

Неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке I , если для всех $x \in I$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на некотором промежутке I , то разность между ними равна постоянному числу.

Определение. Выражение $F(x) + C$, где $F(x)$ - некоторая первообразная для функции $f(x)$, C - произвольная постоянная, называют *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ и символически обозначают $\int f(x)dx$.

Здесь $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение.

Свойства неопределённого интеграла

1. Неопределённый интеграл от суммы нескольких интегрируемых функций равен сумме неопределённых интегралов от отдельных слагаемых:

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx .$$

2. Постоянный множитель можно выносить из под знака неопределённого интеграла, т. е., если $k = const$, то

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx .$$

$$3. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

$$4. \int dF(x) = F(x) + C$$

$$5. d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

6. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, $u = \varphi(x)$, то $\int f(u) du = F(u) + C$.

В частности, $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$.

Таблица основных неопределённых интегралов.

1	$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, m \neq -1$	9	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	10	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
3	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	11	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$
4	$\int \cos x dx = \sin x + C$	12	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	13	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
6	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	14	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$
7	$\int e^x dx = e^x + C$	15	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$
8	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	16	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$

Пример. Найти неопределенные интегралы.

$$1. \int \left(3x^5 - \frac{4}{x^{10}} + 5\sqrt[4]{x^5} + \frac{1}{7} \right) dx =$$

$$= \int \left(3x^5 - 4x^{-10} + 5x^{\frac{5}{4}} + \frac{1}{7} \right) dx = \frac{3}{6}x^6 + \frac{4}{9}x^{-9} + 5x^{\frac{9}{4}} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{7}x + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^6 + \frac{4}{9x^9} - \frac{20}{9}\sqrt[4]{x^9} + \frac{1}{7}x + C.$$

$$2. \int \left(4^x - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{5}{x^2-1} \right) dx = \int \left(4^x - x^{-\frac{1}{4}} + \frac{5}{x^2-1} \right) dx = \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + \frac{5}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C =$$

$$= \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

$$3. \int \sqrt{3-5x} dx = \int (3-5x)^{\frac{1}{2}} dx = (d(3-5x) = -5dx) =$$

$$= -\frac{1}{5} \int (3-5x)^{\frac{1}{2}} d(3-5x) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} (3-5x)^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{15} \cdot (3-5x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$4. \int x^2 e^{1-x^3} dx = \left(x^2 dx = -\frac{1}{3} d(1-x^3) \right) = -\frac{1}{3} \int e^{1-x^3} d(1-x^3) = -\frac{1}{3} e^{1-x^3} + C.$$

$$5. \int \frac{4dx}{\cos^2(3-5x)} = 4 \int \frac{dx}{\cos^2(3-5x)} = 4 \cdot \operatorname{tg}(3-5x) \cdot \left(-\frac{1}{5} \right) + C = -\frac{4}{5} \operatorname{tg}(3-5x) + C.$$

Замена переменной

Если существует функция $x = \varphi(t)$ - непрерывная, имеющая непрерывную производную и однозначную обратную функцию, то справедливо равенство

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

или если $t = \varphi(x)$, то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt.$$

Пример. Найти неопределенные интегралы.

$$1. \int x \cos(x^2 + 5)dx = \left(\begin{array}{l} t = x^2 + 5 \\ dt = 2x dx \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 5) + C$$

$$2. \int x^2 e^{1-x^3} dx = \left(\begin{array}{l} t = 1 - x^3 \\ dt = -3x^2 dx \end{array} \right) = -\frac{1}{3} \int e^t dt = -\frac{1}{3} e^t = -\frac{1}{3} e^{1-x^3} + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{(\operatorname{ctg} 7x + 5) \sin^2 7x} = \left(\begin{array}{l} t = \operatorname{ctg} 7x + 5 \\ dt = -\frac{7dx}{\sin^2 7x} \end{array} \right) = -\frac{1}{7} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{7} \ln|t| = -\frac{1}{7} \ln|\operatorname{ctg} 7x + 5| + C$$

$$4. \int \cos^2 3x \sin 6x dx = \int \cos^2 3x \cdot 2 \sin 3x \cos 3x dx =$$

$$= 2 \int \cos^3 3x \sin 3x dx = \left(\begin{array}{l} t = \cos 3x \\ dt = -3 \sin 3x dx \end{array} \right) = -\frac{2}{3} \int t^3 dt = -\frac{2}{3} \cdot \frac{t^4}{4} = -\frac{1}{6} \cos^4 3x + C.$$

Была использована тригонометрическая формула: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

$$5. \int \frac{dx}{x(\ln 4x + 3)^3} = \left(\begin{array}{l} t = \ln 4x + 3 \\ dt = \frac{1}{4x} \cdot 4 dx = \frac{dx}{x} \end{array} \right) = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = -\frac{1}{2t^2} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(\ln 4x + 3)^2} + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 1)} = \left(\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right) = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(t^2 + 1)} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} = 6 \int \frac{(t^2 + 1) - 1}{t^2 + 1} dt =$$

$$= 6 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}) + C$$

Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u dv = uv - \int v du ,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции от x . При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv та часть подынтегрального выражения, интеграл от которого известен или может быть найден. Последний интеграл должен быть либо проще исходного, либо подобен ему.

