Лекция 4

Моделирование

2021 02 22

Лекция 4

Уравнения параболического типа

Граничные условия 1-го рода для пластины или тонкого стержня

Из «Будака»

Задание 1 Задача 0

22. а) Найти распределение температуры в стержне $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура равна произвольной функции $f(x)$.

б) Рассмотреть, в частности, случай, когда $f(x) \equiv U_0 = \text{const}$, и дать оценку погрешности, допускаемой при замене суммы ряда, представляющего решение в точке $x = l/2$, его частичной суммой, и установить, с какого момента времени отношение суммы всех его членов, начиная со второго, к первому члену будет заведомо меньше наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Замечание. При этом мы будем говорить, что в рассматриваемой точке наступил регулярный режим[3)] с относительной точностью ε.

Задание 1 Задача 0

Тепловая задача

Рисунок для тепловой задачи

22. а) Найти распределение температуры в стержне $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура равна произвольной функции $f(x)$.

Лекция 4
Уравнения параболического типа Граничные условия 1-го рода для пластины или тонкого стержня.

1. Уравнения параболического типа с одной пространственной переменной

1.1. Уравнения с постоянными коэффициентами

1.1.1. Уравнение теплопроводности $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

Это уравнение часто встречается в теории тепло- и массопереноса. Оно описывает развитие одномерных нестационарных тепловых процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих одномерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.

Удельная теплоемкость некоторых веществ

Вещество	c, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$	Вещество	c, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$	Вещество	c, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$
Золото	130	Железо	460	Масло подсолнечное	1700
Ртуть	140	Сталь	500		
Свинец	140	Чугун	540	Лёд	2100
Олово	230	Графит	750	Керосин	2100
Серебро	250	Стекло лабораторное	840	Эфир	2350
Медь	400			Дерево (дуб)	2400
Цинк	400	Кирпич	880	Спирт	2500
Латунь	400	Алюминий	920	Вода	4200

Материал	Теплопроводность, Вт/(м·К)
Стекло	1–1,15
Кварц	8

Из «Будака»

Задание 1 решение

§ 2. Метод разделения переменных

1. Однородные изотропные среды. Уравнения с постоянными коэффициентами.

а) *Задачи теплопроводности с постоянными граничными условиями и свободными членами.*

22. а) Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty, \tag{3}$$

является

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t\right\} \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi.$$

б) Если $f(x) \equiv U_0 = \text{const}$, то

$$u(x, t) = \frac{4U_0}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\exp\left\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}\right\}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l},$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty. \tag{4}$$

Лекция 4 Уравнения параболического типа

Граничные условия 1-го рода для пластины или тонкого стержня.

- **Внимание на параметр a и a²**
- **В разных изданиях встречаются записи**
- для распространения тепла **и**

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$a = \frac{\lambda}{c\rho},$$

$$a^2 = \frac{\lambda}{c\rho},$$

-

Из «Будака» Пример выполнения

Задание 1 решение 0

Само решение

является

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t\right\} \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi.$$

б) Если $f(x) \equiv U_0 = \text{const}$, то

$$\boldsymbol{u}(x, t) = \frac{4U_0}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \exp\left\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}\right\} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{l},$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty. \quad (4)$$

Задание 1 решение 0 из «Зайцева»

1.1.2-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Пример выполнения

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},$$
$$w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + $$
$$+ a\int_0^t g_1(\tau)H_1(x,t-\tau)\,d\tau - a\int_0^t g_2(\tau)H_2(x,t-\tau)\,d\tau.$$

Две формы представления для функции Грина:

G – функция Грина

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigl\{\exp\Bigl[-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4at}\Bigr] - \exp\Bigl[-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4at}\Bigr]\Bigr\}.$$

Первый ряд сходится быстро при больших t, а второй — при малых t. Функции H_1 и H_2 выражаются через функцию Грина по формулам

$$H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}, \quad H_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=l}.$$

из «Зайцева» с общим видом граничных условий

Задание 1 решение 0 из «Зайцева»

Пример выполнения

1.1.2-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} &w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\ &w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},\\ &w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \\ + a\int_0^t g_1(\tau)H_1(x,t-\tau)\,d\tau - a\int_0^t g_2(\tau)H_2(x,t-\tau)\,d\tau.$$

Две формы представления для функции Грина:

G – функция Грина

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right) = \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4at}\right]\right\}.$$

Первый ряд сходится быстро при больших t, а второй — при малых t. Функции H_1 и H_2 выражаются через функцию Грина по формулам

$$H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}, \quad H_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=l}.$$

из «Зайцева» с общим видом граничных условий

Условия задачи Будак глава III, номер 22
договоренность об обозначениях

Длина $L := 4 \cdot 10^{-4}$

$C_{0.} := 10^{20}$

C_{left}

C_{Right}

$C_{Right} := 10^{12}$

$C_{left} := 10^{17}$

$a := 10^{-11}$

$$\frac{a \cdot \pi^2 \cdot 1^2}{(L)^2} = 6.169 \times 10^{-4}$$

$a = 1 \times 10^{-11}$

Пример выполнения

Условия задачи III-22 договоренность об обозначениях

Длина $L := 4 \cdot 10^{-4}$

$C_{0.} := 10^{20}$

C_{left}

C_{Right}

$C_{Right} := 10^{12}$

$C_{left} := 10^{17}$

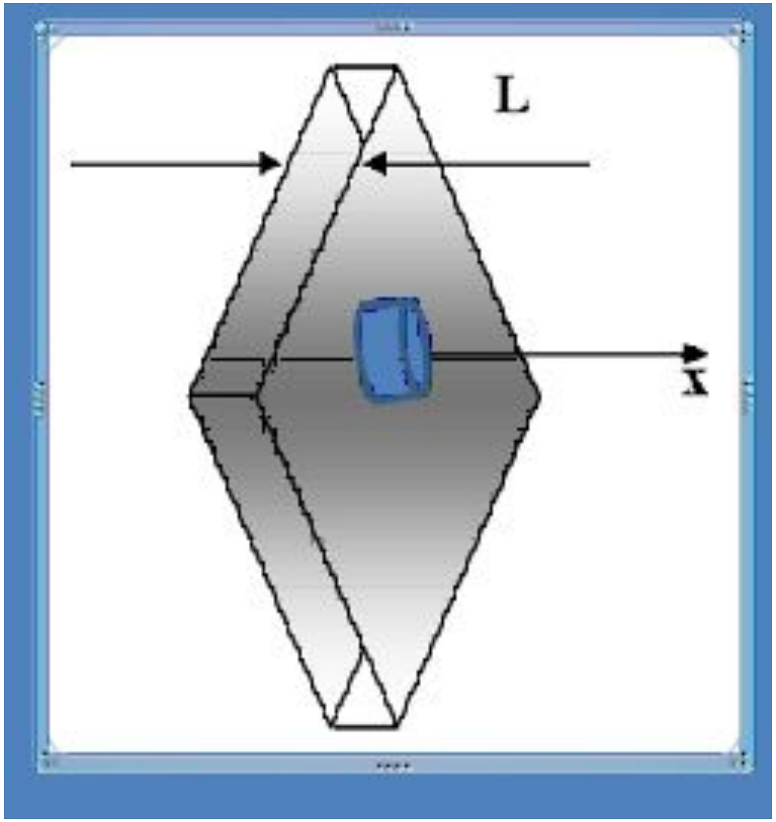
$a := 10^{-11}$

$$\frac{a \cdot \pi^2 \cdot 1^2}{(L)^2} = 6.169 \times 10^{-4}$$

$a = 1 \times 10^{-11}$

Пример выполнения

Пластина или тонкий стержень



Из «Будака» Условия задачи III-22

Тепловая задача Word format

- 22.а) Найти распределение температуры в стержне $0 \le x \le \ell$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура равна
произвольной функции $f(x)$.
- б) Рассмотреть, в частности, случай, когда $f(x) = U_o = \mathrm{const}$, и дать оценку погрешности, допускаемой при замене суммы ряда, представляющего решение в точке $x = \ell/2$, его частичной суммой, и установить, с какого момента времени отношение суммы всех его членов, начиная со второго, к первому члену будет заведомо меньше наперед заданного $\varepsilon > 0$.
- Замечание. При этом мы будем говорить, что в рассматриваемой точке наступил регулярный режим[3]) с относительной точностью ε.

Пример выполнения

Из «Будака» переделана из тепловой

Диффузионная задача

- 22.а) Найти распределение концентрации в стержне $0 \le x \le \ell$ с непроницаемой боковой поверхностью, если концентрация его концов поддерживается равной нулю (пусть 10^{11}), а начальная концентрация равна произвольной функции f(x).
- б) Рассмотреть, в частности, случай, когда f(x) = Uo = const, и дать оценку погрешности, допускаемой при замене суммы ряда, представляющего решение в точке $x = \ell/2$, его частичной суммой, и установить, с какого момента времени отношение суммы всех его членов, начиная со второго, к первому члену будет заведомо меньше наперед заданного $\varepsilon > 0$.
- Замечание. При этом мы будем говорить, что в рассматриваемой точке наступил регулярный режим[3]) с относительной точностью ε.

