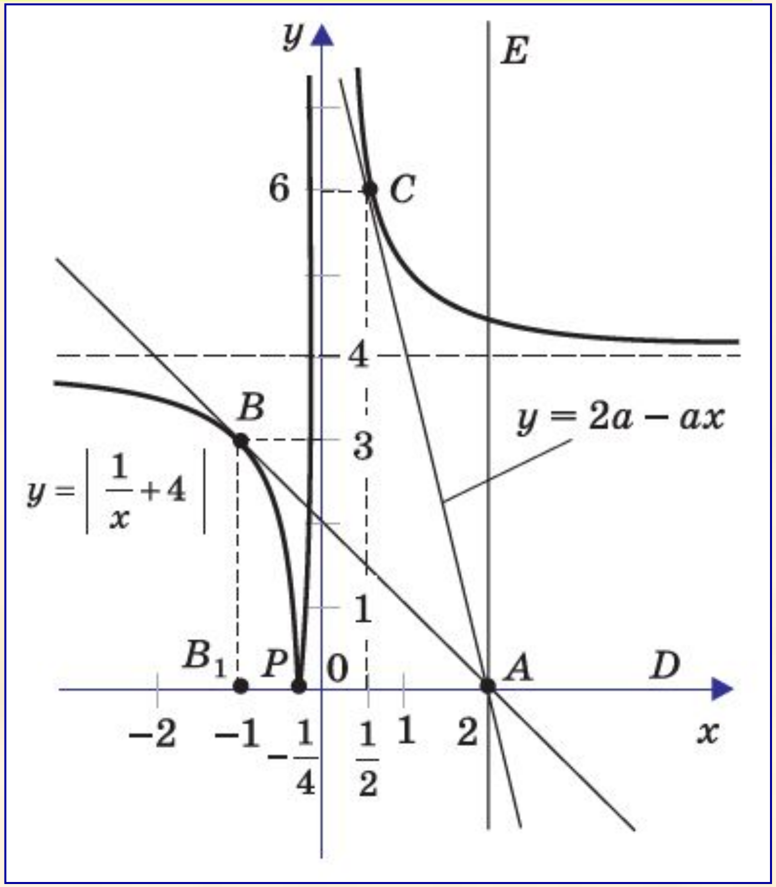
имеет хотя бы один корень, и указать число корней уравнения для каждого значения a.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$\left| \frac{1}{x} + 4 \right| = 2a - ax$$

и рассмотрим графики функций

$$y = \left| \frac{1}{x} + 4 \right| \text{ и } y = 2a - ax.$$



Графиком функции $y = 2a - ax$ является прямая. Заметим, что $y = -a(x - 2)$ и если $x = 2$, то $y = 0$ вне зависимости от значений параметра. Поэтому прямая $y = 2a - ax$ при любом значении параметра проходит через точку $A(2; 0)$.

Ответ: один корень, если $a \in (-\infty; 0] \cup (1; 4)$; два корня, если $a \in \{1; 4\}$; три корня, если $a \in (0; 1) \cup (4; +\infty)$.

Пример с «пучком прямых» (ЕГЭ 2013)

Пример 1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

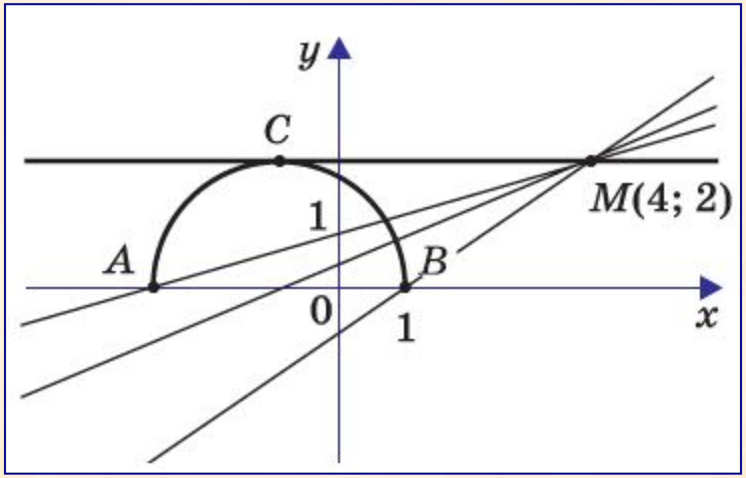
имеет единственный корень.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{3 - 2x - x^2} = -ax + 4a + 2$$

и рассмотрим графики функций

$$y = \sqrt{3 - 2x - x^2} \text{ и } y = -ax + 4a + 2.$$



Посколькуправаячастьвформуле $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ неотрицательна, то и левая ее часть не может быть отрицательной. Поэтому

$$\begin{cases} y^2 = 3 - 2x - x^2, \\ y \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Графиком функции $y = -ax + 4a + 2$ является прямая. Заметим, что $y = -a(x - 4) + 2$ и если $x = 4$, то $y = 2$ вне зависимости от значений параметра. Поэтому прямая $y = -ax + 4a + 2$ при любом значении параметра проходит через точку $M(4; 2)$. Данное уравнение имеет единственный корень только в том случае, когда эта прямая имеет с полуокружностью единственную общую точку.

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №5 – 6 (754)

С. ШЕСТАКОВ №5 – 6 (754)

Ответ: $\{0\} \cup \left[-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}\right)$.

Окружность с изменяющимся радиусом

4. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства

$$x^2 + y^2 \leq a$$

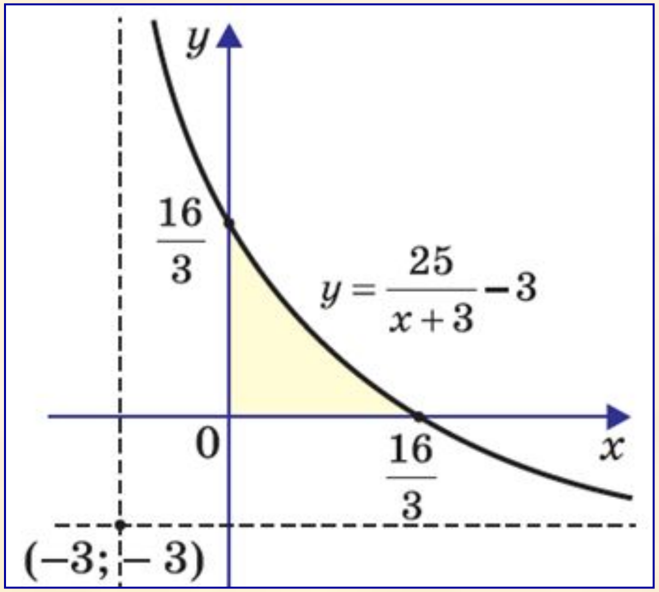
следует неравенство

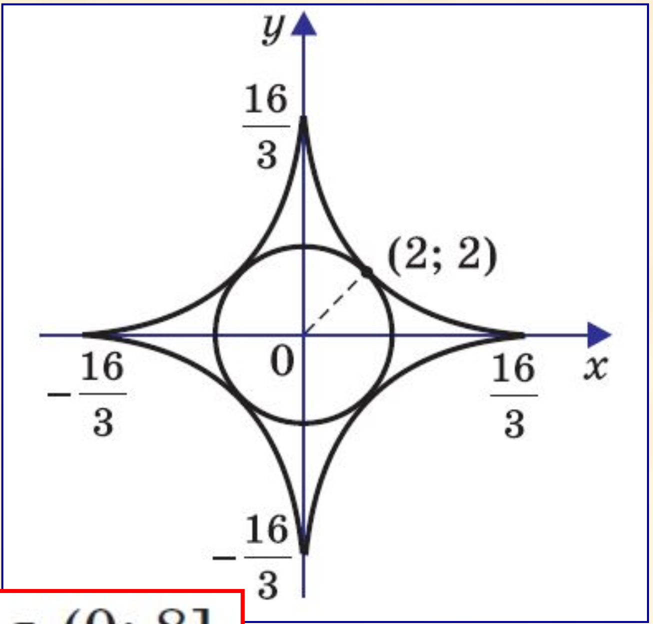
$$(|x| + 3)(|y| + 3) \leq 25.$$

Решение. Согласно условию задачи, нужно найти такие значения параметра $a > 0$, при которых множество решений первого неравенства является подмножеством решений второго неравенства. Решением первого неравенства являются точки круга с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{a}$.

Множества решений каждого неравенства симметричны относительно координатных осей и прямой $y = x$. Действительно, если $(x; y)$ — решение, то $(-x; y)$, $(x; -y)$, $(-x; -y)$, $(y; x)$ тоже решения. Поэтому достаточно рассмотреть случай $x \geq 0$, $y \geq 0$. Тогда $|x| = x$, $|y| = y$ и второе неравенство примет вид:

$$y \leq \frac{25}{x+3} - 3.$$





Ответ: $a \in (0; 8]$.

