

Обратная матрица

Определение:

Квадратная матрица A n -го порядка называется *невырожденной*, если её определитель не равен нулю.

Определение:

Союзной матрицей к матрице A , называется матрица $\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$,

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A .

Определение:

Матрица называется *обратной по отношению к квадратной матрице A* , если

$$A^{-1}A = A A^{-1} = E.$$

Определение:

Обратная матрица вычисляется по формуле: $A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{\Delta A}$, где $\tilde{A}^T$ — союзная матрица к матрице A .

Свойства обратной матрицы

$$1. \Delta A^{-1} = \frac{1}{\Delta A};$$

$$3. (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1};$$

$$5. (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}.$$

$$2. (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$4. (A^{-1})^T = (A^T)^{-1};$$

Теорема (Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы):

Для того, чтобы матрица A имела обратную (единственную), необходимо и достаточно, чтобы она была квадратной и невырожденной, т.е. чтобы $\Delta A \neq 0$.

Основные методы вычисления обратной матрицы

1. Метод союзной матрицы

Алгоритм построения обратной матрицы методом союзной матрицы

- | | |
|----|---|
| 1. | Вычислить определитель матрицы A , если $\Delta A \neq 0$, то обратная матрица существует; |
| 2. | найти союзную матрицу $\tilde{A}^T$, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов исходной матрицы; |
| 3. | найти обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{\Delta A}$. |

Пример: Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Сделать проверку.

Найдем определитель матрицы A , $\Delta A = 14 - 12 = 2 \neq 0$, т.е. обратная

матрица существует и имеет вид: $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вывод:

Для матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Пример: Найти матрицу, обратную к матрице $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем определитель матрицы, $\Delta B = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$.

Составим союзную матрицу:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6; \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6. \end{aligned}$$

$$\tilde{B}^T = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Обратная матрица имеет вид: } B^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Метод элементарных преобразований

Теорема:

Произвольную невырожденную матрицу A с помощью элементарных преобразований можно привести к единичной матрице E .

*Алгоритм построения обратной матрицы
с помощью элементарных преобразований строк матрицы*

- | | |
|----|--|
| 1. | Составить расширенную матрицу $\bar{A} = (A E) = \left(\begin{array}{ccc ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$, т.е. к
данной матрице A приписать справа единичную матрицу; |
| 2. | с помощью элементарных преобразований привести расширенную матрицу к виду
$\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{array} \right)$, т.е. $(A E) \rightarrow (E A^{-1})$; |
| 3. | записать обратную матрицу: $A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{array} \right)$. |

Пример: Найти матрицу, обратную к матрице $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -32 & -5 & -6 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & -32 & -5 & -6 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{5}{13} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{18}{13} & -\frac{32}{13} & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{5}{13} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 32 & -13 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 32 & -13 \end{array} \right), \end{aligned}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix}.$$

Решение матричных уравнений

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$A \cdot X = B$	$X \cdot A = B$	$A \cdot X \cdot B = C$
$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$	$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$	$X = A^{-1} C B^{-1}$
т.к. $A \cdot A^{-1} = E$, то	т.к. $A \cdot A^{-1} = E$, то	
$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$	$X \cdot E = B \cdot A^{-1}$	
$X = A^{-1} \cdot B$	$X = B \cdot A^{-1}$	

Примеры: Решить матричное уравнение

1. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$

Уравнение соответствует матричному уравнению $A \cdot X = B$, тогда $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем матрицу обратную матрицу к матрице A :

$$\Delta A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \quad A^{-1} = -\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{тогда}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решите самостоятельно

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}. \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы

Определение:

Минором k -го порядка матрицы $A_{m \times n}$ называется определитель, образованный элементами, расположенными на пересечении каких-либо k строк и каких-либо k столбцов матрицы A .

Обозначение:

$r(A)$, $R(A)$, $\text{rang } A$, $\text{rg } A$.

Определение:

Рангом матрицы A называется наивысший порядок минора матрицы, отличный от нуля.

Свойства ранга матрицы

- | | |
|----|---|
| 1. | Ранг матрицы выражается целым числом, заключённым между 0 и меньшим из чисел m, n , т.е. $0 \leq r \leq \min(m, n)$; |
| 2. | при транспонировании ранг матрицы не изменится; |
| 3. | ранг матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда матрица является нулевой; |
| 4. | если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится; |
| 5. | для квадратной матрицы n -го порядка $r = n$ тогда и только тогда, когда матрица — невырожденная. |

Алгоритм вычисления ранга матрицы методом окаймляющих миноров

1.	Найти M^1 — минор первого порядка (т.е. элемент матрицы) если $M^1 = 0$, то матрица A нулевая и $r(A) = 0$; если $M^1 \neq 0$, то $r(A) \geq 1$;
2.	вычислить миноры второго порядка, содержащие M^1 (окаймляющие M^1) если $M^2 = 0$, то $r(A) = 1$; если $M^2 \neq 0$, то $r(A) \geq 2$;
...	
k .	последовательно вычислять миноры k -го порядка, окаймляющие минор $M^{k-1} \neq 0$ если $M^k = 0$, то $r(A) = k - 1$; если $M^k \neq 0$, то $r(A) \geq k$ и т.д.

Пример: Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

Найдем ранг матрицы A методом окаймляющих миноров. Выберем минор первого порядка, расположенный в первой строке и первом столбце, $M^1 = 1 \neq 0$, т.е. $r(A) \geq 1$.

Окаймляя выбранный минор при помощи второй строки и третьего столбца, получаем минор второго порядка $M^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, т.е. $r(A) \geq 2$.

Составим минор 3-го порядка, окаймляющий M^2 . Их всего два (можно добавить второй столбец или четвертый): $M^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$,

$M^3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$. Таким образом, все окаймляющие миноры

третьего порядка оказались равными нулю, т.е. $r(A) = 2$.

Теорема:

Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов).

Теорема:

Элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.

Замечание:

Рангом матрицы называется число ненулевых строк, в приведенной к ступенчатому виду матрицы.

Алгоритм вычисления ранга матрицы методом элементарных преобразований

- | | |
|----|---|
| 1. | Элементарными преобразованиями привести матрицу к из простейших видов: диагональному, трапецевидному и др.; |
| 2. | определить число ненулевых строк в получившейся матрице, которое определяет ранг исходной матрицы. |

Пример: Найти ранг матрицы $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Найдем ранг матрицы B методом элементарных преобразований:

$$\begin{aligned} B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

данная матрица имеет две ненулевые строки, таким образом $r(B) = 2$.