Пример выполнения

Пример выполнения задачи диффузии

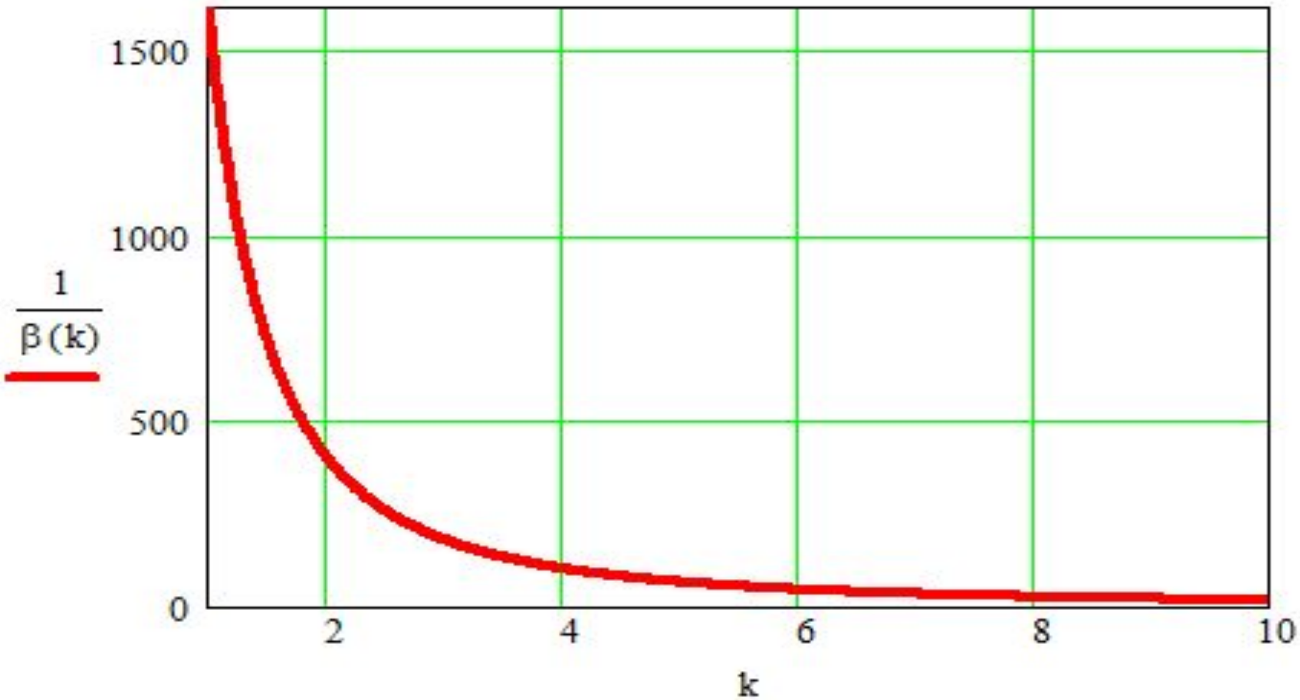
Time const

$$\beta(k) := \frac{a \cdot \pi^2 \cdot k^2}{(L)^2}$$

$$t_0 := \frac{1}{\beta(1)}$$

$$\beta(1) = 6.169 \times 10^{-4}$$

sekund $t_0 = 1.621 \times 10^3$



$t_0 = 1.621 \times 10^3$ $t_6 := t_0 \cdot 6$ $t_6 = 9.727 \times 10^3$

Пример выполнения тепловой задачи

Решение из Будака

б) Если $f(x) \equiv U_0 = \text{const}$, то

$$u(x, t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \exp\left\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2 a^2}{l^2}\right\} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{l},$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty. \quad (4)$$

$L := 0.06 \qquad \alpha := 20$

c – теплоемкость, [Дж/(кг·К)];

ρ – плотность, [кг/м^3].

$c := 800$

$\rho := 1900$

$\lambda := 1.1$

Материал	Теплопроводность, Вт/(м·К)
Стекло	1–1,15
Кварц	8

$$Bio := \frac{\alpha \cdot L}{\lambda} \qquad Bio = 1.091$$

Пример выполнения тепловой задачи

Time const

$$\beta(k) := \frac{a \cdot \pi^2 \cdot \left[(2k+1)^2\right]}{(L)^2} \qquad t_0 := \frac{1}{\beta(0)}$$

$$\beta(0) = 1.984 \times 10^{-3}$$

sekund $t_0 = 504.027$

$$t_0 = 504.027 \qquad t_6 := t_0 \cdot 6 \qquad t_6 = 3.024 \times 10^3$$

Из «Будака» для диффузии

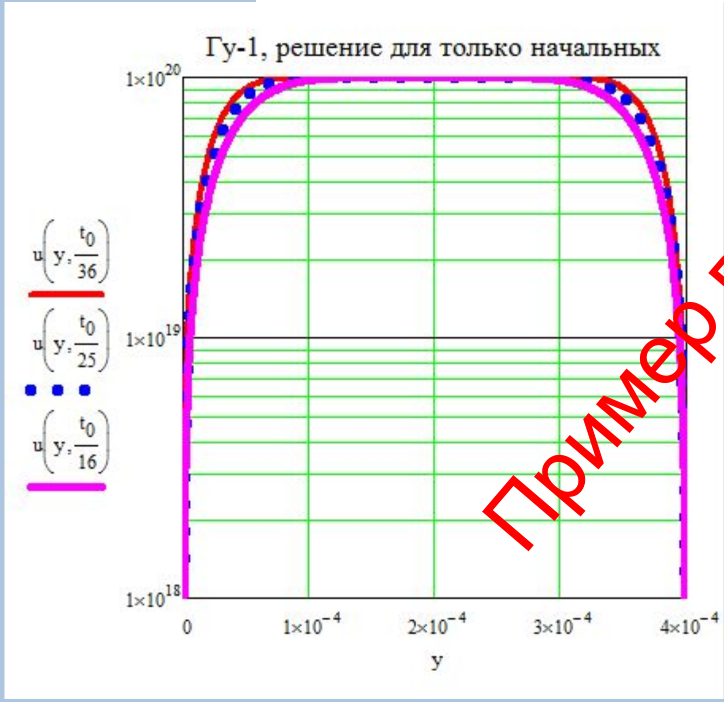
б) Если $f(x) \equiv U_0 = \text{const}$, то

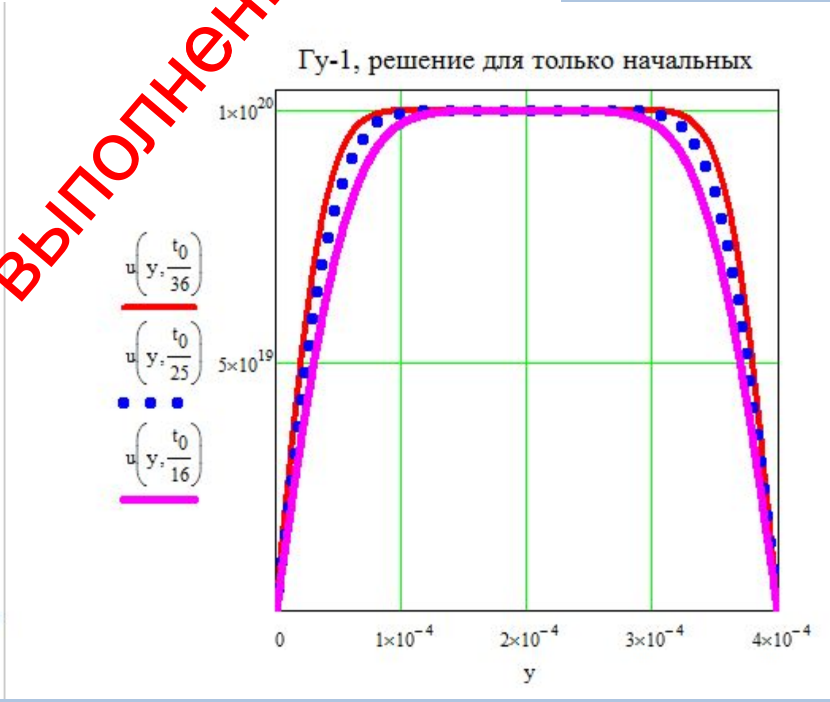
$$\boldsymbol{u}(x,\, t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \exp\left\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2 a^2}{l^2}\right\} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{l},$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty. \quad \textbf{(4)}$$

$$N := 24$$

$$u(y,t) := \frac{4}{\pi} \cdot C_0 \cdot \sum_{n=0}^{N} \left[\sin\left[\frac{(2n+1)\cdot\pi\cdot y}{L}\right] \cdot \frac{1}{(2n+1)} \cdot e^{-\left[\frac{a\cdot\pi^2\cdot(2n+1)^2}{L^2}\right]\cdot t} \right]$$





