Логарифмические уравнения.

Свойства логарифма

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^r = r\log_a b$$

$$\log_{a^r} b = \frac{1}{r}\log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$a > 0;$

$b > 0;$

$a \neq 1$

$c \neq 1$

$c > 0$

Основные свойства логарифмической функции

№	a > 1	0 < a < 1
1	$D(f) = (0, +\infty)$	
2	не является ни чётной, ни нечётной;	
3	возрастает на $(0, +\infty)$	убывает на $(0, +\infty)$
4	не ограничена сверху, не ограничена снизу	
5	не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений	
6	непрерывна	
7	$E(f) = (-\infty, +\infty)$	
8	выпукла вверх	выпукла вниз
9	точка пересечения графика функции с осью Ox (1,0).	

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма или в основании логарифма называются ***логарифмическими уравнениями***.

$$\log_a f(x) = b$$

$$\log_{f(x)} b = a$$

- Решение уравнений, содержащих неизвестное под знаком логарифма, основано на следующих теоремах:

$$\log_a f(x) = g(x)$$

$$f(x) = a^{g(x)}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\log_a (f(x))^{2n} = g(x)$$

$$2n \cdot \log_a |f(x)| = g(x)$$

Основные методы решения логарифмических уравнений

- По определению логарифма;
- Метод потенцирования;
- Метод введения новой переменной;
- Метод логарифмирования;
- Метод приведения к одному основанию;
- Функционально-графический метод.

Методы решения ЛУ:	Вид уравнения
1.Применение определения логарифма	$\log_a f(x) = b$
2.Введение новой переменной	$\log_a^2 f(x) + b\log_a f(x) + c = 0$
3. Приведение к одному и тому же основанию	$\log_a f(x) = \log_c g(x)$
4. Метод потенцирования	$\log_a f(x) = \log_a g(x)$
5 Метод логарифмирования обеих частей уравнения	$x^{\log_a x} = c^n$
6. Функционально-графический метод	$\log_a f(x) = g(x)$

Методы решения логарифмических уравнений

1. По определению логарифма.

На основе определения логарифма решаются уравнения, в которых по данным основанию и числу определяются логарифм, по данному логарифму и основанию определяется число и по данному числу и логарифму определяется основание.

$$\log_3 9\sqrt{3} = x$$

$$3^x = 9\sqrt{3}$$

$$3^x = 3^{2,5}$$

$$X = 2,5$$

$$\log_{2\sqrt{2}} x = -2$$

$$(2\sqrt{2})^{-2} = x$$

$$X = \frac{1}{8}$$

$$\log_x 81 = 4$$

$$x^4 = 81$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -3$$

посторонний корень

2. Метод потенцирования.

Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы к равенству, не содержащего их.

$$\log_a f(x) = \log_a y(x)$$

$$f(x) = y(x) \quad \text{при} \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \\ y(x) > 0 \end{cases}$$

ОДЗ

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

x > 2

$$\log_3(x-2) + \log_3(x+2) = \log_3(2x-1)$$

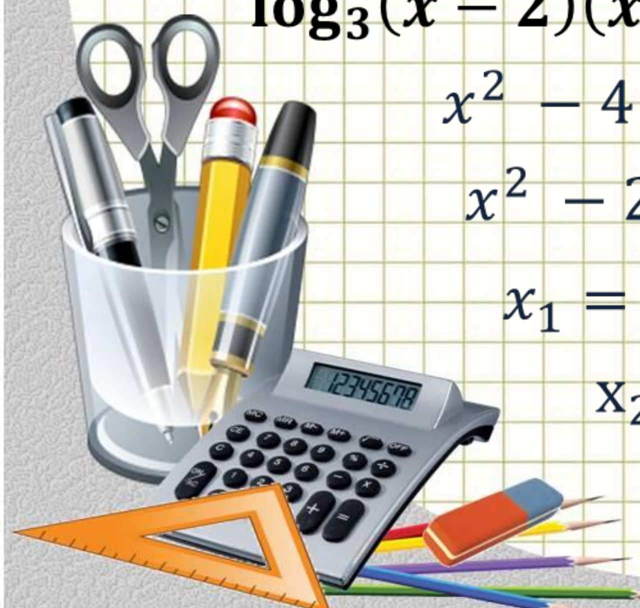
$$\log_3(x-2)(x+2) = \log_3(2x-1)$$

$$x^2 - 4 = 2x - 1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = 3$$

$x_2 = -1$ – посторонний корень



Условия для проверки всегда составляем по исходящему уравнению !

