

*Логарифмические
уравнения.*



Свойства логарифма

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

$$\log_{a^r} b = \frac{1}{r} \log_a b$$

$$a > 0;$$

$$b > 0;$$

$$a \neq 1$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$c \neq 1$$

$$c > 0$$



Основные свойства логарифмической функции

№	$a > 1$	$0 < a < 1$
1	$D(f) = (0, +\infty)$	
2	не является ни чётной, ни нечётной;	
3	возрастает на $(0, +\infty)$	убывает на $(0, +\infty)$
4	не ограничена сверху, не ограничена снизу	
5	не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений	
6	непрерывна	
7	$E(f) = (-\infty, +\infty)$	
8	выпукла вверх	выпукла вниз
9	точка пересечения графика функции с осью Ox $(1, 0)$.	



ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма или в основании логарифма называются логарифмическими уравнениями.

$$\log_a f(x) = b$$

$$\log_{f(x)} b = a$$

- Решение уравнений, содержащих неизвестное под знаком логарифма, основано на следующих теоремах:

$$\log_a f(x) = g(x)$$

$$f(x) = a^{g(x)}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) \neq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\log_a (f(x))^{2n} = g(x)$$

$$2n \cdot \log_a |f(x)| = g(x)$$



Основные методы решения логарифмических уравнений

- По определению логарифма;
- Метод потенцирования;
- Метод введения новой переменной;
- Метод логарифмирования;
- Метод приведения к одному основанию;
- Функционально-графический метод.

Методы решения ЛУ:

1. Применение
определения логарифма

2. Введение
новой переменной

3. Приведение к одному и
тому же основанию

4. Метод потенцирования

5. Метод логарифмирования
обеих частей уравнения

6. Функционально-
графический метод

Вид уравнения

$$\log_a f(x) = b$$

$$\log_a^2 f(x) + b \log_a f(x) + c = 0$$

$$\log_a f(x) = \log_c g(x)$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$x^{\log_a x} = c^n$$

$$\log_a f(x) = g(x)$$

Методы решения

1. По определению логарифма.

На основе определения логарифма решаются уравнения, в которых по данным основанию и числу определяются логарифм, по данному логарифму и основанию определяется число и по данному числу и логарифму определяется основание.

$$\log_3 9\sqrt{3} = x$$

$$3^x = 9\sqrt{3}$$

$$3^x = 3^{2,5}$$

$$x = 2,5$$

$$\log_{2\sqrt{2}} x = -2$$

$$(2\sqrt{2})^{-2} = x$$

$$x = \frac{1}{8}$$

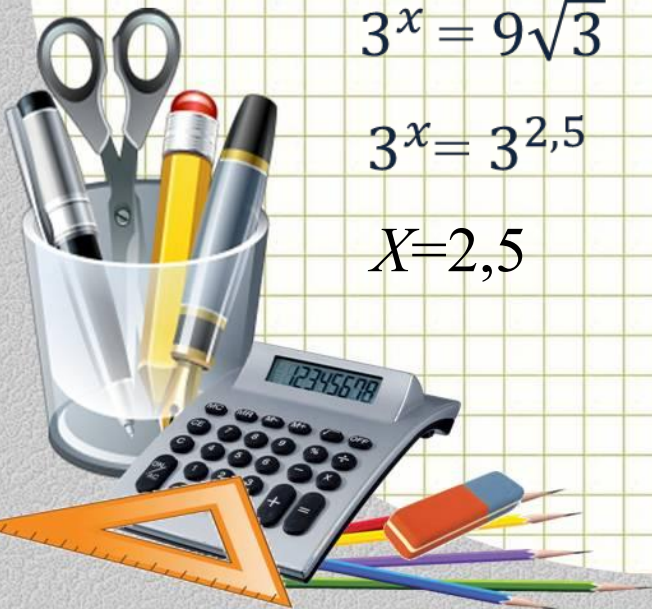
$$\log_x 81 = 4$$

$$x^4 = 81$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -3$$

посторонний
корень



2. Метод потенцирования.

Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы к равенству, не содержащего их.

$$\log_a f(x) = \log_a y(x)$$

$$f(x) = y(x) \quad \text{при} \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \\ y(x) > 0 \end{cases}$$

$$\log_3(x - 2) + \log_3(x + 2) = \log_3(2x - 1)$$

$$\log_3(x - 2)(x + 2) = \log_3(2x - 1)$$

$$x^2 - 4 = 2x - 1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -1 \text{ — посторонний корень}$$

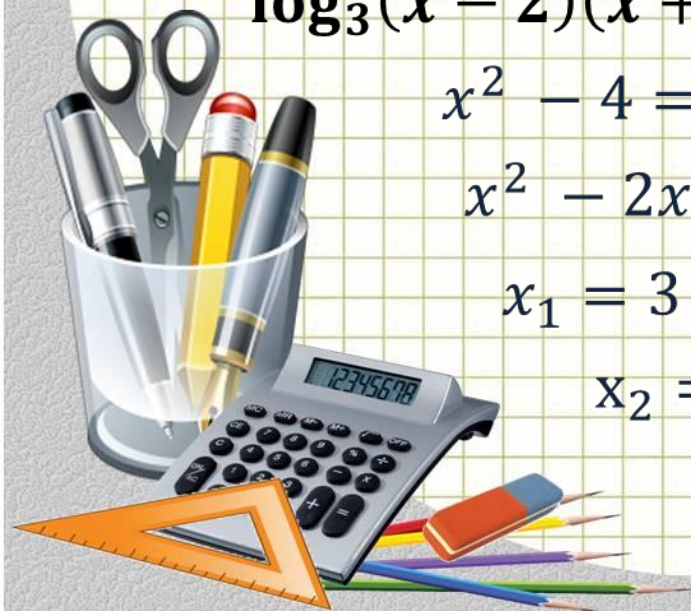
ОДЗ

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\mathbf{x > 2}$$

Условия для проверки всегда составляем по исходящему уравнению !



3. Метод введения новой переменной

$$\log^2_2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$$

$$\log_2 x = t, x > 0$$

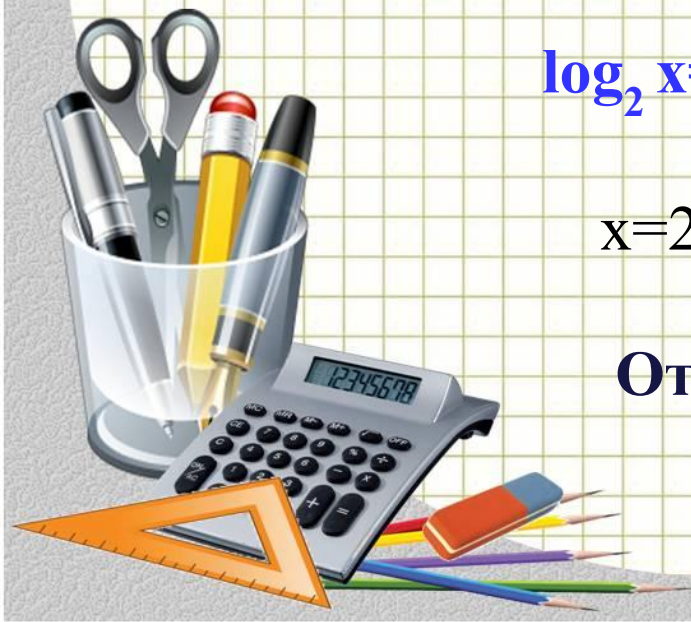
$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t_1 = 3 \quad t_2 = 1$$

$$\log_2 x = 1 \quad \log_2 x = 3$$

$$x = 2 \quad x = 8$$

Ответ: $x = 2; 8$



4. Метод логарифмирования

$$x^{0,5\lg x} = 0,01x^2$$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10