Область значений функции и ее график

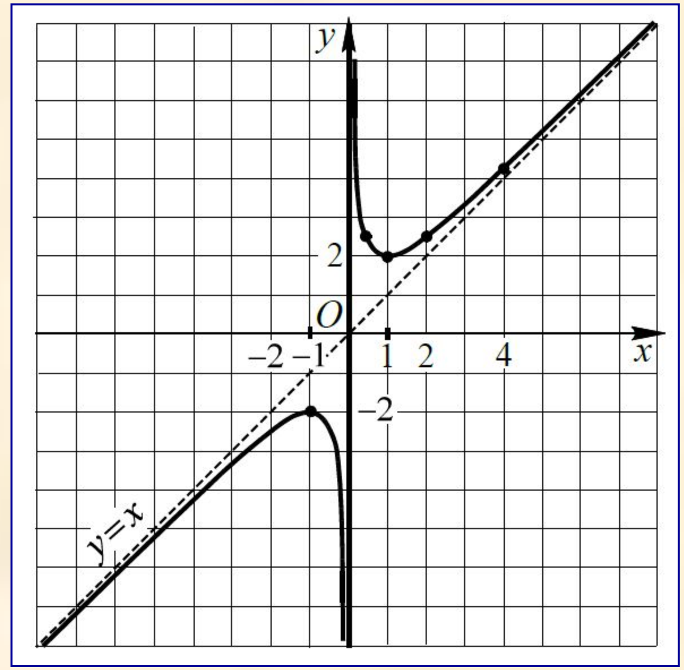
$f(x)=x+\frac{1}{x}$, $E(f)=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$, $f(x)\geq 2$ при $x>0$.

Пример 2 («Покори Воробьевы горы-2012»). При каждом значении параметра a найдите количество решений уравнения

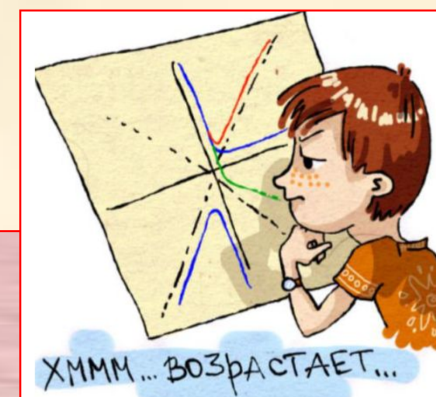
$$16x^4-32x^3+ax^2+8x+1=0.$$

$$16x^2-32x-\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=-a \Leftrightarrow$$

$$2x+\frac{1}{2x}=2\pm\sqrt{\frac{24-a}{4}}.$$

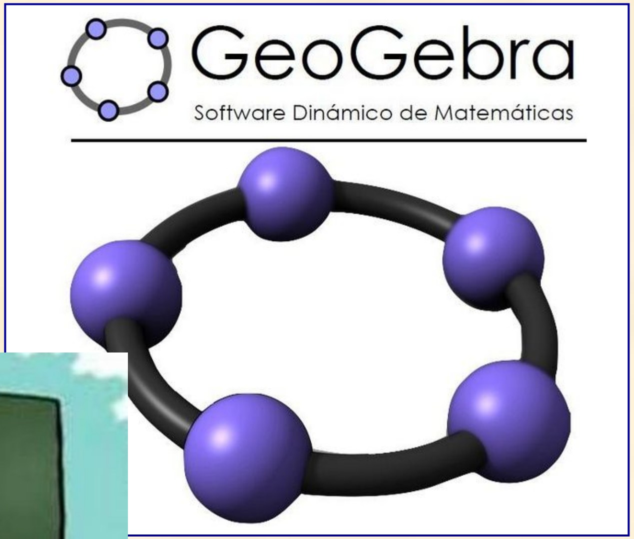


Ответ. Нет решений при $a>24$; одно решение при $a=24$; три решения при $a=-40$; два решения при $-40<a<24$; четыре решения при $a<-40$.



Статья. Прокофьев А.А., Бардушкин В.В. Использование свойств Функции $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ при решении задач. «Математика в школе», − М.: «Школьная пресса», 2013. − № 9. − С. 23–31.

Обучение графическим методам решения задач с параметром с использованием специализированных программ



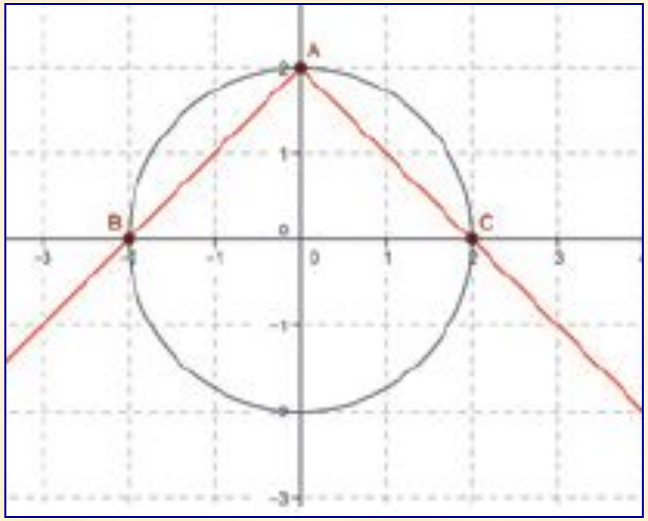
А. АЗЕВИЧ,
г. Москва

РЕЦЕПТ АППЛЕТА С ПАРАМЕТРОМ

GeoGebra

http://geogebra.org/cms/en/installers.

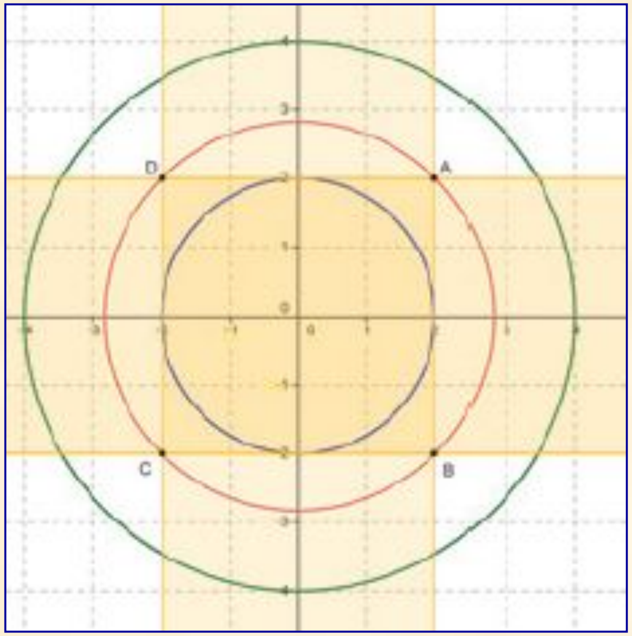
Задача 1. «Бегающий» уголок. При каком значении параметра a система уравнений $\begin{cases} y = -|x| + a, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ имеет три решения? Найдите эти решения.



Ответ: $a = 2$; $(-2; 0)$, $(2; 0)$, $(0; 2)$.

Задача 2. «Раздувающаяся» окружность. Определите количество решений системы

$\begin{cases} |x| \le 2, \\ |y| \le 2, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ при всех значениях параметра a.



Ответ: при $a = 0$ — одно решение; при $a = \pm 2\sqrt{2}$ — четыре решения; при $a \in \left(-2\sqrt{2};\ 0\right) \cup \left(0;\ 2\sqrt{2}\right)$ — бесконечное множество решений; при $a \in \left(-\infty;\ -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2};\ +\infty\right)$ — нет решений.

А. АЗЕВИЧ,
г. Москва

РЕЦЕПТ АППЛЕТА С ПАРАМЕТРОМ

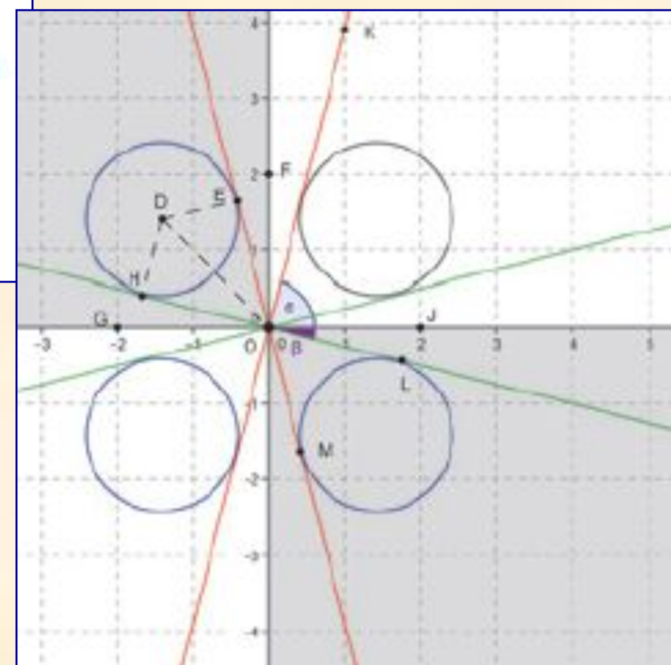
GeoGebra

http://geogebra.org/cms/en/installers.