Пример выполнения

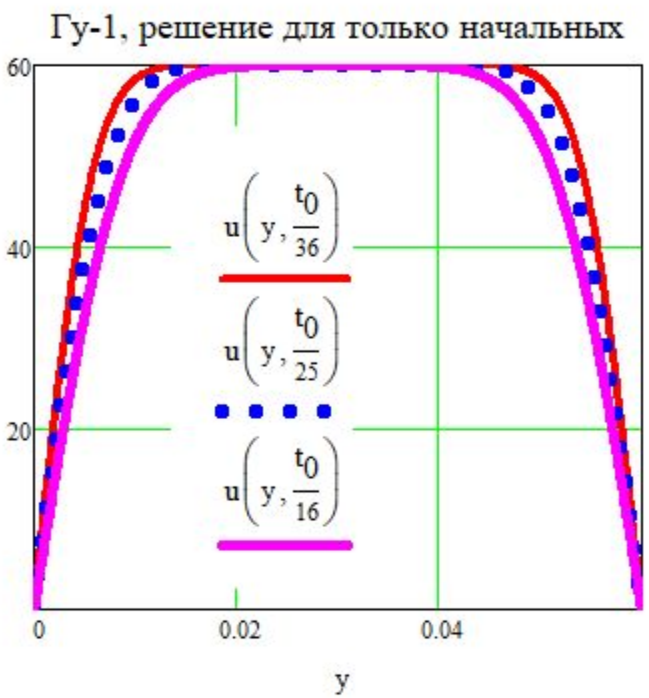
Из «Будака» для тепловой задачи

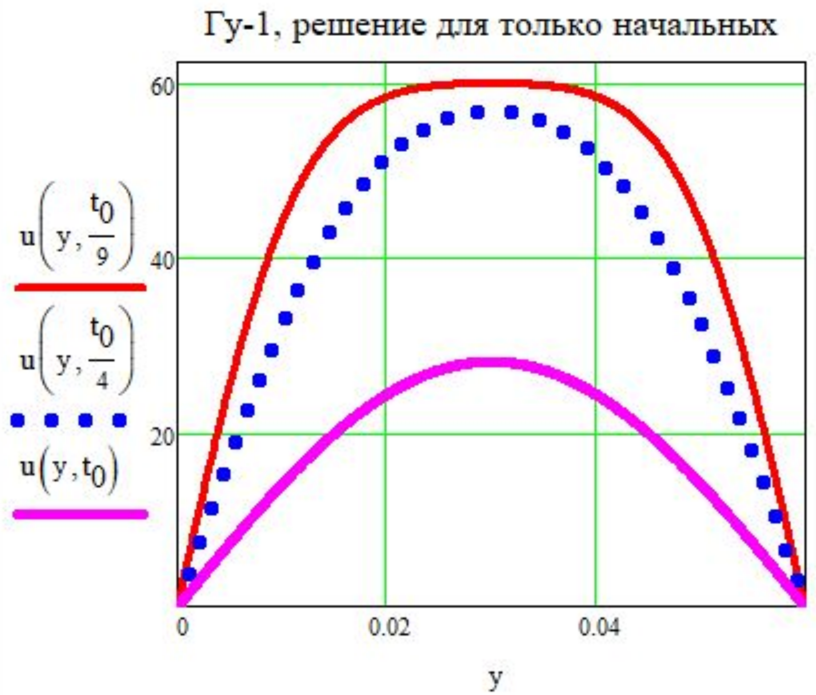
Гу-1, решение для только начальных

$N := 24$ **Число членов ряда**

$$u(y,t) := \frac{4}{\pi}\cdot T_0\cdot \sum_{n=0}^{N}\left[\sin\left[\frac{(2n+1)\cdot\pi\cdot y}{L}\right]\cdot\frac{1}{(2n+1)}\cdot e^{-\left[\frac{a\cdot\pi^2\cdot(2n+1)^2}{L^2}\right]\cdot t}\right]$$

$$\left[\frac{a\cdot\pi^2\cdot(0+1)^2}{L^2}\right]^{-1} = 504.027\times10^0$$





из «Зайцева» с только нулевыми условиями

1.1.2-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

Пример выполнения

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi$$

Две формы представления для функции Грина:

G – функция Грина

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right)$$

$$H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi} G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}, \quad H_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi} G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=l}.$$

Задание 1 решение 0 из «Зайцева»

1.1.2-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Пример выполнения

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},$$
$$w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau +$$
$$+ a \int_0^t g_1(\tau) H_1(x,t-\tau)\, d\tau - a \int_0^t g_2(\tau) H_2(x,t-\tau)\, d\tau.$$

Две формы представления для функции Грина:

G – функция Грина

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4at}\right] \right\}.$$

Первый ряд сходится быстро при больших t, а второй — при малых t. Функции H_1 и H_2 выражаются через функцию Грина по формулам

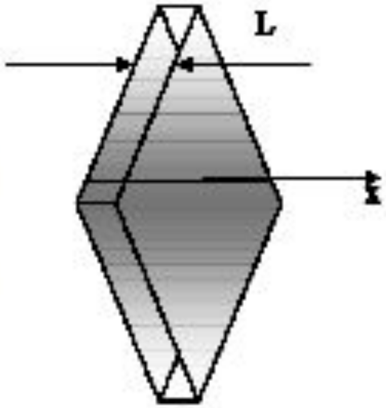
$$H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi} G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}, \quad H_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi} G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=l}.$$

из «Зайцева» с общим видом граничных условий

Длина $L = 0.06$ **METR**

начальная T

$T_0 := 60$



T_{left}

T_{Right}

$T_{left} := 20$

$T_{Right} := 20$

$$a := \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$$

$$\frac{a \cdot \pi^2 \cdot 1^2}{(L)^2} = 1.984 \times 10^{-3}$$

$$w(x,t) = \int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi$$

Time const

$$\beta(k) := \frac{a \cdot \pi^2 \cdot \left[(2k+1)^2\right]}{(L)^2} \qquad t_0 := \frac{1}{\beta(0)}$$

$\beta(0) = 1.984 \times 10^{-3}$ ***sekund*** $t_0 = 504.027$

Или концентрация постоянна

Начальное условие T – постоянна

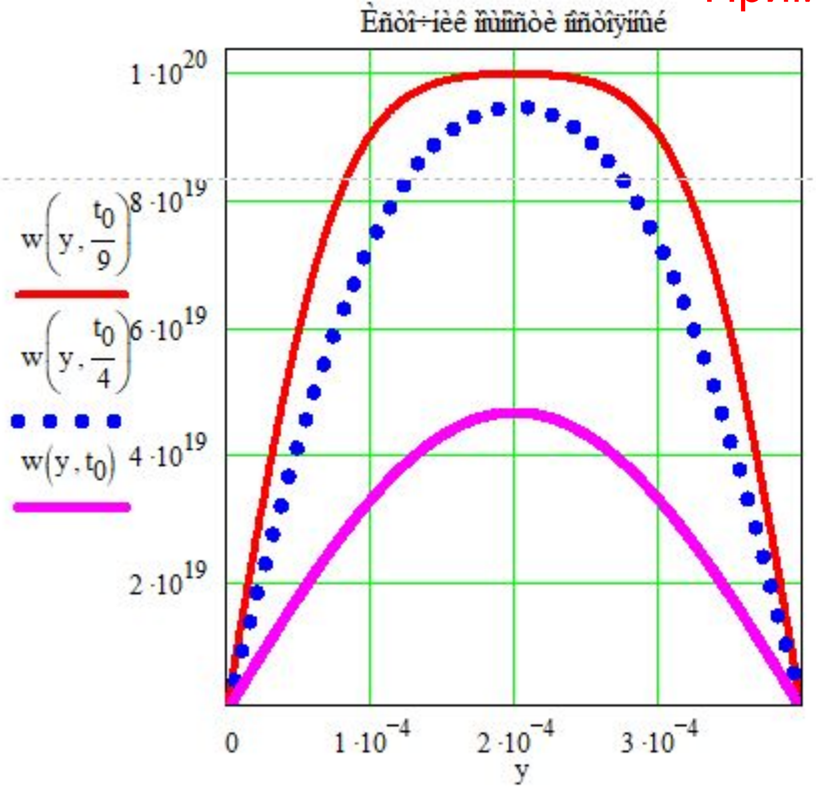
$$G(y,\xi,t) := \frac{2}{L}\cdot\sum_{n=1}^{N}\left[\sin\left(n\cdot\pi\cdot\frac{y}{L}\right)\cdot\sin\left(n\cdot\pi\cdot\frac{\xi}{L}\right)\cdot e^{\left(\frac{-a\cdot n^2\cdot\pi^2}{L^2}\right)\cdot t}\right]$$

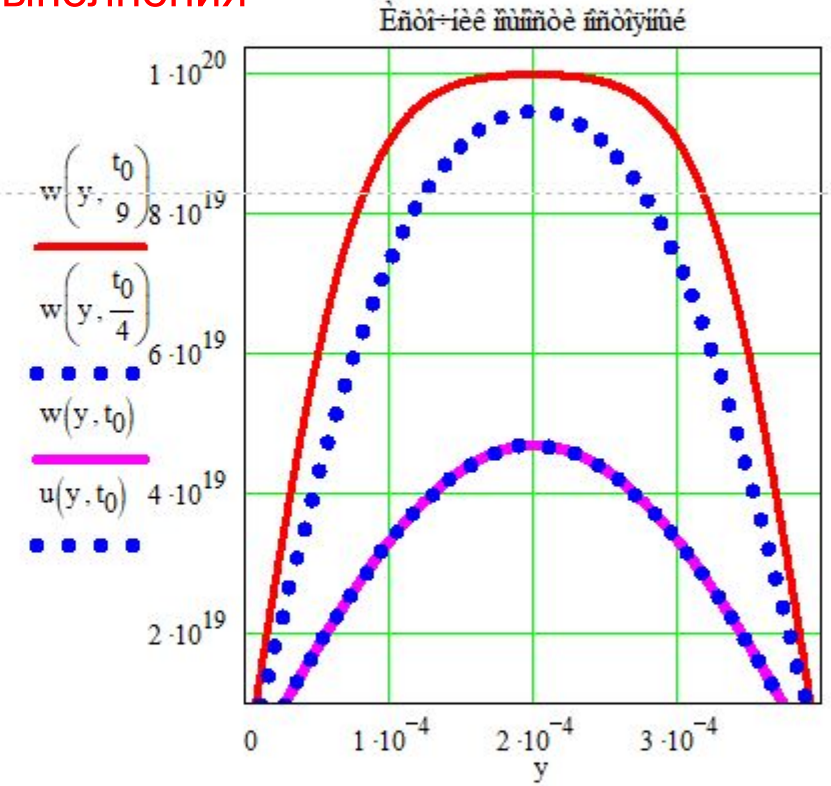
$$w(y,t) := C_0\cdot\frac{2}{L}\cdot\left[\sum_{n=1}^{N}\left[\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot y}{L}\right)\cdot e^{\left(\frac{-a\cdot n^2\cdot\pi^2}{L^2}\right)\cdot t}\cdot\int_0^L \sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot\xi}{L}\right)d\xi\right]\right]$$