$$\lg x^{0,5\lg x} = \lg 0,01x^2$$

$$0,5 \lg^2 x - 2 \lg x + 2 = 0$$

$$t = \lg x$$

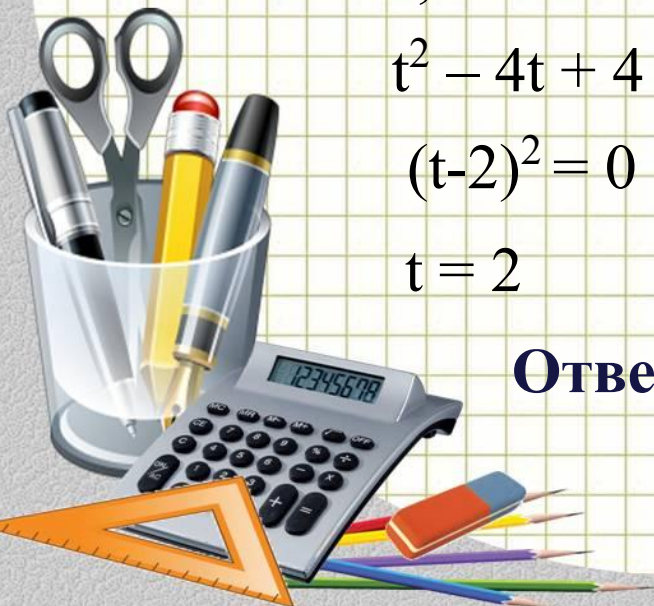
$$0,5t^2 - 2t - 2 = 0$$

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$(t-2)^2 = 0$$

$$t = 2 \quad \lg x = 2$$

Ответ: $x=100$



5. Метод приведения логарифмов к одному и тому же основанию

$$\log_9(37 - 12x) * \log_{7-2x} 3 = 1$$

ОДЗ

$$\begin{cases} 37 - 12x > 0 \\ 7 - 2x > 0 \\ 7 - 2x \neq 1 \end{cases} \begin{cases} x < \frac{37}{12} \\ x < \frac{7}{2} \\ x \neq 3 \end{cases} \begin{cases} x < \frac{7}{2} \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\frac{\log_9(37 - 12x)}{\log_3(7 - 2x)} = 1$$

$$0,5\log_3(37 - 12x) = \log_3(7 - 2x)$$

$$\log_3(37 - 12x) = \log_3(7 - 2x)^2$$

$$37 - 12x = (7 - 2x)^2$$

$$37 - 12x = 49 - 28x + 4x^2$$

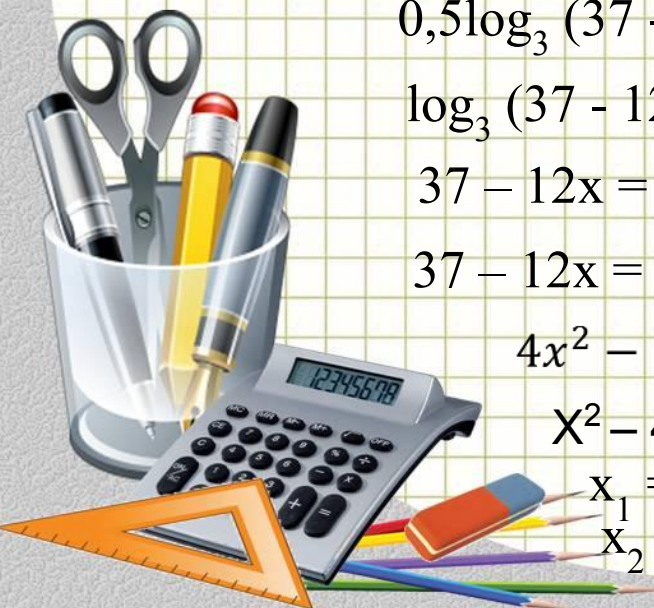
$$4x^2 - 16x + 12 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_1 = 1$$

