Неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке *I*, если для всех $x \in I$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на некотором промежутке *I*, то разность между ними равна постоянному числу.

Определение. Выражение $F(x)+C$, где $F(x)$ - некоторая первообразная для функции $f(x)$, C – произвольная постоянная, называют *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ и символически обозначают $\int f(x)dx$.

Здесь $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение.

Свойства неопределённого интеграла

1. Неопределённый интеграл от суммы нескольких интегрируемых функций равен сумме неопределённых интегралов от отдельных слагаемых:

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x))dx.$$

2. Постоянный множитель можно выносить из под знака неопределённого интеграла, т. е., если $k = const$, то

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \ .$$

3. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

4. $\int dF(x) = F(x) + C$

5. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

В частности, $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Таблица основных неопределённых интегралов.

1	$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,\ m \neq -1$	9	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	10	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
3	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	11	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$
4	$\int \cos x dx = \sin x + C$	12	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	13	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \right\rvert + C$
6	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	14	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg \frac{x}{2} \right\rvert + C$
7	$\int e^x dx = e^x + C$	15	$\int tgx dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
8	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	16	$\int ctgx dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$

<u>Пример</u>. Найти неопределенные интегралы.

1. $\int\left(3x^5-\frac{4}{x^{10}}+5\sqrt[4]{x^5}+\frac{1}{7}\right)dx=$

$$=\int\left(3x^5-4x^{-10}+5x^{\frac{5}{4}}+\frac{1}{7}\right)dx=\frac{3}{6}x^6+\frac{4}{9}x^{-9}+5x^{\frac{9}{4}}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{7}x+C=$$

$$=\frac{1}{2}x^6+\frac{4}{9x^9}-\frac{20}{9}\sqrt[4]{x^9}+\frac{1}{7}x+C.$$

2. $\int\left(4^x-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{5}{x^2-1}\right)dx=\int\left(4^x-x^{-\frac{1}{4}}+\frac{5}{x^2-1}\right)dx=\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C=$

$$=\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

3. $\int\sqrt{3-5x}dx=\int(3-5x)^{\frac{1}{2}}dx=\big(d(3-5x)=-5dx\big)=$

$$=-\frac{1}{5}\int(3-5x)^{\frac{1}{2}}d(3-5x)=-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}(3-5x)^{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{15}\cdot(3-5x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

4. $\int x^2e^{1-x^3}dx=\left(x^2dx=-\frac{1}{3}d\left(1-x^3\right)\right)=-\frac{1}{3}\int e^{1-x^3}d\left(1-x^3\right)=-\frac{1}{3}e^{1-x^3}+C.$

5. $\int\frac{4dx}{\cos^2(3-5x)}=4\int\frac{dx}{\cos^2(3-5x)}=4\cdot tg(3-5x)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+C=-\frac{4}{5}tg(3-5x)+C.$

<u>Замена переменной</u>

Если существует функция $x=\varphi(t)$ - непрерывная, имеющая непрерывную производную и однозначную обратную функцию, то справедливо равенство

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

или если $t=\varphi(x)$, то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(t)dt.$$

<u>Пример</u>. Найти неопределенные интегралы.

1. $\int x\cos(x^2+5)dx=\begin{pmatrix} t=x^2+5 \\ dt=2xdx \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\int \cos tdt=\frac{1}{2}\sin t=\frac{1}{2}\sin\left(x^2+5\right)+C$

2. $\int x^2e^{1-x^3}dx=\begin{pmatrix} t=1-x^3 \\ dt=-3x^2dx \end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\int e^t dt=-\frac{1}{3}e^t=-\frac{1}{3}e^{1-x^3}+C.$

3. $\int \frac{dx}{(ctg7x+5)\sin^2 7x} = \begin{pmatrix} t = ctg7x+5 \\ dt = -\frac{7dx}{\sin^2 7x} \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{7}\ln|t| = -\frac{1}{7}\ln|ctg7x+5| + C$ /

4. $\int \cos^2 3x \sin 6x dx = \int \cos^2 3x \cdot 2\sin 3x \cos 3x dx =$

$= 2\int \cos^3 3x \sin 3x dx = \begin{pmatrix} t = \cos 3x \\ dt = -3\sin 3x dx \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\int t^3 dt = -\frac{2}{3}\cdot\frac{t^4}{4} = -\frac{1}{6}\cos^4 3x + C.$

Была использована тригонометрическая формула: $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

5. $\int \frac{dx}{x(\ln 4x+3)^3} = \begin{pmatrix} t = \ln 4x + 3 \\ dt = \frac{1}{4x}\cdot 4dx = \frac{dx}{x} \end{pmatrix} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = -\frac{1}{2t^2} + C =$

$= -\frac{1}{2(\ln 4x+3)^2} + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)} = \begin{pmatrix} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{pmatrix} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(t^2+1)} = 6\int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 6\int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} dt =$

$= 6\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = 6(t - arctgt) + C = 6(\sqrt[6]{x} - arctg\sqrt[6]{x}) + C$

Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du ,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции от x. При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv та часть подынтегрального выражения, интеграл от которого известен или может быть найден. Последний интеграл должен быть либо проще исходного, либо подобен ему.