GeoGebra

Она незаменима в повседневной работе учителя. Построение геометрических чертежей и графиков функций — два вида работы, которые чаще всего приходится выполнять на уроке. С *GeoGebra* обучающие рисунки будут не только наглядными, но и динамичными.

Задача 3. «Вращающийся» уголок. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} xy \le 0, \\ \left(|x| - \sqrt{2}\right)^2 + \left(|y| - \sqrt{2}\right)^2 = 1, \\ y = a|x| \end{cases}$$
имеет единственное решение.



Ответ: $a = \pm\left(2+\sqrt{3}\right)$ и $a = \pm\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №6 (744)
сентября | июнь 2013 №6 (744)

В. ПАРШЕВА,
г. Северодвинск, Архангельская обл.

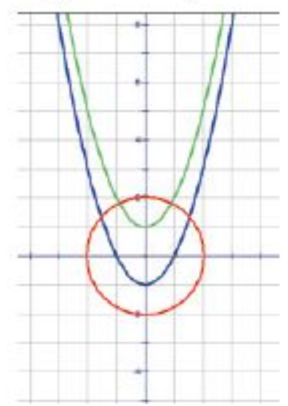
http://festival.1september.ru/authors/101-833-510

МАТЕМАТИКА ПЛЮС ИНФОРМАТИКА

Задача-исследование. Система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + b, \end{cases}$ где b — произвольное число, может иметь одно, два, три или четыре решения, а также может не иметь решений. Выясните число решений системы в зависимости от значений b. Проиллюстрируйте каждый случай графически.

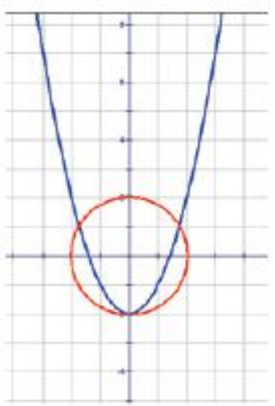
С помощью программы «Живая геометрия» ученики строят графики (внизу страницы) и делают выводы.

При $b = -1$; $b = 1$



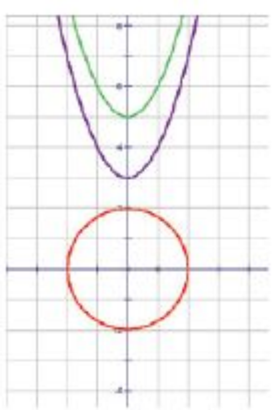
Система имеет два решения

При $b = -2$



Система имеет три решения

При $b = 3$; $b = 5$



Если $b > 2$, то система не имеет решений

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №5 (743)
Первое сентября май 2013

Системы уравнений. С чего начать?

Определите, при каких значениях a система уравнений имеет указанное число решений m.

1. а) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=a; \end{cases}$ $m=1$; б) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y-|x|=a; \end{cases}$ $m=2$;

в) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y+|x|=a; \end{cases}$ $m=4$; г) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ |x|+|y|=a \end{cases}$ имеет решение.

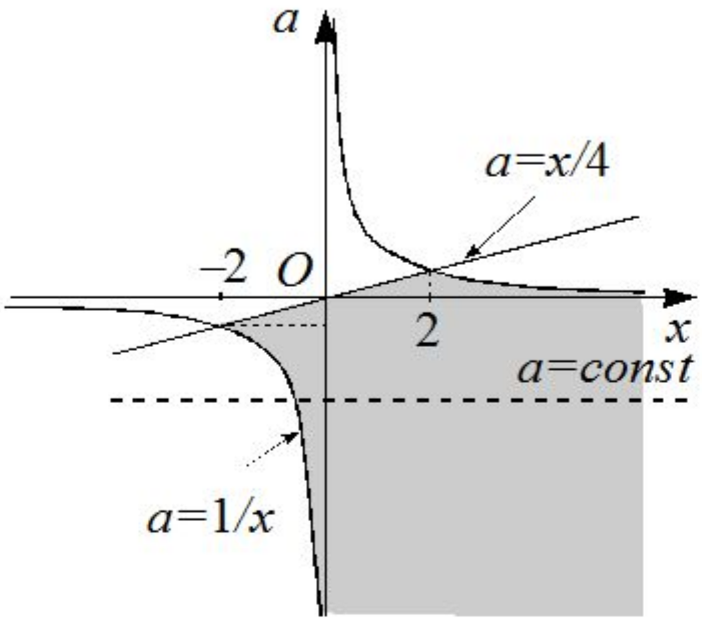
2. а) $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ 2|x|+|y|=4; \end{cases}$ $m=8$; б) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ \big||x|-|y|\big|=a; \end{cases}$ $m=8$.

3. $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+4=0, \\ y-|x-2|=a; \end{cases}$ $m=4$.

Ответы: **1.** **а)** $-\sqrt{2}$ или $\sqrt{2}$; **б)** $a\in(-1;1)\cup\{-\sqrt{2}\}$; **в)** $a\in(1;\sqrt{2})$; **г)** $a\in[1;\sqrt{2}]$. **2.** **а)** $16/5<a<4$; **б)** $0<a<4$. **3.** $a\in(1-\sqrt{2};0)$.

Система неравенств. Метод областей

Пример. Определите, при каких значениях параметра a имеет хотя бы одно решение система неравенств $\begin{cases} ax - 1 \le 0, \\ x - 4a \ge 0. \end{cases}$



Решение. Воспользуемся графическим методом. Заштрихуем на плоскости Oxa множество точек (см. рис.), координаты $(x;a)$ которых удовлетворяют системе неравенств.

Неравенству $ax - 1 \le 0$ удовлетворяют координаты точек, лежащих выше гиперболы $a = 1/x$ при $x < 0$, и ниже – при $x > 0$. Неравенство $x - 4a \ge 0$ выполняется для точек, лежащих ниже прямой $a = x/4$.

Данная система имеет решение, если прямая $a = const$ пересекает заштрихованную область (см. рис.), то есть при $a \le 0,5$.

Ответ. $a \le 0,5$.

Для самостоятельной работы. Метод областей

Определите, при каких значениях параметра a система неравенств:

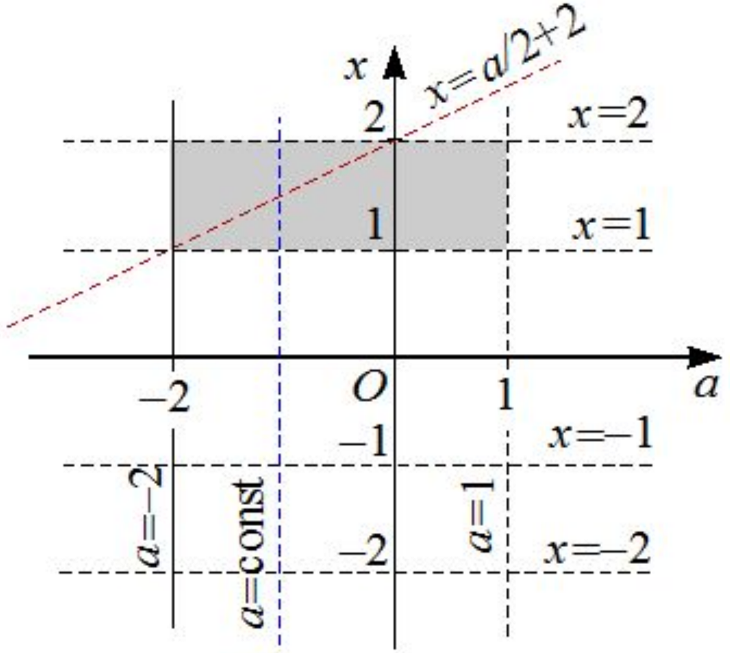
а) $\begin{cases}(a-1)x \ge 0,\\ x+5 \le 0\end{cases}$ имеет решение; б) $\begin{cases}x^2+x<(a-x)^2,\\ x^2+x \ge 0,\\ a-x>0\end{cases}$ не имеет решений.