$$w(x,t) = \int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi$$

G – функция Грина

Пример выполнения



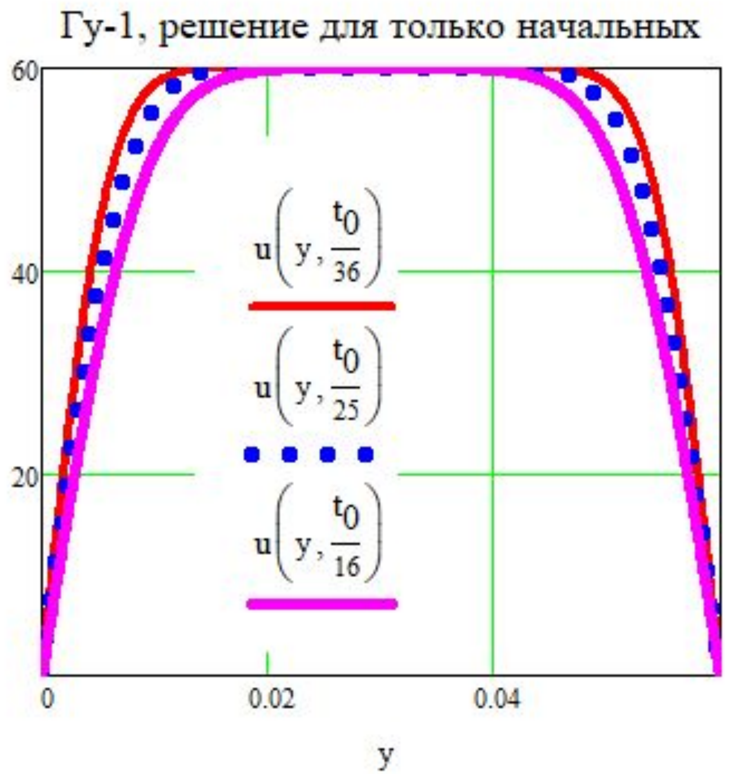


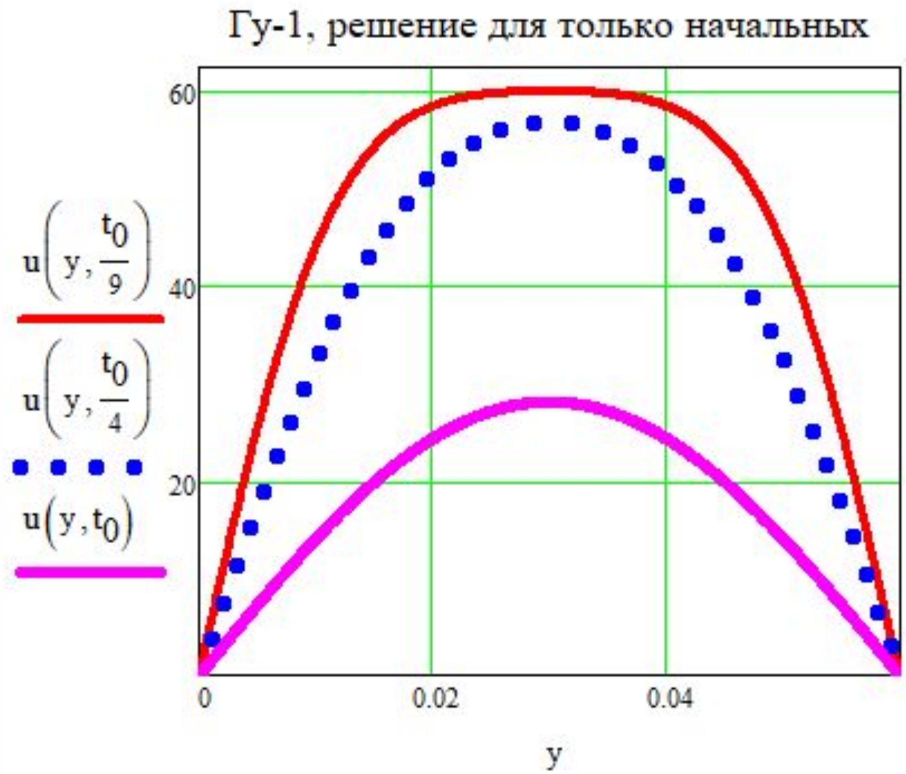
Гу-1, решение для только начальных

$\underset{\sim}{N} := 24$ **Число членов ряда**

$$u(y,t) := \frac{4}{\pi}\cdot T_0\cdot \sum_{n=0}^{N}\left[\sin\left[\frac{(2n+1)\cdot\pi\cdot y}{L}\right]\cdot\frac{1}{(2n+1)}\cdot e^{-\left[\frac{a\cdot\pi^2\cdot(2n+1)^2}{L^2}\right]\cdot t}\right]$$

$$\left[\frac{a\cdot\pi^2\cdot(0+1)^2}{L^2}\right]^{-1} = 504.027\times 10^0$$





Переход к сумме не нулевых членов ряда

$$\int_0^{L\_} \sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot\xi}{L\_}\right) d\xi \rightarrow \frac{-\cos(n\cdot\pi)}{n\cdot\pi}\cdot L\_ + \frac{1}{n\cdot\pi}\cdot L\_$$

$$\frac{1}{m\cdot\pi}\cdot L\cdot(-\cos(m\cdot\pi)+1)$$

$$\frac{1}{m\cdot\pi}\cdot L\left[-(-1)^m-(-1)\right]$$

$$\frac{-1}{m\cdot\pi}\cdot L\left[-(-1)^{m+1}-1\right]$$

$$\frac{1}{m\cdot\pi}\cdot L\left[(-1)^{m+1}+1\right]$$

СТРЕЛКА дает символичное вычисление. Черточки «обезличивают№ переменную, чтобы МАТКАД не воспринимал ее как число.

Пример выполнения

$nn := 1$ $\quad \frac{1}{nn}\cdot\left[(-1)^{nn+1}+1\right] = 2$ $\quad mm := 0$ $\quad \frac{1}{2mm+1}\cdot(2) = 2$

$nn := 2$ $\quad \frac{1}{nn}\cdot\left[(-1)^{nn+1}+1\right] = 0$

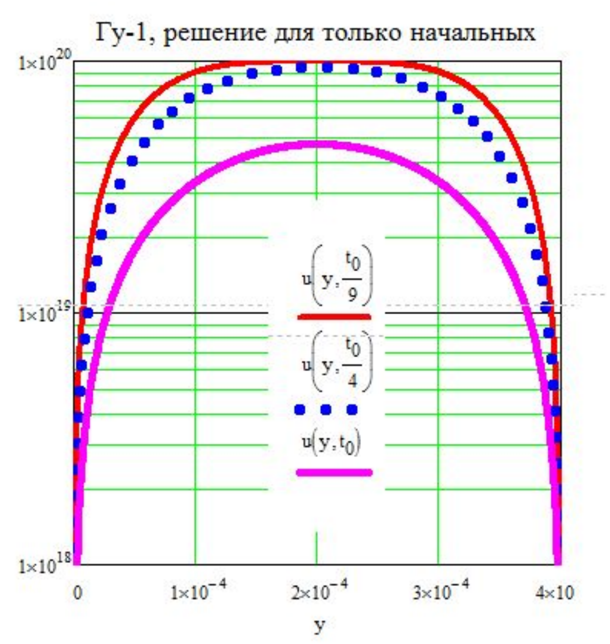
$nn := 3$ $\quad \frac{1}{nn}\cdot\left[(-1)^{nn+1}+1\right] = 0.667$ $\quad mm := 1$ $\quad \frac{1}{2mm+1}\cdot(2) = 0.667$

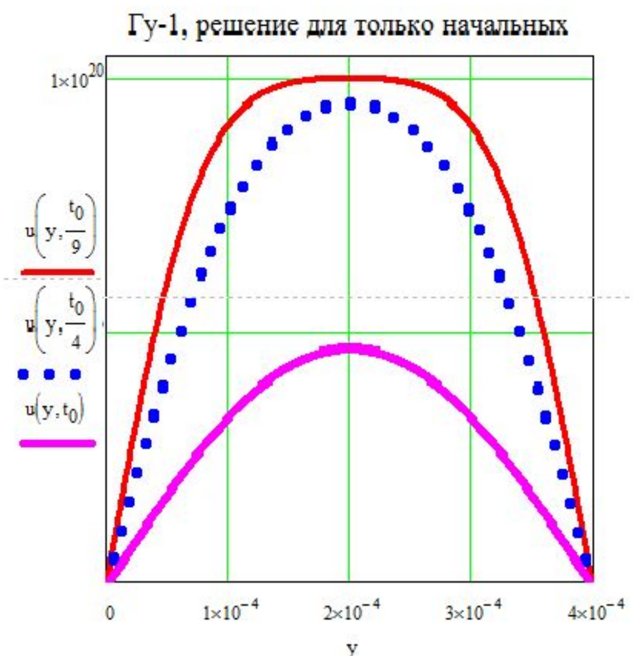
Проверка правильности перехода на счет нечетных членов ряда

$$w(y,t) := C_0 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left[\sum_{n=1}^{N} \left[\sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot y}{L}\right) \cdot e^{\left(\frac{-a \cdot n^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right) \cdot t} \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot \left[(-1)^{n+1} + 1\right]\right]\right]\right]$$

$$u(y,t) := C_0 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left[\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}} \left[\sin\left[\frac{\pi \cdot (2m+1) \cdot y}{L}\right] \cdot e^{\left[\frac{-a \cdot (2m+1)^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right] \cdot t} \cdot \left(\frac{2}{2m+1}\right)\right]\right]$$