Пример. Найти неопределенные интегралы.

1. $$\int (x-7)\cos 3x\,dx = \begin{pmatrix} u = x-7 & dv = \cos 3x\,dx \\ du = dx & v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{x-7}{3}\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x\,dx = \frac{x-7}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C .$$

2. $\int (6x-1)\sin 3x dx = \begin{pmatrix} u = 6x-1 & dv = \sin 3x dx \\ du = 6dx & v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{3}(6x-1)\cos 3x + \frac{1}{3}\int 6\cos 3x dx =$$

$$= -\frac{1}{3}(6x-1)\cos 3x + 2\int \cos 3x dx = -\frac{1}{3}(6x-1)\cos 3x + \frac{2}{3}\sin 3x + C$$

3. $\int \ln x dx = \begin{pmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = x \end{pmatrix} = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$

4. $\int x^5 \ln x dx = \begin{pmatrix} u = \ln x & dv = x^5 dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{1}{6}x^6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{6}\int x^6 \frac{dx}{x} =$

$$= \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{6}\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{36}x^6 + C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Определение. *Рациональной дробью* называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены.

Для интегрирования рациональных дробей необходимо сделать следующее:

1) если дана неправильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (т.е. степень числителя больше или равна степени знаменателя), то нужно выделить из нее целую часть, т.е. представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ - многочлен, а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь;

2) разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$Q(x) = (x-a)^m \cdots (x^2 + px + q)^n \cdots,$$

где $p^2 - 4q < 0$;

3) правильную рациональную дробь $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ разложить на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{x-a} + \cdots +$$

$$+\frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)^n} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \cdots + \frac{B_n x + C_n}{x^2+px+q} + \cdots$$

4) вычислить неопределенные коэффициенты $A_1, A_2, ..., A_m, B_1, C_1,$ $B_2, C_2, ..., B_n, C_n, ...,$ для чего привести правую часть равенства к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях полученного тождества, и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. Можно определить коэффициенты, придавая различные значения переменной x и подставляя их в полученное тождество.

В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{5x+6}{(x+2)^2(x-2)}dx$.

Дана правильная рациональная дробь: степень числителя - первая, степень знаменателя - третья. Разложим подынтегральную функцию в сумму простейших дробей:

$$\frac{5x+6}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-2}.$$

$$5x+6 = A(x+2)(x-2) + B(x-2) + C(x+2)^2.$$

Действительными корнями знаменателя являются числа 2 и -2.

Пусть $x=2$, тогда $16=16C$, $C=1$.

Пусть $x=-2$, тогда $-4=-4B$, $B=1$.

Возьмем еще одно произвольное значение x, например, пусть $x=0$, тогда $6=-4A-2B+4C$, $6=-4A+2$, $A=-1$.

Получили

$$\frac{5x+6}{(x+2)^2(x-2)} = -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x-2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{5x+6}{(x+2)^2(x-2)}dx = \int\left(-\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x-2}\right)dx =$$

$$= -\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + \ln|x-2| + C = -\frac{1}{x+2} + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{5x^2-2x+31}{(x-1)(x^2+16)}dx$

Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Разложим ее в сумму простейших дробей.

$$\frac{5x^2-2x+31}{(x-1)(x^2+16)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+16},$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$5x^2-2x+31=A(x^2+16)+(Bx+C)(x-1).$$

Знаменатель имеет один действительный корень $x=1$.

Пусть $x=1$, тогда $5-2+31=17A$, $34=17A$, $A=2$.

Для нахождения B,C раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$5x^2-2x+31=Ax^2+16A+Bx^2+Cx-Bx-C$$

Сравним коэффициенты при x^2:

$$5=A+B,$$

тогда $B=5-A=5-2=3$, т.е. $B=3$.

Сравним коэффициенты при x^0:

$$31=16A-C,$$

тогда $C=16A-31=16\cdot 2-31=1$, т.е. $C=1$.

Получили

$$\frac{5x^2-2x+31}{(x-1)\left(x^2+16\right)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3x+1}{x^2+16},$$

откуда

$$\int\frac{5x^2-2x+31}{(x-1)\left(x^2+16\right)}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{3x+1}{x^2+16}\right)dx=\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{3x+1}{x^2+16}dx=$$

$$=2\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{x}{x^2+16}dx+\int\frac{dx}{x^2+16}=2\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+16)}{x^2+16}+\int\frac{dx}{x^2+4^2}=$$

$$=2\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln\left|x^2+16\right|+\frac{1}{4}arctg\frac{x}{4}+C.$$

Литература.

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т.1
2. Инченко О.В., Кузнецова В.А. Математика для заочников
3. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах ч.1