Ответ. **а)** $a \le 1$; **б)** $a \le -1$.

Метод областей

Пример. При каждом значении параметра a решить систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{2-|x|}(1-a)<0, & \text{(I)} \\ \sqrt{2x-2}>\sqrt{a+2}. & \text{(II)} \end{cases}$$



Решение. Область определения данной системы задается системой:

$$\begin{cases} 2-|x|>0, \\ 2-|x|\neq 1, \\ 1-a>0, \\ 2x-2\geq 0, \\ a+2\geq 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 1<x<2, \\ -2\leq a<1 \end{cases}$$

и выделена фоном на плоскости Oax (см. рис.). На области определения верно: $0<2-|x|<1$, (I) $\log_{2-|x|}(1-a)<0 \;\Leftrightarrow\; 1-a>1 \;\Leftrightarrow\; a<0$,

(II) $\sqrt{2x-2}>\sqrt{a+2} \;\Leftrightarrow\; x>\dfrac{a}{2}+2$. Тогда, на области определения получаем $\begin{cases} 1<x<2, \\ x>\dfrac{a}{2}+2, \\ -2\leq a<0. \end{cases}$ Если $-2\leq a<0$, то $1\leq\dfrac{a}{2}+2<2$ верно и $\dfrac{a}{2}+2<x<2$.

Ответ: если $a<-2$ или $a\geq 0$, то $\varnothing$; если $-2\leq a<0$, то $\dfrac{a}{2}+2<x<2$.

Системы уравнений и неравенств

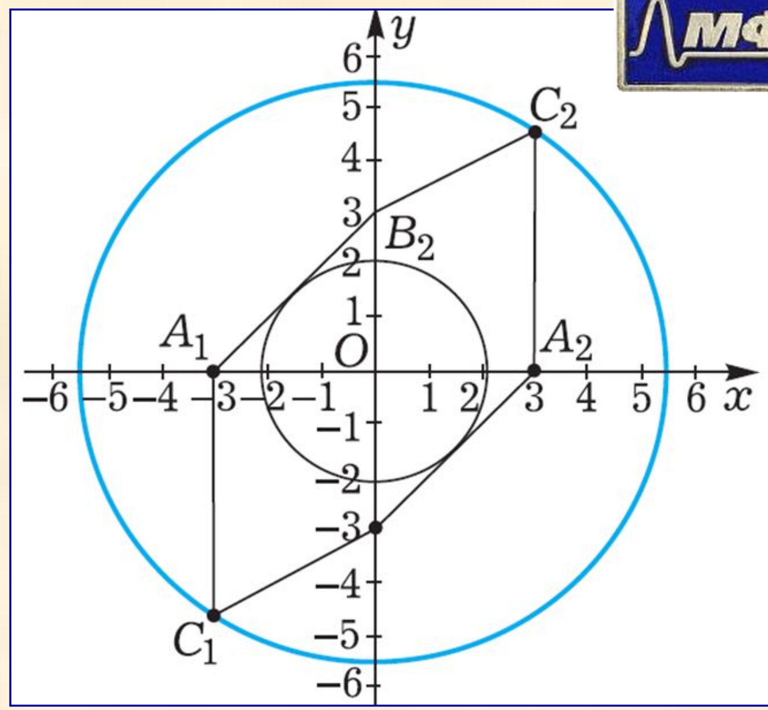
Пример 6. Найти все значения а, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x|+2|y|+|2y-3x|=12, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два действительных решения.

Решение. Графиком первого уравнения системы является замкнутая ломаная L (граница многоугольника) с вершинами в точках, лежащих на прямых $x=0$, $y=0$, $y=\frac{3}{2}x$ (см. рис. 2). Найдём эти вершины. Если $x=0$, то $|y|=3$ ($y=3$ и $y=-3$); если $y=0$, то $|x|=3$; если $y=\frac{3}{2}x$, то $|x|=3$, $|y|=\frac{9}{2}$.

Ломаная L изображена на рис. 2, где $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$, $B_1(0;-3)$,



$B_2(0;3)$, $C_1\left(-3;-\frac{9}{2}\right)$, $C_2\left(3;\frac{9}{2}\right)$.

Графиком второго уравнения при $a>0$ является окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $O(0;0)$.

Ответ. $a_1=\frac{9}{2}$, $a_2=\frac{117}{4}$.

Системы уравнений и неравенств

Пример 7. (МФТИ, 2008). Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+31 \le 8(|x|+|y|), \\ x^2+y^2-2y=a^2-1 \end{cases}$$

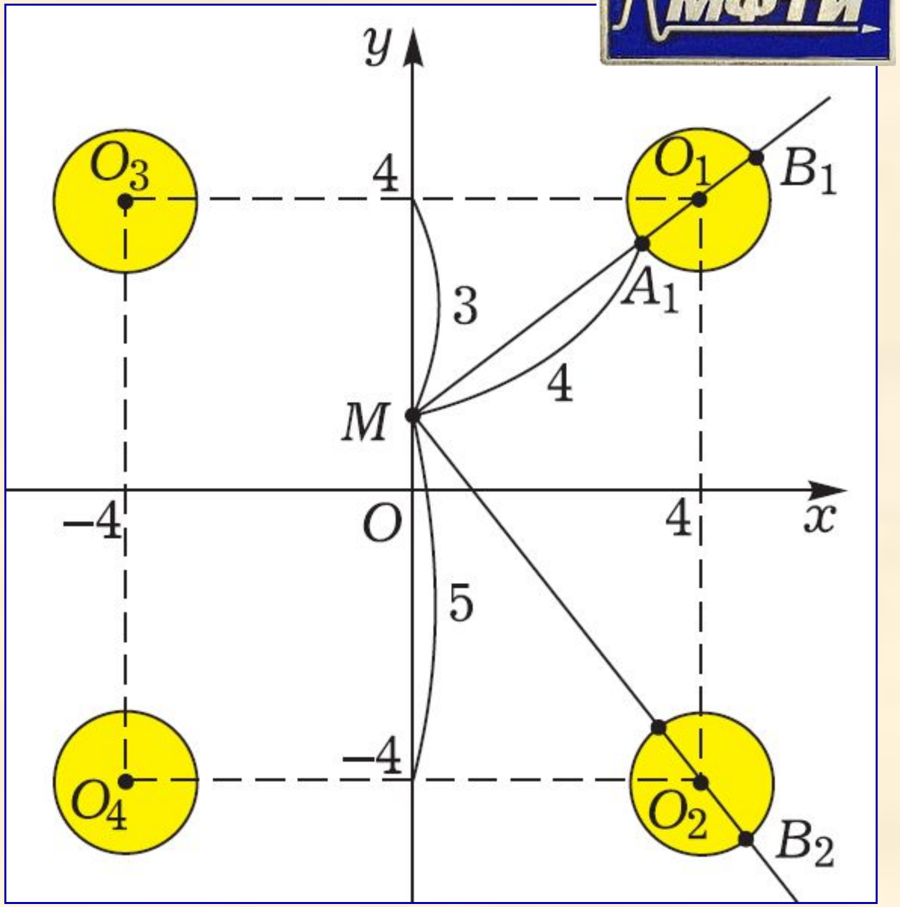
имеет хотя бы одно решение.

Решение. Неравенство системы можно записать в виде

$$(|x|-4)^2+(|y|-4)^2 \le 1.$$

Множество E решений этого неравенства – объединение кругов K_1, K_2, K_3, K_4 (вместе с их границами) радиуса 1 (см. рис.) с центрами $O_1(4;4), O_2(4;-4), O_3(-4;4), O_4(-4;-4)$.

Запишем уравнение системы в виде $x^2+(y-1)^2=a^2$.



Ответ. $4 \le |a| \le \sqrt{41}+1.$

Статья. Прокофьев А.А., Шабунин М.И. Системы уравнений и неравенств с двумя переменными. «Потенциал», − М.: МФТИ, − М., 2011, №3. – С. 29-36.