Пример выполнения





1.1.2-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0$$

(начальное условие),

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi + $$

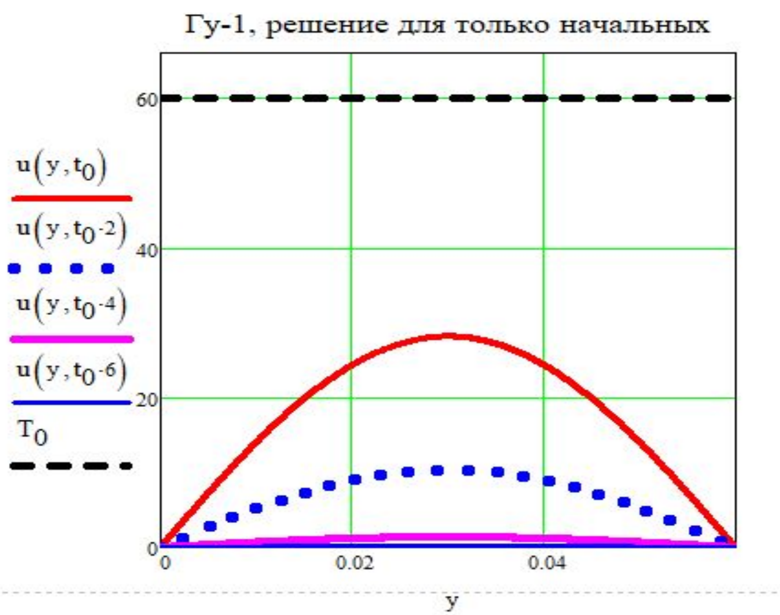
$$+ a \int_0^t g_1(\tau) H_1(x, t-\tau)\, d\tau - a \int_0^t g_2(\tau) H_2(x, t-\tau)\, d\tau.$$

$$w = g_1(t) \quad \text{при}$$

$x = 0$ (граничное условие),

$$w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l$$

(граничное условие).



1.1.2-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi \text{ -}$$

Две формы представления для функции Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right)$$

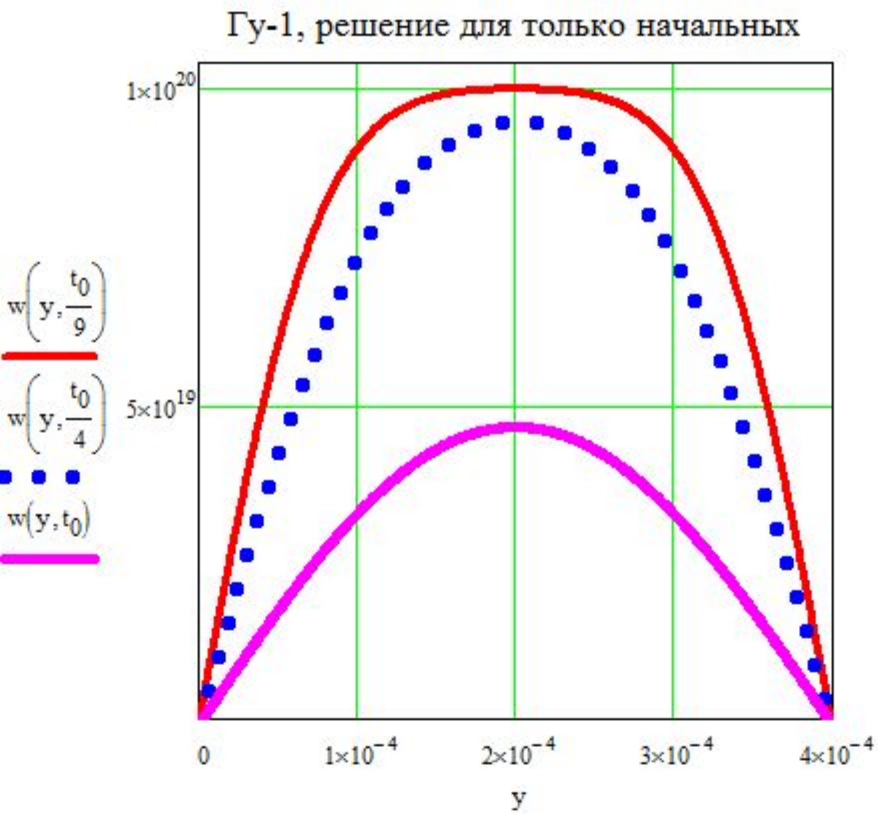
$$H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}, \quad H_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=l}.$$

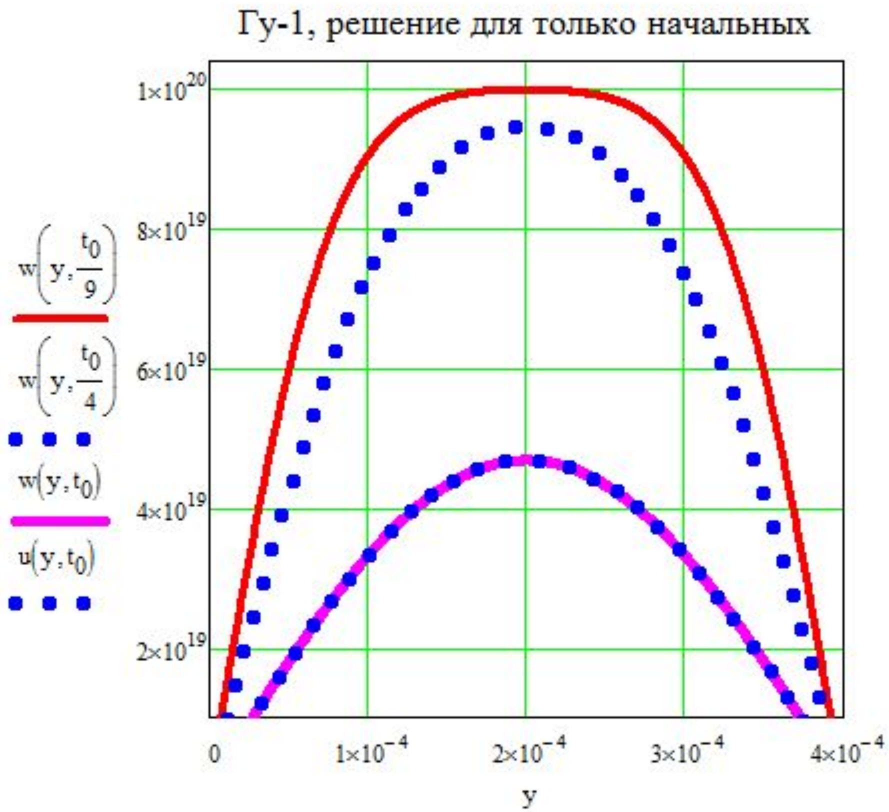
Задание 1 решение 0 закончено пока на половину. Продолжение следует. После расчета надо составить отчет полностью в ВОРДе

Гу-1, решение для только начальных

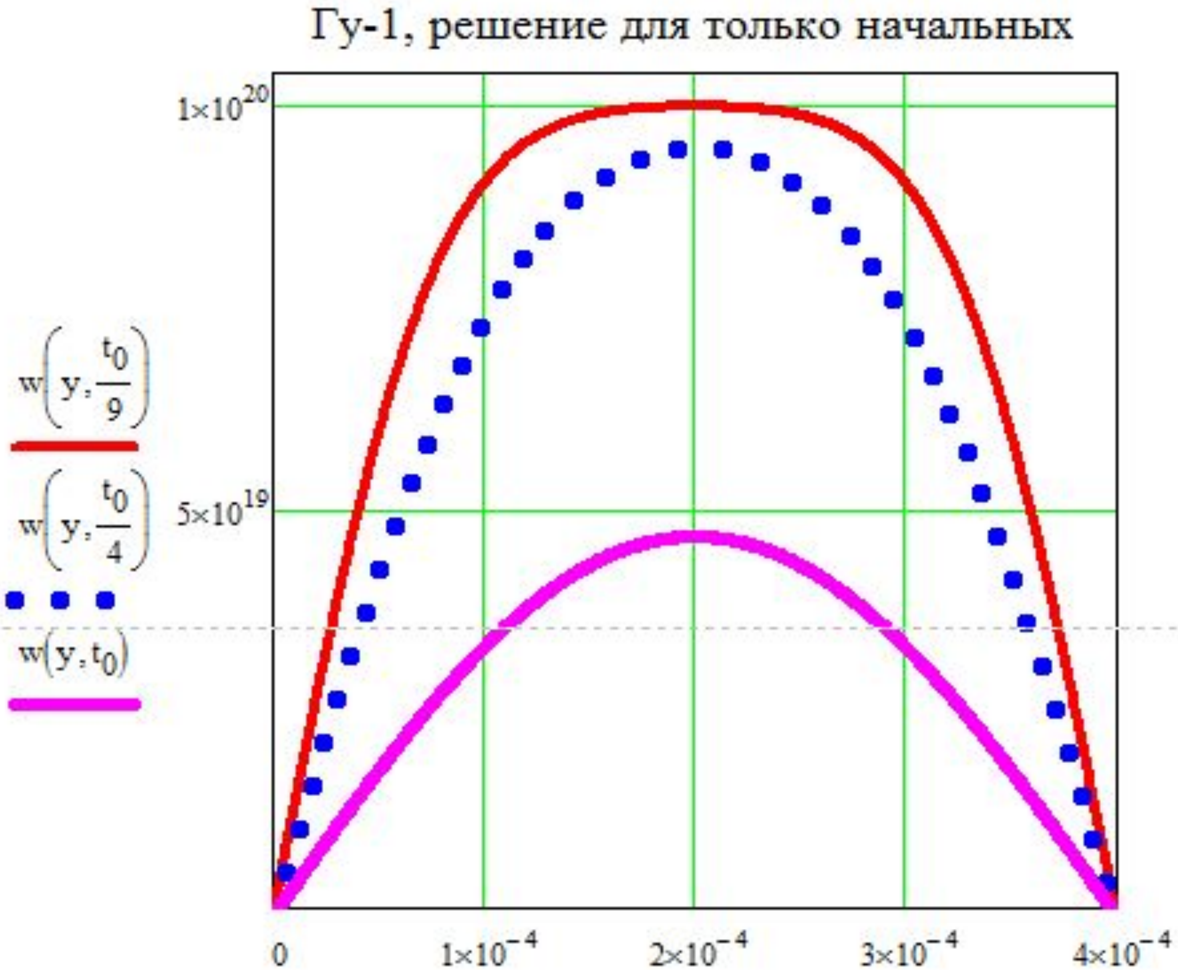
$$w(y,t) := C_0 \cdot \frac{2}{L} \cdot \left[\sum_{n=1}^{N} \left[\sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot y}{L}\right) \cdot e^{\left(\frac{-a \cdot n^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right) \cdot t} \cdot \int_0^L \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot \xi}{L}\right) d\xi \right] \right]$$

$$\int_0^{L\_} \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot \xi}{L\_}\right) d\xi \rightarrow \frac{2 \cdot L\_ \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{2}\right)^2}{\pi \cdot n}$$