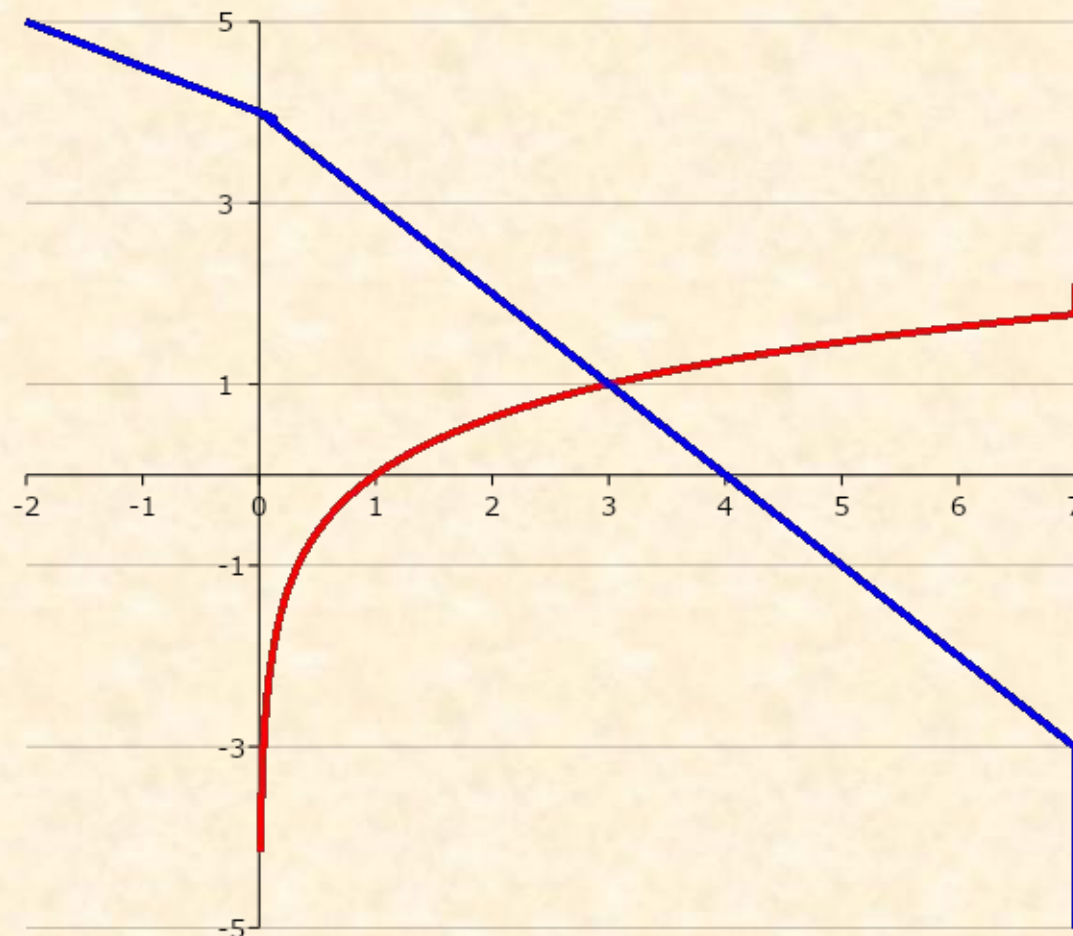
$$x_2 = 3 - \text{посторонний корень}$$

Ответ: $x = 1$



6. Функционально – графический метод

$$\log_3 x = 4 - x$$



Ответ: $x=3$

Для решения ЛУ *графическим методом* надо построить в одной и той же системе координат графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения и найти абсциссу их точки пересечения

Найти корни уравнения

$$\log_3 x = 4 - x$$

Так как функция $y = \log_3 x$ возрастающая, а функция $y = 4 - x$ убывающая на $(0; +\infty)$, то заданное уравнение на этом интервале имеет один корень.

7. Использование свойств монотонности функции

$$\log_3 x = 11 - x$$

Так как функции $y = \log_3 x$ возрастает, а $y = 11 - x$ убывает на $(0; +\infty)$,

то уравнение имеет единственное решение, которое можно найти методом подбора: $x = 9$



Самостоятельная работа (в парах)

Укажите метод и решите уравнения:

1) $\log_2(x-7)=3$

2) $\log^2_4 x - \log_4 x - 2=0$

3) $\log_2(x^2+x-1)=\log_2(7-x)$

4) $x^{\log_{0,5}(x-2)} = 0,125$

1) $\log_3(x+4)=2$

2) $\log^2_{0,2} x + \log_{0,2} x - 6=0$

3) $\log_{0,5}(x+9) - \log_{0,5}(8-3x)=2$

4) $x^{\log_{1/3}(x+4)} = 27$

Ответы (самопроверка)

1) 15

2) 0,25; 16

3) 2; -4

4) 0, 125; 2

1) 5

2) 125; 0,04

3) -4

4) 3; 27





Домашнее задание

327 Решить уравнение:

1) $\log_3 (5x - 1) = 2;$

3) $\log_4 (2x - 3) = 1;$

5) $\lg (3x - 1) = 0;$

2) $\log_5 (3x + 1) = 2;$

4) $\log_7 (x + 3) = 2;$

6) $\lg (2 - 5x) = 1.$



Домашнее задание

- 337**
- 1) $\log_2 (x - 5) + \log_2 (x + 2) = 3;$
 - 2) $\log_3 (x - 2) + \log_3 (x + 6) = 2;$
 - 3) $\lg (x + \sqrt{3}) + \lg (x - \sqrt{3}) = 0;$
 - 4) $\lg (x - 1) + \lg (x + 1) = 0.$



Домашнее задание

340 1) $\log_3 (5x + 3) = \log_3 (7x + 5);$

2) $\log_{\frac{1}{2}} (3x - 1) = \log_{\frac{1}{2}} (6x + 8).$

341 1) $\log_7 (x - 1) \log_7 x = \log_7 x;$

2) $\log_{\frac{1}{3}} x \log_{\frac{1}{3}} (3x - 2) = \log_{\frac{1}{3}} (3x - 2);$

3) $\log_2 (3x + 1) \log_3 x = 2 \log_2 (3x + 1);$

4) $\log_{\sqrt{3}} (x - 2) \log_5 x = 2 \log_3 (x - 2).$