Системы уравнений и неравенств

Пример 8. (МФТИ, 2010). Найти все значения параметра a, при которых система

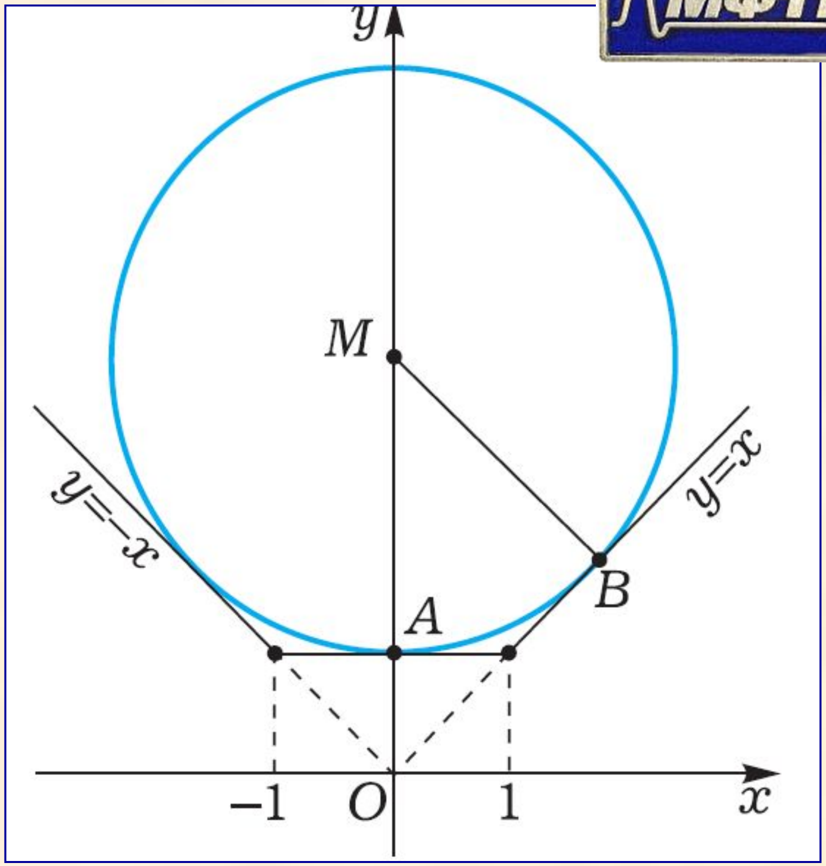
$$\begin{cases} |x-1|+|x+1|-2y=0, \\ x^2+y^2-2ay+2a=1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение. Первое уравнение системы запишем в виде

$$y=\begin{cases} 1, & |x|\le 1, \\ |x|, & |x|>1. \end{cases}$$

Второе уравнение системы, записанное в виде $x^2+(y-a)^2=(a-1)^2$, является при $a\ne 1$ уравнением окружности с центром в точке $(0;a)$ радиуса $|a-1|$. При любых $a\ne 1$ эта окружность проходит через точку $A(0;1)$ и касается прямой $y=1$ в точке A.



Ответ. $2+\sqrt{2}$.

ПОТЕНЦИАЛ

Метод наглядной интерпретации на прямой и плоскости

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
А. КОРЯНОВ, А. ПРОКОФЬЕВ, 1–15 март 2011

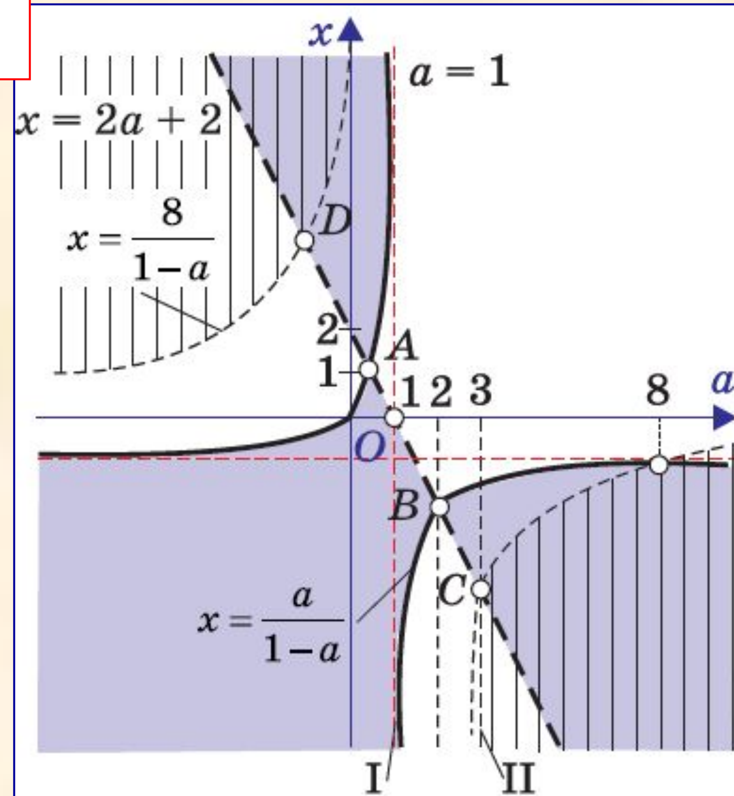
Пример 8. (*ЕГЭ-2010, тренировочная работа МИОО.*) Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x-ax-a}{x-2+2a} \geq 0, \\ x-8>ax \end{cases}$$ не имеет решений.

Решение. Воспользуемся методом областей. Рассмотрим второе неравенство системы: $(1-a)x>8$. Уравнение $(1-a)x=8$ задает на плоскости Oax гиперболу, которая разбивает ее на три области. Для определения знака значения выражения $f_1(x;a)=(1-a)x-8$ достаточно подставить координаты точки $O(0;0)$ и затем воспользоваться правилом знакочередования.

Для второго неравенства рассмотрим выражение $f_2(x;a)=\dfrac{x-ax-a}{x-2+2a}$, которое определено при $x \neq 2(1-a)$ и обращается в нуль при $x=\dfrac{a}{1-a}$.

Проводя прямые, параллельные оси x, видим (рис.), что существует два критических положения этих прямых I ($a=1$) и II ($a=3$).



Ответ: $1 \leq a \leq 3$.

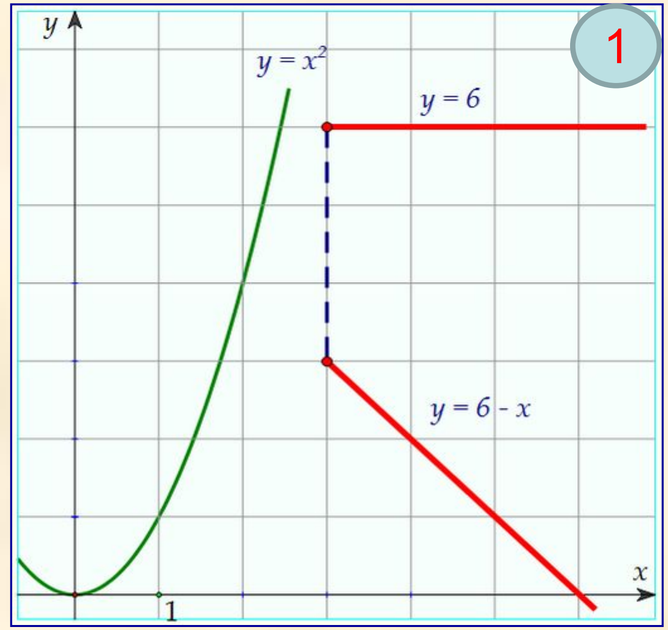
Метод наглядной интерпретации на плоскости

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

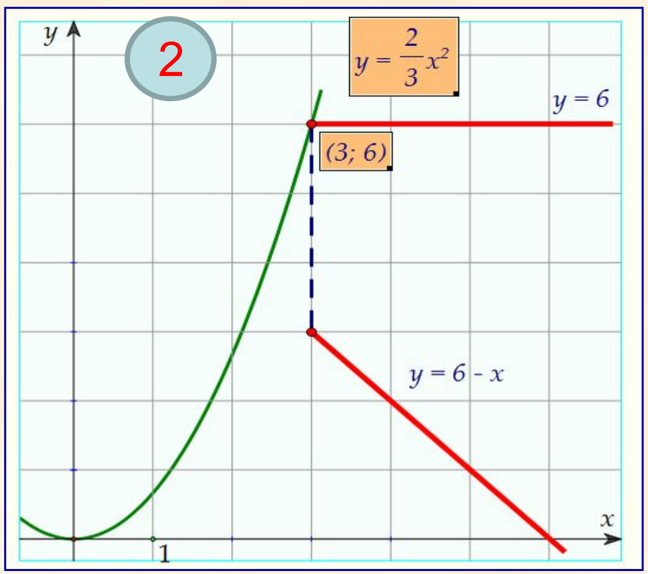
$$\begin{cases} y^2+xy-7x-14y+49=0 \\ y=ax^2+1 \\ x\geq 3 \end{cases}$$

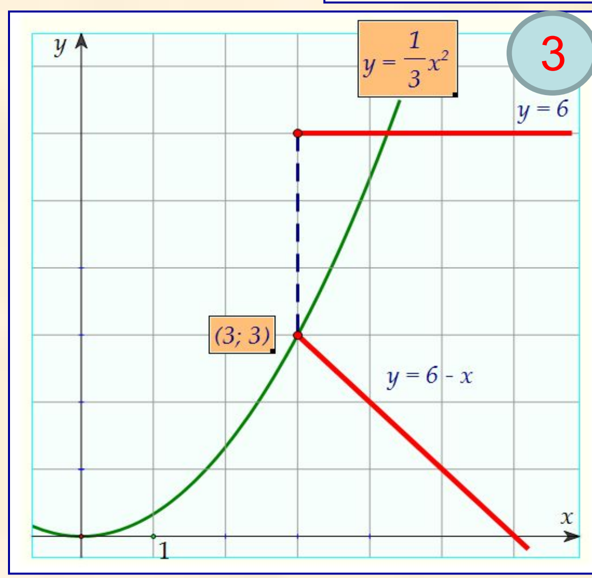
имеет ровно одно решение.