3. Метод введения новой переменной

$\log^2_2 x - 4\log_2 x + 3=0$

$\log_2 x= t,\ x>0$

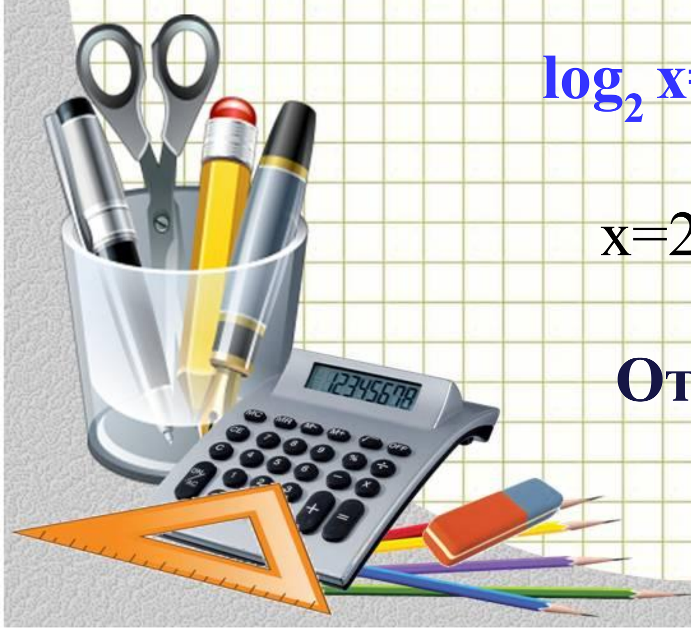
$t^2 - 4t + 3=0$

$t_1=3 \qquad t_2=1$

$\log_2 x=1 \qquad \log_2 x=3$

$x=2 \qquad x=8$

Ответ: $x=2;\ 8$



4. Метод логарифмирования

$x^{0,5\lg x}=0,01x^2$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10

$\lg x^{0,5\lg x}=\lg 0,01x^2$

$0,5 \lg^2 x – 2\lg x + 2 = 0$

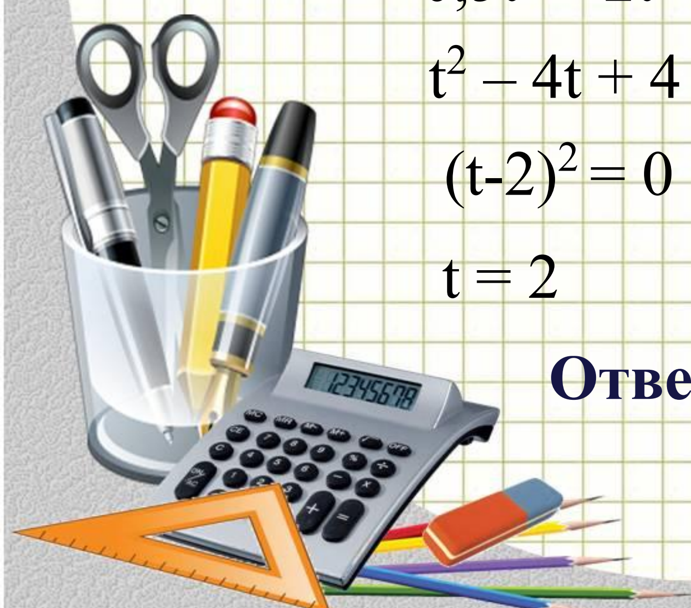
$t=\lg x$

$0,5t^2 – 2t - 2 = 0$

$t^2 – 4t + 4 = 0$

$(t-2)^2 = 0$

$t = 2 \qquad \lg x = 2$



Ответ: x=100

5. Метод приведения логарифмов к одному и тому же основанию

$$\log_9 (37 - 12x) * \log_{7-2x} 3 = 1$$

ОДЗ

$$\begin{cases} 37 - 12x > 0 \\ 7 - 2x > 0 \\ 7 - 2x \neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \dfrac{37}{12} \\ x < \dfrac{7}{2} \\ x \neq 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \dfrac{7}{2} \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\frac{\log_9 (37 - 12x)}{\log_3 (7 - 2x)} = 1$$