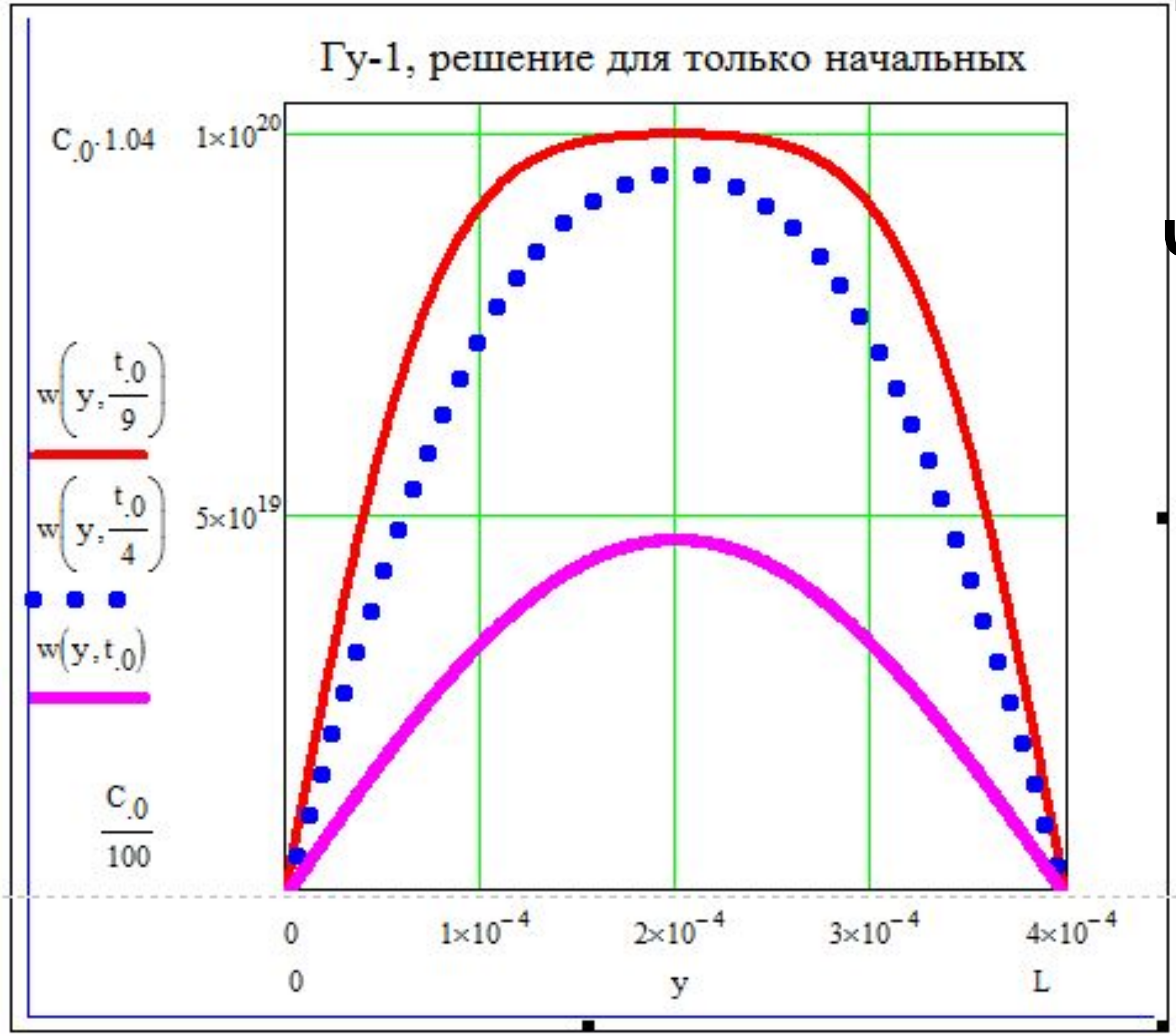




$$w(y,t) := C_0 \cdot \frac{2}{L} \cdot \left[\sum_{n=1}^{N} \left[\sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot y}{L}\right) \cdot e^{\left(\frac{-a \cdot n^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right) \cdot t} \cdot \left[\frac{1}{n \cdot \pi} \cdot L \cdot \left[(-1)^{n+1} + 1 \right] \right] \right] \right]$$



$$u(y,t) := C_0 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left[\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}} \left[\sin\left[\frac{\pi \cdot (2m+1) \cdot y}{L}\right] \cdot e^{\left[\frac{-a \cdot (2m+1)^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right] \cdot t} \cdot \left(\frac{2}{2m+1}\right) \right] \right]$$



Номер через один

<u>**Задание 1 решение 0**</u>

закончено пока на половину. Продолжение для граничных условий слева и справа После расчета надо составить отчет полностью в ВОРДе

$N := 16 \qquad a = 1 \times 10^{-11} \qquad L = 4 \times 10^{-4}$

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right)$$

$$H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}, \quad H_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=l}.$$

$$G(y,\xi,t) := \frac{2}{L}\cdot\sum_{n=1}^{N}\left[\sin\left(n\cdot\pi\cdot\frac{y}{L}\right)\cdot\sin\left(n\cdot\pi\cdot\frac{\xi}{L}\right)\cdot e^{\left(\frac{-a\cdot n^2\cdot\pi^2}{L^2}\right)\cdot t}\right]$$

$$h_1(y,\xi,t) := \frac{d}{d\xi}G(y,\xi,t) \qquad H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}$$

$$h_{10}(y,t) := h_1(y,0,t) \qquad h_{10}\left(\frac{L}{2},t_0\right) = 1.443 \times 10^{7}$$

$$H1(y,\xi,t) := \frac{2}{L}\cdot\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{n\cdot\pi}{L}\cdot\sin\left(n\cdot\pi\cdot\frac{y}{L}\right)\cdot\cos\left(n\cdot\pi\cdot\frac{\xi}{L}\right)\cdot e^{-\left(\frac{a\cdot n^2\cdot\pi^2}{L^2}\right)\cdot t}\right]$$