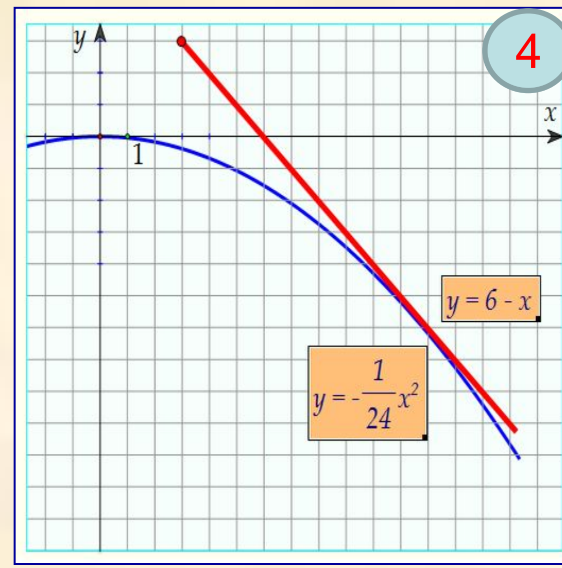
Решение. Сдвинем все графики на единичку вниз $\begin{cases} (y-6)(y-6+x)=0 \\ y=ax^2 \\ x\geq 3 \end{cases}$



ALEXLARIN.COM
вариант №93







Егэ-тренер. Подготовка 2014-2015

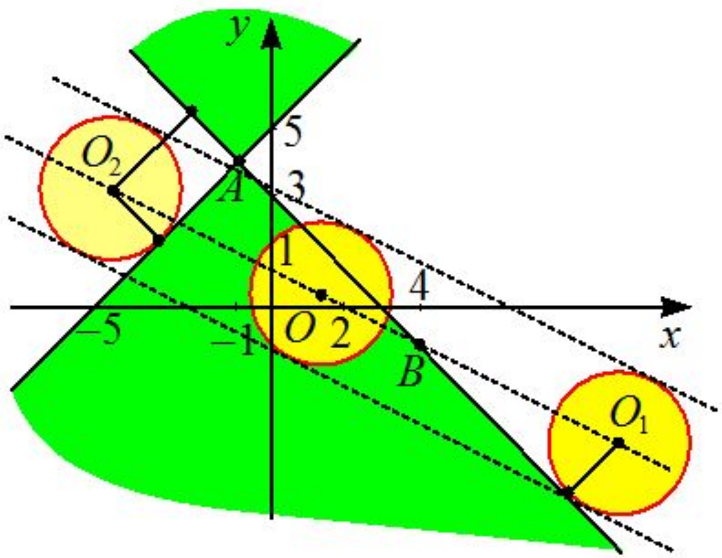
Ответ: $0; -\frac{1}{24}; \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$

Катится окружность

Пример. Найти значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \ge 2(x+4y) - 15, \\ x^2 + y^2 + 6a^2 - 4 \le a^2 + 4(a-1)(x+1) - 2y(a-2) \end{cases}$$ имеет решения.

Решение. Приведем систему к виду $\begin{cases} (y-4)^2 - (x+1)^2 \ge 0, & (1) \\ (x-2a+2)^2 + (y+a-2)^2 \le 4. & (2) \end{cases}$



Из (1) получаем: $(y-4)^2 - (x+1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-x-5)(y+x-3) \ge 0$.

Множество точек F_1 на плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют (1), выделено на рисунке зеленым цветом.

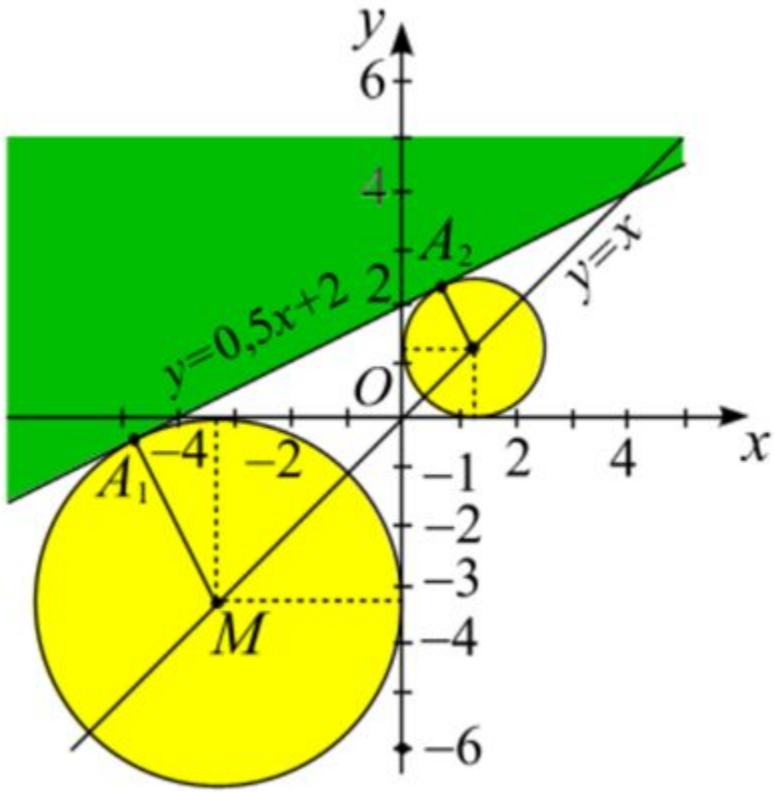
Неравенство (2) задает множество точек F_2, представляющее собой круг радиуса 2 с центром в точке $(2a-2; -a+2)$, при каждом значении параметра a лежащей на прямой $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Система неравенств (1) и (2) имеет хотя бы одно решение, если множества F_1 и F_2 содержат хотя бы одну общую точку. Далее находим, при каких значениях параметра a окружность, заданная уравнением $(x-2a+2)^2 + (y+a-2)^2 = 4$ касается прямых l_1: $y = x+5$ и l_2: $y = -x+3$.

Ответ. $\frac{-1-2\sqrt{2}}{3} \le a \le 3 + 2\sqrt{2}$.

Катится окружность

Пример. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases}(x-a)^2+(y-a)^2 \le a^2, & (1)\\ 2y-x \ge 4 & (2)\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?



Решение. ГМТ F_1 плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству (1) системы, есть круг с центром $M(a;a)$ и радиусом $r=|a|$.

ГМТ F_2 плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству (2) системы, – верхняя полуплоскость с границей $-x+2y-4=0$.

Данная система неравенств будет иметь хотя бы одно решение, если множества F_1 и F_2 будут иметь хотя бы одну общую точку. Далее, применяя формулу расстояния от точки $M(a;a)$ до прямой l, заданной уравнением $-x+2y-4=0$, получим:

$$\rho(M,l)=\frac{|-a+2a-4|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=|a|.$$

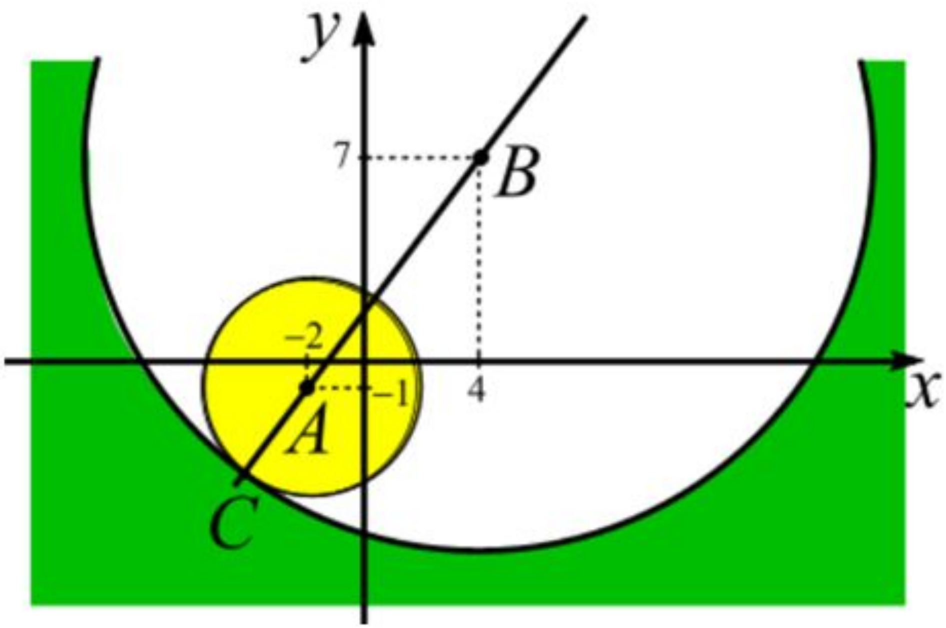
Ответ. $(-\infty;-1-\sqrt{5}]\cup[-1+\sqrt{5};+\infty)$.