Пример. Найти неопределенные интегралы.

$$\begin{aligned} 1. \int (x-7) \cos 3x dx &= \left(\begin{array}{l} u = x-7 \quad dv = \cos 3x dx \\ du = dx \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right) = \\ &= \frac{x-7}{3} \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx = \frac{x-7}{3} \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \int (6x-1)\sin 3x dx &= \left(\begin{array}{l} u = 6x-1 \quad dv = \sin 3x dx \\ du = 6 dx \quad v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right) = \\
 &= -\frac{1}{3}(6x-1)\cos 3x + \frac{1}{3} \int 6 \cos 3x dx = \\
 &= -\frac{1}{3}(6x-1)\cos 3x + 2 \int \cos 3x dx = -\frac{1}{3}(6x-1)\cos 3x + \frac{2}{3} \sin 3x + C
 \end{aligned}$$

$$3. \int \ln x dx = \left(\begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = dx \\ du = \frac{1}{x} dx \quad v = x \end{array} \right) = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

$$\begin{aligned}
 4. \int x^5 \ln x dx &= \left(\begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = x^5 dx \\ du = \frac{dx}{x} \quad v = \frac{1}{6}x^6 \end{array} \right) = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{6} \int x^6 \frac{dx}{x} = \\
 &= \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{6} \int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{36}x^6 + C.
 \end{aligned}$$

Интегрирование рациональных дробей

Определение. Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены.

Для интегрирования рациональных дробей необходимо сделать следующее:

1) если дана неправильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (т.е. степень числителя

больше или равна степени знаменателя), то нужно выделить из нее целую часть, т.е. представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ - многочлен, а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь;

2) разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$Q(x) = (x - a)^m \cdots (x^2 + px + q)^n \cdots,$$

где $p^2 - 4q < 0$;

3) правильную рациональную дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ разложить на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{x-a} + \dots +$$
$$+ \frac{B_1x + C_1}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{x^2 + px + q} + \dots$$

4) вычислить неопределенные коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_n, C_n, \dots$, для чего привести правую часть равенства к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях полученного тождества, и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. Можно определить коэффициенты, придавая различные значения переменной x и подставляя их в полученное тождество.

В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{5x+6}{(x+2)^2(x-2)} dx$.

Дана правильная рациональная дробь: степень числителя - первая, степень знаменателя - третья. Разложим подынтегральную функцию в сумму простейших дробей:

$$\frac{5x+6}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-2}.$$
$$5x+6 = A(x+2)(x-2) + B(x-2) + C(x+2)^2.$$

Действительными корнями знаменателя являются числа 2 и -2.

Пусть $x=2$, тогда $16=16C$, $C=1$.

Пусть $x=-2$, тогда $-4=-4B$, $B=1$.

Возьмем еще одно произвольное значение x , например, пусть $x=0$, тогда $6=-4A-2B+4C$, $6=-4A+2$, $A=-1$.

Получили

$$\frac{5x+6}{(x+2)^2(x-2)} = -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x-2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{5x+6}{(x+2)^2(x-2)} dx = \int \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x-2} \right) dx =$$
$$= -\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + \ln|x-2| + C = -\frac{1}{x+2} + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C.$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{5x^2 - 2x + 31}{(x-1)(x^2 + 16)} dx$

Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь.
Разложим ее в сумму простейших дробей.

$$\frac{5x^2 - 2x + 31}{(x-1)(x^2 + 16)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 16},$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$5x^2 - 2x + 31 = A(x^2 + 16) + (Bx + C)(x-1).$$

Знаменатель имеет один действительный корень $x=1$.

Пусть $x=1$, тогда $5 - 2 + 31 = 17A$, $34 = 17A$, $A=2$.

Для нахождения B, C раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$5x^2 - 2x + 31 = Ax^2 + 16A + Bx^2 + Cx - Bx - C$$

Сравним коэффициенты при x^2 :

$$5 = A + B,$$

тогда $B = 5 - A = 5 - 2 = 3$, т.е. $B = 3$.

Сравним коэффициенты при x^0 :

$$31 = 16A - C,$$

тогда $C = 16A - 31 = 16 \cdot 2 - 31 = 1$, т.е. $C = 1$.

Получили

$$\frac{5x^2 - 2x + 31}{(x-1)(x^2 + 16)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3x+1}{x^2 + 16},$$

откуда

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 - 2x + 31}{(x-1)(x^2 + 16)} dx &= \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3x+1}{x^2 + 16} \right) dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3x+1}{x^2 + 16} dx = \\ &= 2 \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{x}{x^2 + 16} dx + \int \frac{dx}{x^2 + 16} = 2 \int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 + 16)}{x^2 + 16} + \int \frac{dx}{x^2 + 4^2} = \\ &= 2 \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x^2 + 16| + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C. \end{aligned}$$

Литература.

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т.1
2. Инченко О.В., Кузнецова В.А. Математика для заочников
3. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах ч.1