$$H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}$$

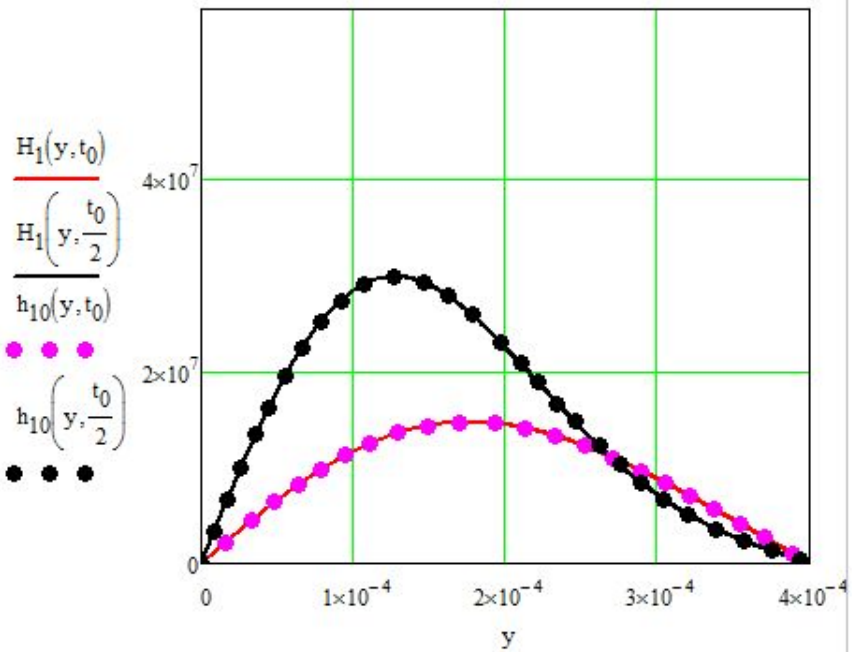
равен **1** при $\boldsymbol{\xi = 0}$

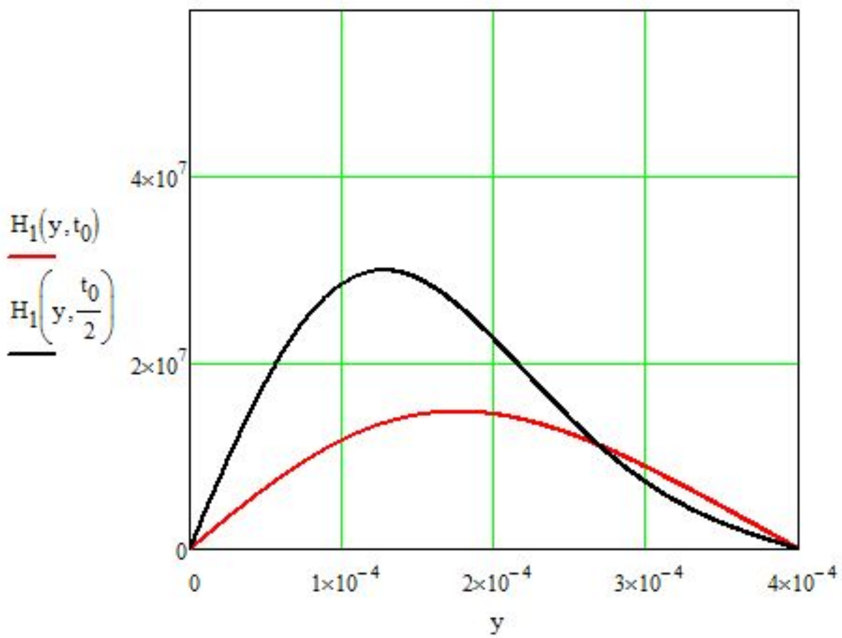
$$H_1(y,t) := \frac{2}{L}\cdot\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{n\cdot\pi}{L}\cdot\sin\left(n\cdot\pi\cdot\frac{y}{L}\right)\cdot e^{-\left(\frac{a\cdot n^2\cdot\pi^2}{L^2}\right)\cdot t}\right]$$

$$H_1\left(\frac{L}{2},t_0\right) = 1.443\times10^{7}$$

Проверка ограниченности функции

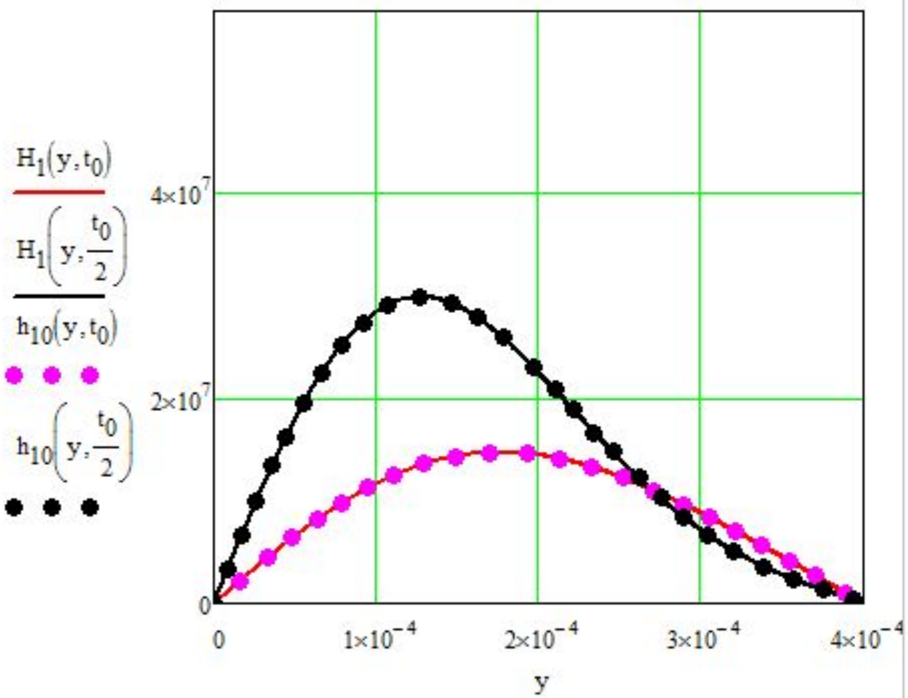
Граничные условия с постоянной температурой

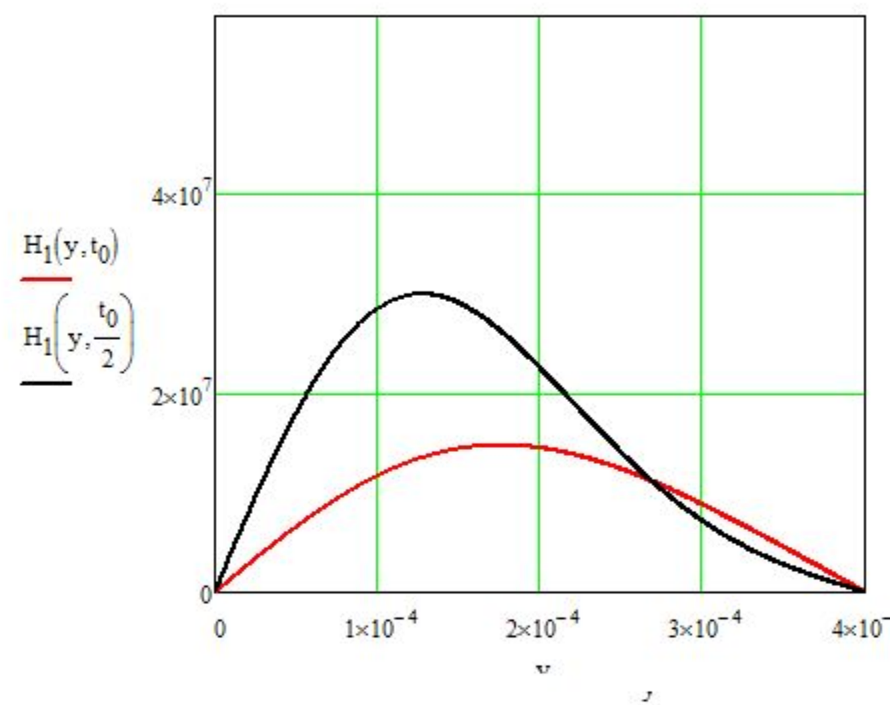




Проверка ограниченности функции

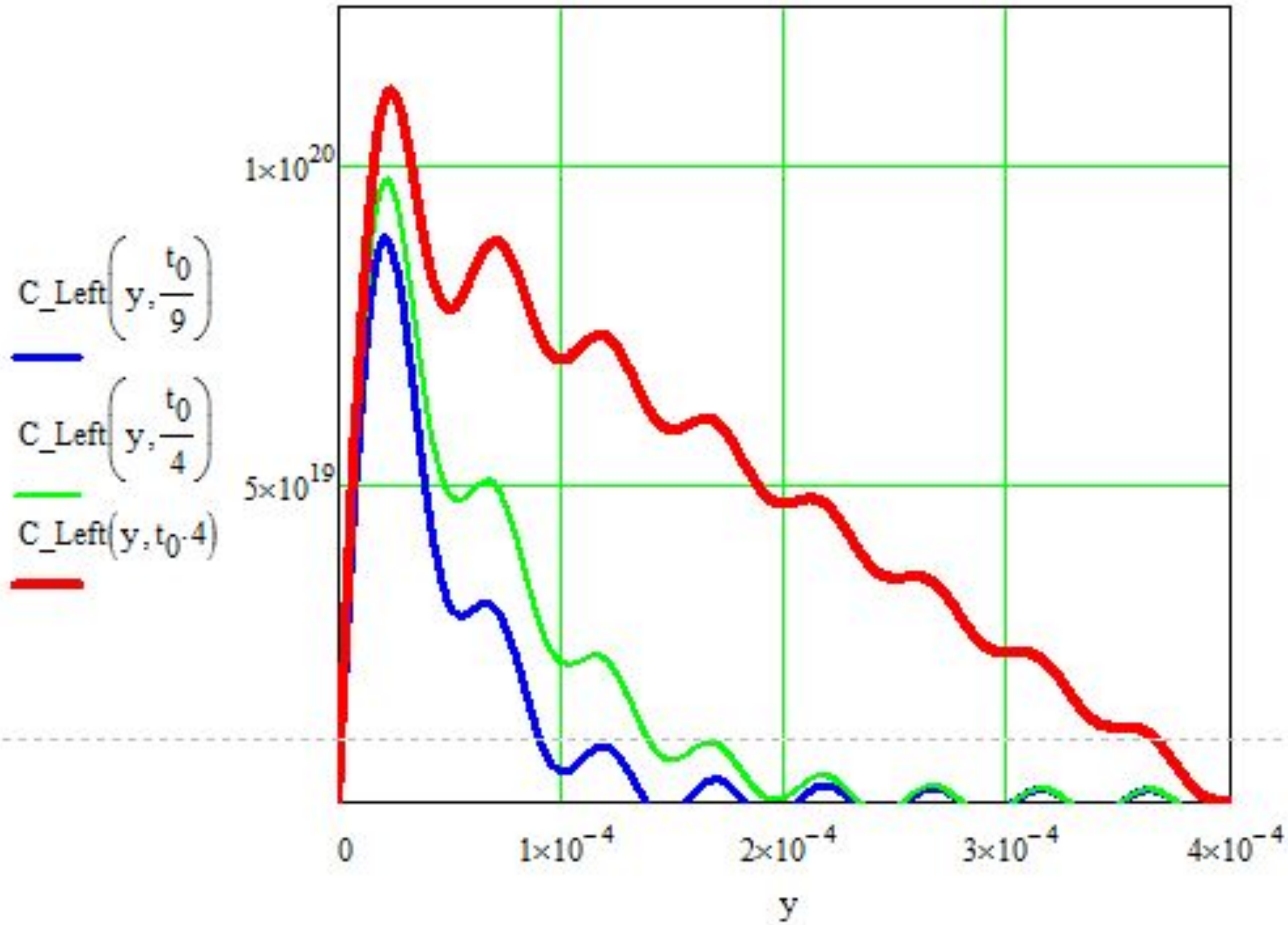
Граничные условия с постоянной температурой