$$0{,}5\log_3 (37 - 12x) = \log_3 (7 - 2x)$$

$$\log_3 (37 - 12x) = \log_3 (7 - 2x)^2$$

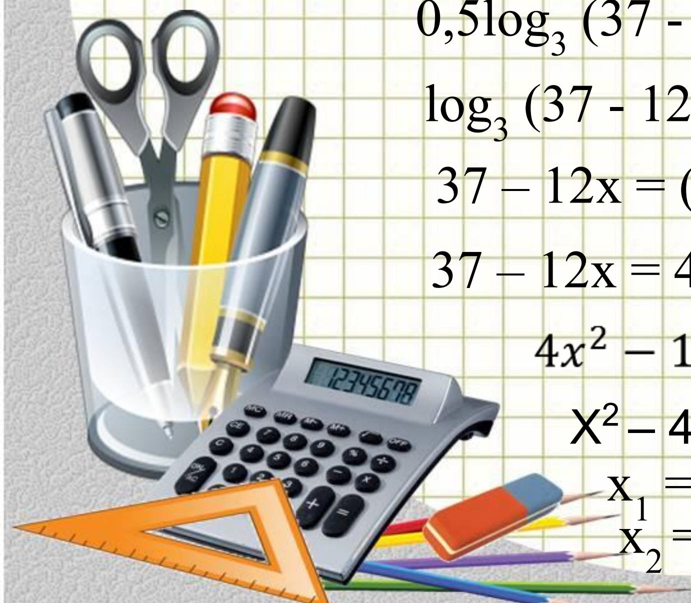
$$37 - 12x = (7 - 2x)^2$$

$$37 - 12x = 49 - 28x + 4x^2$$

$$4x^2 - 16x + 12 = 0$$

Ответ: x = 1

$$X^2 - 4x + 3 = 0$$

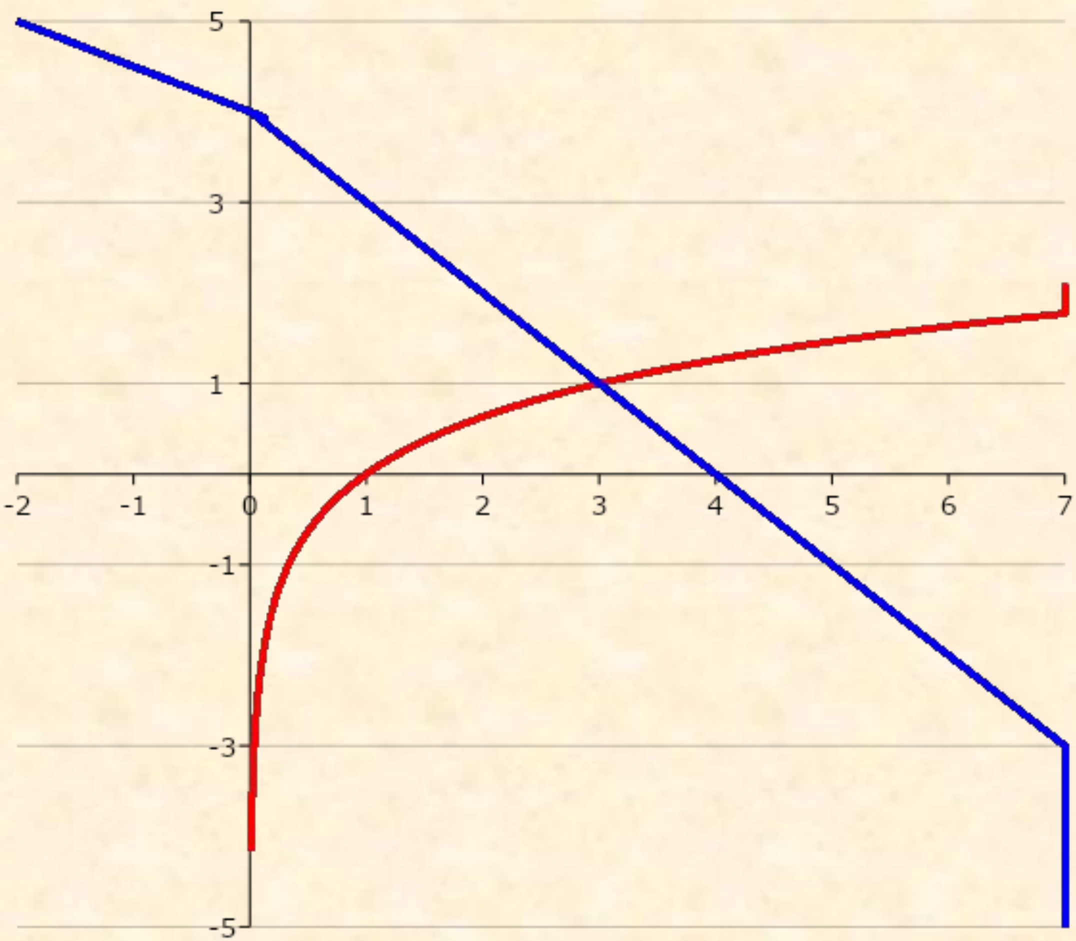


$x_1 = 1$

$x_2 = 3$ – посторонний корень

6. Функционально – графический метод

$$\log_3 x = 4 - x$$



Ответ: x=3

Для решения ЛУ ***графическим методом*** надо построить в одной и той же системе координат графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения и найти абсциссу их точки пересечения

Найти корни уравнения

$$log_3 x = 4 - x$$

Так как функция y= $\log_3$ x возрастающая, а функция y =4-x убывающая на (0; + ∞),то заданное уравнение на этом интервале имеет один корень.

7. Использование свойств монотонности функции

$\log_3 x = 11 - x$

Так как функции $y = \log_3 x$ возрастает, а $y = 11 - x$ убывает на $(0;+\infty)$,

то уравнение имеет единственное решение, которое можно найти методом подбора: **$\underline{x = 9}$**

Самостоятельная работа (в парах)

Укажите метод и решите уравнения:

1) $\log_2(x-7)=3$