Окружность с изменяющимся радиусом

Пример. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x+2y\le a^2-5, \\ x^2+y^2-8x-14y\ge 4a^2+12a-56 \end{cases}$$ имеет единственное решение?

Решение. Данную систему можно записать следующим образом:



$$\begin{cases} (x+2)^2+(y+1)^2\le a^2, \\ (x-4)^2+(y-7)^2\ge (2a+3)^2. \end{cases}$$

При $a=0$ получаем систему

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y+1)^2\le 0, \\ (x-4)^2+(y-7)^2\ge 3^2, \end{cases}$$

имеющую единственное решение $(-2;-1)$.

При $a\ne 0$ система имеет единственное решение в случае, если круг с центром в точке A содержится внутри круга с центром в точке B и касается его границы, то есть: $|a|+10=|2a+3|$.

Ответ. $-13; 0; 7$

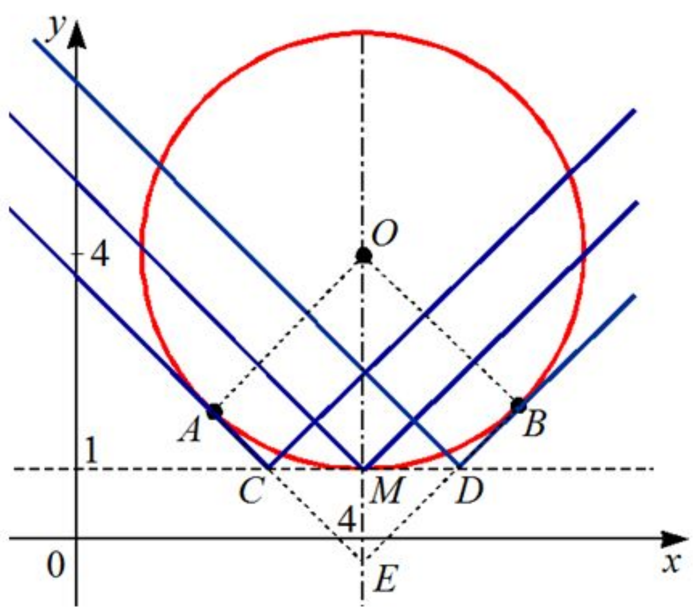
Касательная к графику функции (находится геометрически)

ЕГЭ, 2011. Найти все значения a, при каждом которых система

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-4)^2=9,\\ y=|x-a|+1\end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение. Первое уравнение системы задает окружность радиуса 3 с центром в точке $O(4;4)$. Второе – прямой угол с вершиной в точке $(a;1)$ и симметричный относительно прямой $x=a$. Прямая $y=1$ является касательной к окружности.



Графики имеют ровно три точки в следующих случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке касания окружности и прямой $y=1$ (точка M), а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это условие выполняется при $a=4$.

2. Одна из сторон угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности. Таких случаев два.

Ответ: $7-3\sqrt{2}$, 4 и $1+3\sqrt{2}$.

Касательная к графику функции

В общем случае для определения абсциссы x_0 точки касания графиков функций $f(x)$ и $g(x, a)$ и соответствующего значения параметра a используют то, что касающиеся графики в точке касания имеют общую касательную. Это означает, что в точке x_0 равны значения функций $f(x_0) = g(x_0; a)$ и значения их производных $f'(x_0) = g'(x_0; a)$. В итоге получается система уравнений:

$$\begin{cases} f'(x_0) = g'(x_0; a), \\ f(x_0) = g(x_0; a). \end{cases}$$

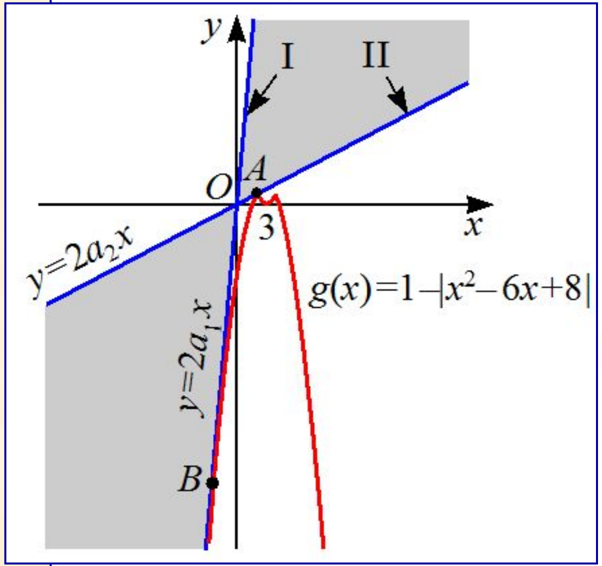
АБИТУРИЕНТ RU

Касательная к графику функции

Пример (ЕГЭ, 2010). Найти все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-6x+8|$ меньше 1.

Решение. При каждом a функция $f(x)=2ax+|x^2-6x+8|$ определена и непрерывна на всей числовой прямой и ограниченна снизу.

Условию удовлетворяют такие a, при каждом из которых неравенство $f(x)<1$ или



$2ax+|x^2-6x+8|<1 \iff 2ax<1-|x^2-6x+8|$ ***имеет хотя бы одно решение***, то есть график функции $g(x)=1-|x^2-6x+8|$ расположен выше прямой $y=2ax$ хотя бы при одном значении x. Построим на плоскости Oxy график функции $g(x)$.

Равенство $y=2ax$ задает на плоскости Oxy семейство прямых с угловым коэффициентом $2a$, проходящих через начало координат. Имеется два критических положения этих прямых.

(I) Из условия касания в точке B прямой $y=2a_1x$ графика $g(x)=-x^2+6x-7$ на $(-\infty;2]$ найдем a_1:

$$\begin{cases} g(x_0)=y(x_0), \\ g'(x_0)=y'(x_0), \end{cases} \iff \begin{cases} -x_0^2+6x_0-7=2a_1x_0, \\ -2x_0+6=2a_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0=-\sqrt{7}, \\ 2a_1=6+2\sqrt{7}. \end{cases}$$

Угловой коэффициент k_1 первой прямой равен $k_1=2a_1=2\sqrt{7}+6$.

(II) График функции $y=2a_2x$ проходит через точку $A(2;1)$. Из уравнения $2a_2x=1$ при $x=2$ получаем $k_2=2a_2=0,5$.

Решений нет при $k_2\le k\le k_1$, $0,5\le 2a\le 2\sqrt{7}+6$, $0,25\le a\le\sqrt{7}+3$, то есть когда прямые расположены в выделенной фоном области. Соответственно, решение существует при $a\in(-\infty;0,25)\cup(\sqrt{7}+3;+\infty)$.

Ответ. $(-\infty;0,25)\cup(\sqrt{7}+3;+\infty)$.

