Обратная матрица

Определение:

Квадратная матрица A n-го порядка называется *невырожденной*, если её определитель не равен нулю.

Определение:

Союзной матрицей к матрице A, называется матрица $\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$,

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Определение:

Матрица называется *обратной по отношению к квадратной матрице* A, если

$$A^{-1}A = A\,A^{-1} = E\,.$$

Определение:

Обратная матрица вычисляется по формуле: $A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}^T}{\Delta A}$, где $\tilde{A}^T$ — союзная матрица к матрице A.

Свойства обратной матрицы

1. $\Delta A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta A}$;

2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

4. $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$;

5. $\left(A^{-1}\right)^{k} = \left(A^{k}\right)^{-1}$.

Теорема (*Необходимое и достаточное условие существование обратной матрицы*):

Для того, чтобы матрица A имела обратную (единственную), необходимо и достаточно, чтобы она была квадратной и невырожденной, т.е. чтобы $\Delta A \neq 0$.

Основные методы вычисления обратной матрицы

1. Метод союзной матрицы

Алгоритм построения обратной матрицы методом союзной матрицы

1.	Вычислить определитель матрицы A, если $\Delta A \neq 0$, то обратная матрица существует;
2.	найти союзную матрицу $\tilde{A}^T$, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов исходной матрицы;
3.	найти обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}^T}{\Delta A}$.

Пример: Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Сделать проверку.

Найдем определитель матрицы A, $\Delta A = 14 - 12 = 2 \neq 0$, т.е. обратная

матрица существует и имеет вид: $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вывод:

Для матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Пример: Найти матрицу, обратную к матрице $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем определитель матрицы, $\Delta B = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$.

Составим союзную матрицу:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$; $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$;

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$; $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$; $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$;

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$; $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6$; $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$.

$$\tilde{B}^T = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица имеет вид: $B^{-1} = \dfrac{1}{27} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Метод элементарных преобразований

Теорема:

Произвольную невырожденную матрицу A с помощью элементарных преобразований можно привести к единичной матрице E.

Алгоритм построения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований строк матрицы

1.	Составить расширенную матрицу $\overline{A}=(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$, т.е. к данной матрице A приписать справа единичную матрицу;
2.	с помощью элементарных преобразований привести расширенную матрицу к виду $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{array}\right)$, т.е. $(A\,|\,E)\to(E\,|\,A^{-1})$;
3.	записать обратную матрицу: $A^{-1}=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$.

Пример: Найти матрицу, обратную к матрице $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\bar{C} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -32 & -5 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & -32 & -5 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{5}{13} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{18}{13} & -\frac{32}{13} & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{5}{13} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 32 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 32 & -13 \end{array}\right),$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix}.$$

Решение матричных уравнений

I	*II*	*III*
$\boxed{A \cdot X = B}$	$\boxed{X \cdot A = B}$	$\boxed{A \cdot X \cdot B = C}$
$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$	$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$	$\boxed{X = A^{-1} C B^{-1}}$
т.к. $A \cdot A^{-1} = E$, то	т.к. $A \cdot A^{-1} = E$, то	
$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$	$X \cdot E = B \cdot A^{-1}$	
$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$	$\boxed{X = B \cdot A^{-1}}$	

Примеры: Решить матричное уравнение

1. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Уравнение соответствует матричному уравнению $A \cdot X = B$, тогда $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем матрицу обратную матрицу к матрице A:

$\Delta A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $A^{-1} = -\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, тогда

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решите самостоятельно

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. Ответ: $\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Ранг матрицы

Определение:

Минором k-го порядка матрицы $A_{m\times n}$ называется определитель, образованный элементами, расположенными на пересечении каких-либо k строк и каких-либо k столбцов матрицы A.

Обозначение:

$r(A)$, $R(A)$, $rang\ A$, $rg\ A$.

Определение:

Рангом матрицы A называется наивысший порядок минора матрицы, отличный от нуля.

Свойства ранга матрицы

1.	Ранг матрицы выражается целым числом, заключённым между 0 и меньшим из чисел m, n, т.е. $0 \le r \le \min(m; n)$;
2.	при транспонировании ранг матрицы не изменится;
3.	ранг матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда матрица является нулевой;
4.	если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится;
5.	для квадратной матрицы n-го порядка $r = n$ тогда и только тогда, когда матрица — невырожденная.

Алгоритм вычисления ранга матрицы методом окаймляющих миноров

1.	Найти M^1 — минор первого порядка (т.е. элемент матрицы) если $M^1 = 0$, то матрица A нулевая и $r(A) = 0$; если $M^1 \neq 0$, то $r(A) \geq 1$;
2.	вычислить миноры второго порядка, содержащие M^1 (окаймляющие M^1) если $M^2 = 0$, то $r(A) = 1$; если $M^2 \neq 0$, то $r(A) \geq 2$;
...	
k.	последовательно вычислять миноры k-го порядка, окаймляющие минор $M^{k-1} \neq 0$ если $M^k = 0$, то $r(A) = k-1$; если $M^k \neq 0$, то $r(A) \geq k$ и т.д.

Пример: Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

Найдем ранг матрицы A методом окаймляющих миноров. Выберем минор первого порядка, расположенный в первой строке и первом столбце, $M^1 = 1 \neq 0$, т.е. $r(A) \geq 1$.

Окаймляя выбранный минор при помощи второй строки и третьего столбца, получаем минор второго порядка $M^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, т.е. $r(A) \geq 2$.

Составим минор 3-го порядка, окаймляющий M^2. Их всего два (можно добавить второй столбец или четвертый): $M^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$,

$M^3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$. Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка оказались равными нулю, т.е. $r(A) = 2$.

Теорема:

Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов).

Теорема:

Элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.

Замечание:

Рангом матрицы называется число ненулевых строк, в приведенной к ступенчатому виду матрицы.

Алгоритм вычисления ранга матрицы методом элементарных преобразований

1.	Элементарными преобразованиями привести матрицу к из простейших видов: диагональному, трапециевидному и др.;
2.	определить число ненулевых строк в получившейся матрице, которое определяет ранг исходной матрицы.

Пример: Найти ранг матрицы $B=\begin{pmatrix}2&3&5&-3&-2\\3&4&3&-1&-3\\5&6&-1&3&-5\end{pmatrix}$.

Найдем ранг матрицы B методом элементарных преобразований:

$$B=\begin{pmatrix}2&3&5&-3&-2\\3&4&3&-1&-3\\5&6&-1&3&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&2&-1\\2&3&5&-3&-2\\5&6&-1&3&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&2&-1\\0&1&9&-7&0\\0&1&9&-7&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&2&-1\\0&1&9&-7&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

данная матрица имеет две ненулевые строки, таким образом $r(B)=2$.