2) $\log^2_4 x - \log_4 x - 2=0$
3) $\log_2(x^2+x-1)=\log_2(7-x)$
4) $x^{\log_{0,5}(x-2)}=0,125$

1) $\log_3(x+4)=2$
2) $\log^2_{0,2} x + \log_{0,2} x - 6=0$
3) $\log_{0,5}(x+9) - \log_{0,5}(8-3x)=2$
4) $x^{\log_{1/3}(x+4)}=27$

Ответы (самопроверка)

1) 15
2) 0,25; 16
3) 2; -4
4) 0, 125; 2

1) 5
2) 125; 0,04
3) -4
4) 3; 27

Домашнее задание

327 Решить уравнение:

1) $\log_3(5x-1)=2$;
2) $\log_5(3x+1)=2$;
3) $\log_4(2x-3)=1$;
4) $\log_7(x+3)=2$;
5) $\lg(3x-1)=0$;
6) $\lg(2-5x)=1$.

Домашнее задание

337

1) $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3;$

2) $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2;$

3) $\lg(x+\sqrt{3})+\lg(x-\sqrt{3})=0;$

4) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=0.$

Домашнее задание

340 1) $\log_3(5x+3)=\log_3(7x+5)$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(6x+8)$.

341 1) $\log_7(x-1)\log_7 x=\log_7 x$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} x\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)=\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)$;

3) $\log_2(3x+1)\log_3 x=2\log_2(3x+1)$;

4) $\log_{\sqrt{3}}(x-2)\log_5 x=2\log_3(x-2)$.