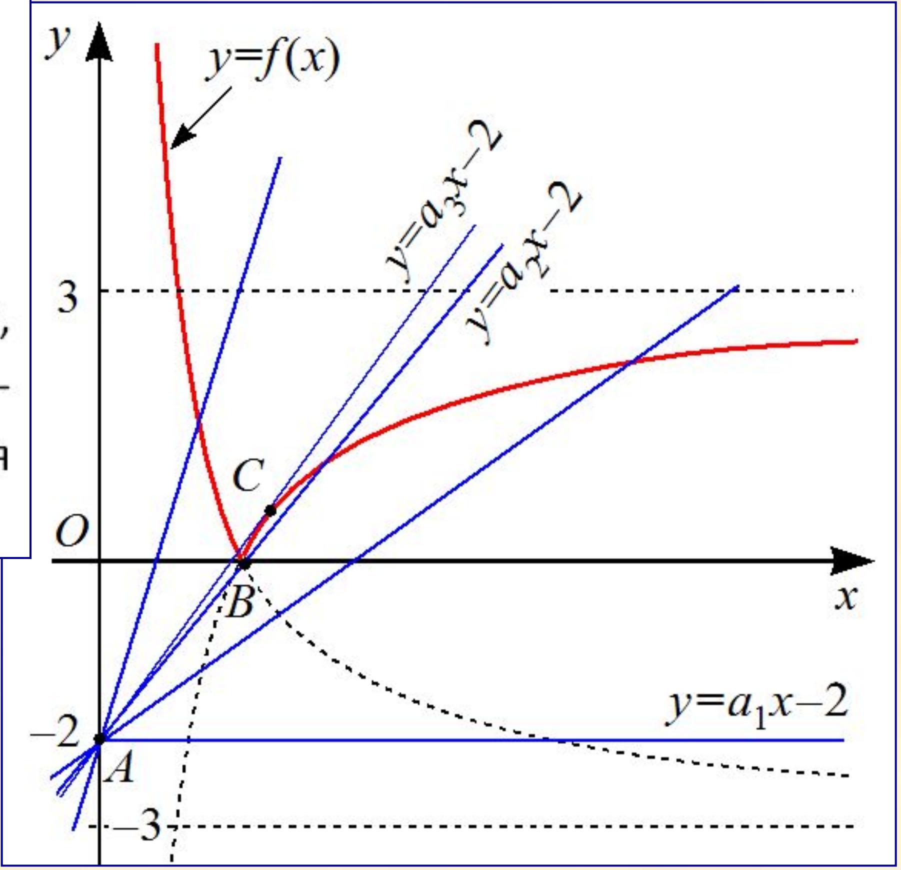
Касательная к графику функции

ЕГЭ, 2012. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x}-3\right| = ax-2$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Решение. Данное уравнение имеет вид $f(x) = g(x, a)$, где

$$f(x) = \left|\frac{5}{x}-3\right| = \begin{cases} \frac{5}{x}-3, \text{ если } 0 < x \le \frac{5}{3}, \\ 3-\frac{5}{x}, \text{ если } x \ge \frac{5}{3}. \end{cases}$$

График $f(x)$ состоит частей двух гипербол, а $g(x, a) = ax-2$ задает семейство линейных функций, графиками которых являются прямые, проходящие через точку $A(0; -2)$.



Ответ: $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

На помощь приходит производная

(ЕГЭ, 2013). Найдите все значения a, при каждом из которых имеет единственный корень уравнение $ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$.

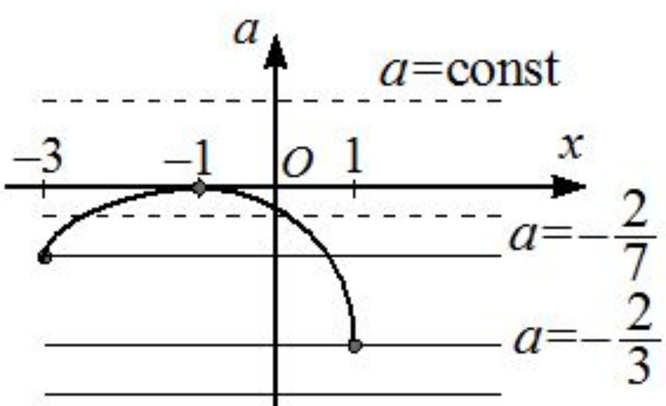
Решение. Так как $ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2 \Leftrightarrow \sqrt{3-2x-x^2}-2=a(4-x)$ и при $x=4$ подкоренное выражение отрицательно $3-2\cdot 4-4^2<0$, то можно записать $a=\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}-2}{4-x}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}-2}{4-x}$, $D(f)=[-3;1]$. Функция непрерывна на $D(f)$. Найдём её производную $f'(x)=\dfrac{-1-5x-2\sqrt{3-2x-x^2}}{2\sqrt{3-2x-x^2}\cdot(4-x)^2}$.

Из уравнения $-1-5x-2\sqrt{3-2x-x^2}=0$ получаем $x=-1$.

$-3<x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$
$f'(x)>0$	$f'(x)=0$	$f'(x)<0$

$f(-3)=-\dfrac{2}{7}$, $f(-1)=0$, $f(1)=-\dfrac{2}{3}$.



Рисуем эскиз графика в системе координат Oxa и проводим прямые $a=\text{const}$. Определяем значения параметра, при которых эти прямые пересекают график функции $f(x)$ в одной точке.

Ответ: $a\in\left[-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{7}\right)\cup\{0\}$.

Применение производной

(2010, С5) Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; \frac{4+\sqrt{6}}{2}\right)$.

(ЕГЭ 2013, С5) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-27 - 12x - x^2} = 7a + 3$$

имеет единственный корень.

Ответ: $\left[-\frac{3}{10}; -\frac{3}{16}\right) \cup \{0\}$.

(ЕГЭ 2012, С5) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{7}{x} - 4\right| = ax - 3$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Ответ: $\frac{12}{7} < a < \frac{7}{4}$.

ФИПИ

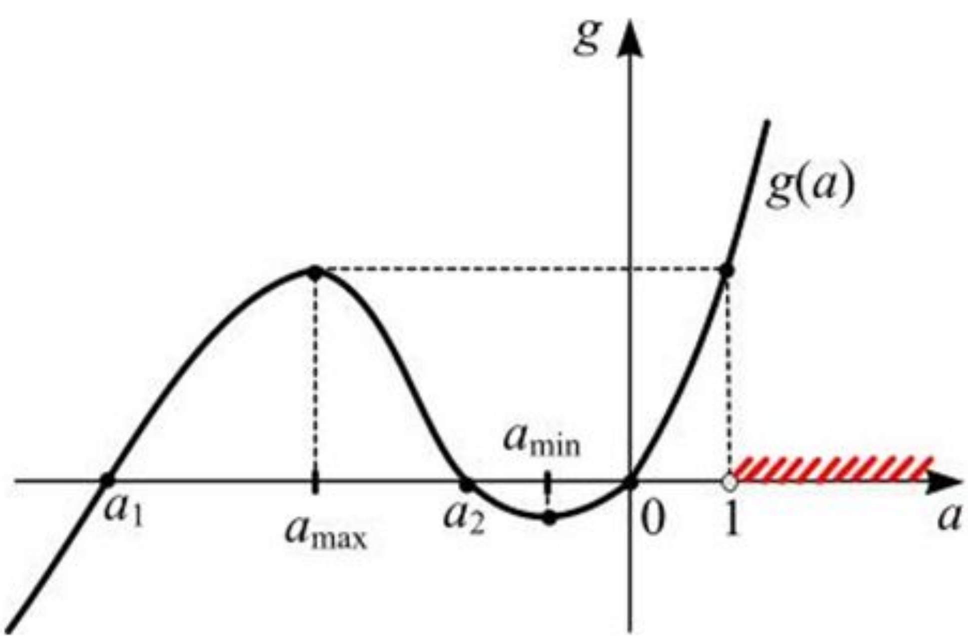
Применение производной

С5. Найдите все значения параметра a такие, что каждый корень уравнения $3^{|x|+1} - a^3 + 240 \cdot \sin\frac{\pi|x|}{4} = 5a^2 + 3a + 3$ является корнем данного уравнения только при одном значении параметра.

Решение. Приведем уравнение к виду

$$3 \cdot (3^{|x|} - 1) + 240 \cdot \sin\frac{\pi|x|}{4} = a^3 + 5a^2 + 3a.$$

Введем функции $f(x) = 3 \cdot (3^{|x|} - 1) + 240 \cdot \sin\frac{\pi|x|}{4}$ и $g(a) = a^3 + 5a^2 + 3a$.



Тогда исходное уравнение имеет вид $f(x) = g(a)$.

……………………

Так как $E(f) = [0; +\infty)$ и при $a > 1$ функция $g(a)$ принимает все значения из промежутка $(9; +\infty)$, то исходное уравнение имеет решения при всех таких a. ***Ответ:*** $a > 1$.

Печатные и электронные ресурсы

Школьные учебники.

Пособия для подготовки к ЕГЭ по математике.

Журналы «Математика в школе», «Математика для школьников»,

«Математика», «Потенциал»

Сайты: alexlarin.net, abiturient.ru (МИЭТ),

mathus.ru/math/ , reshuege.ru,

ege-ok.ru/category/zadachi-s-parametrom/

Контакты

Спасибо за внимание!

aaprokof@yandex.ru

28.11.14