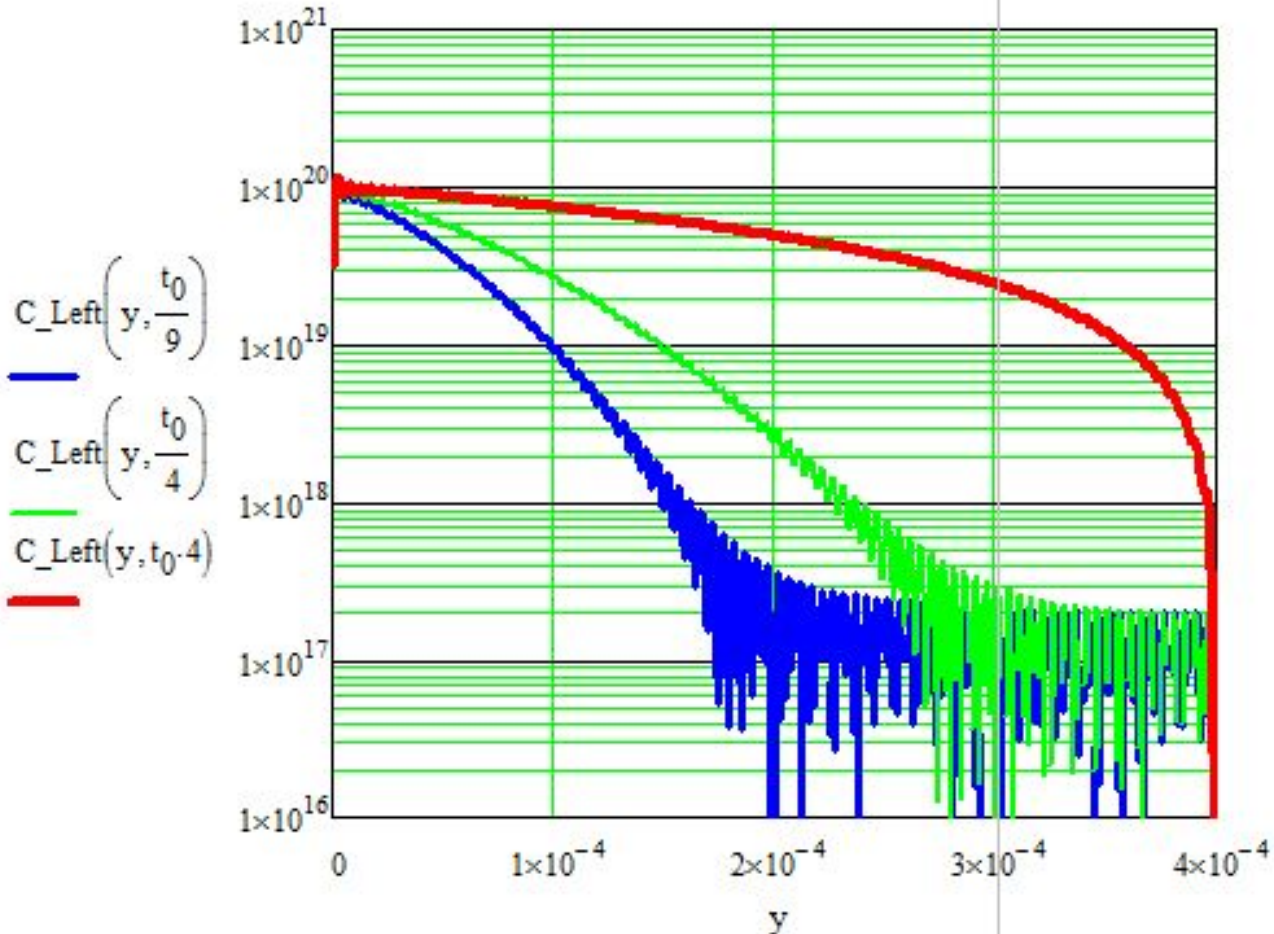


Граничное условие слева при x=0

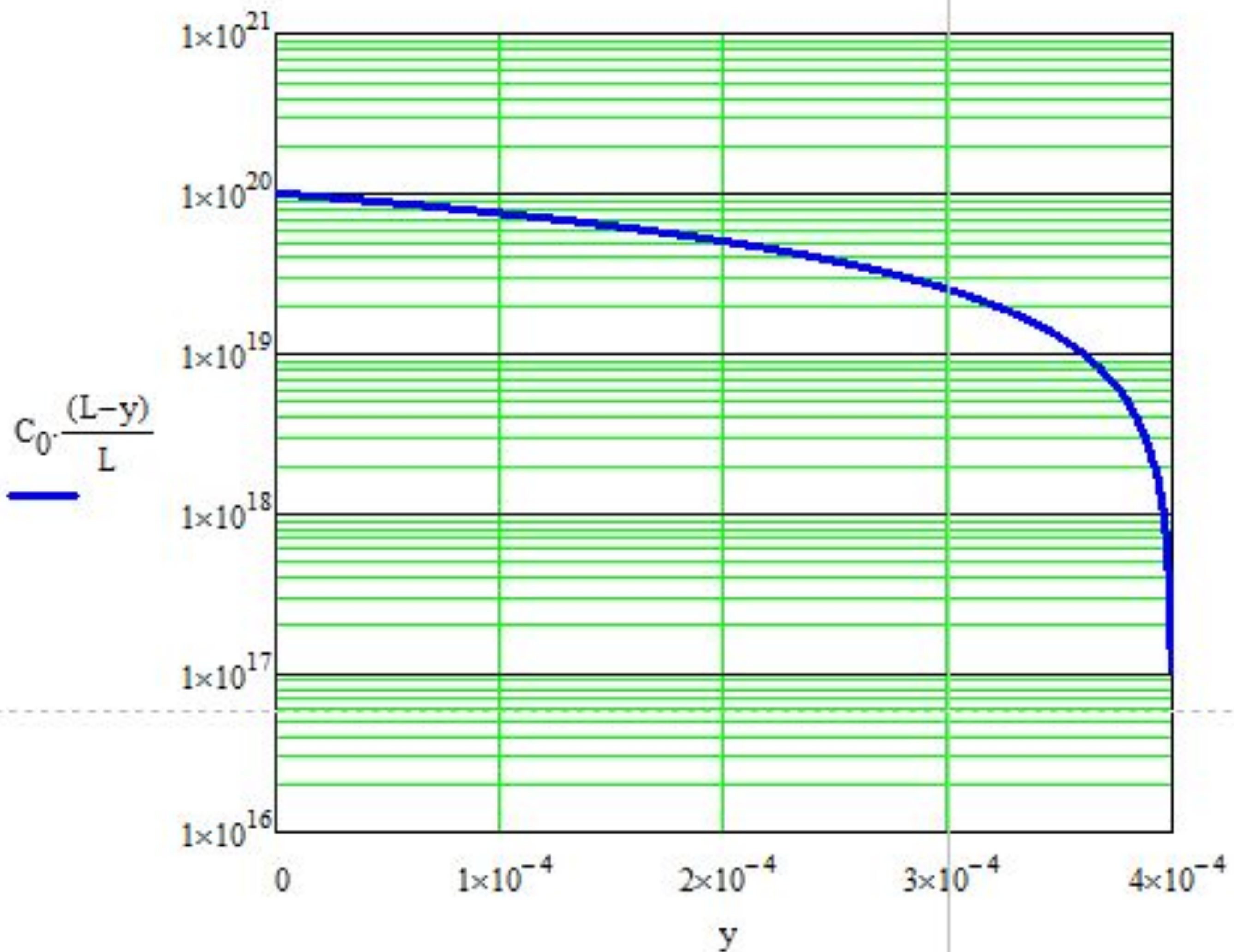
$$C\_Left(y,t) := a \cdot C_0 \cdot \int_0^t H_1(y, t - \tau)\, d\tau$$



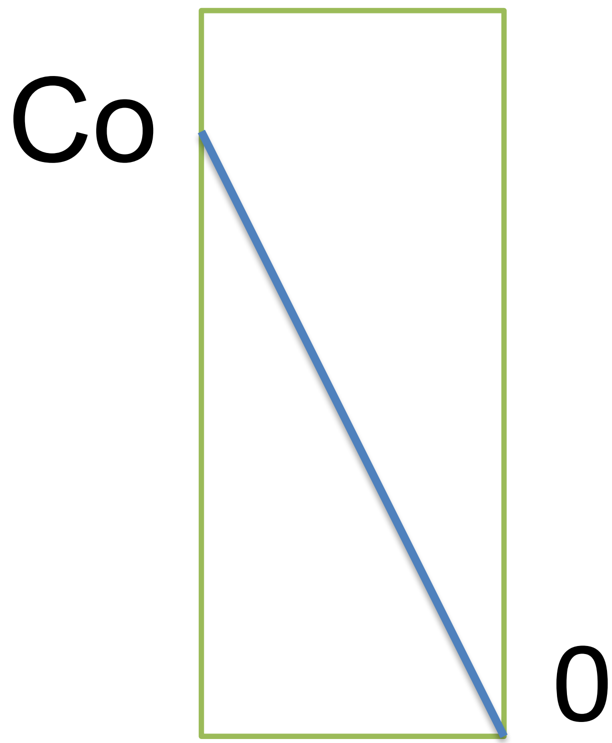
$$C\_Left(y,t) := a \cdot C_0 \cdot \left[\frac{2}{L} \cdot \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{L}\right) \cdot \frac{1 - e^{-\left(\frac{a \cdot n^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right) \cdot (t)}}{\frac{a \cdot n^2 \cdot \pi^2}{L^2}} \right] \right]$$



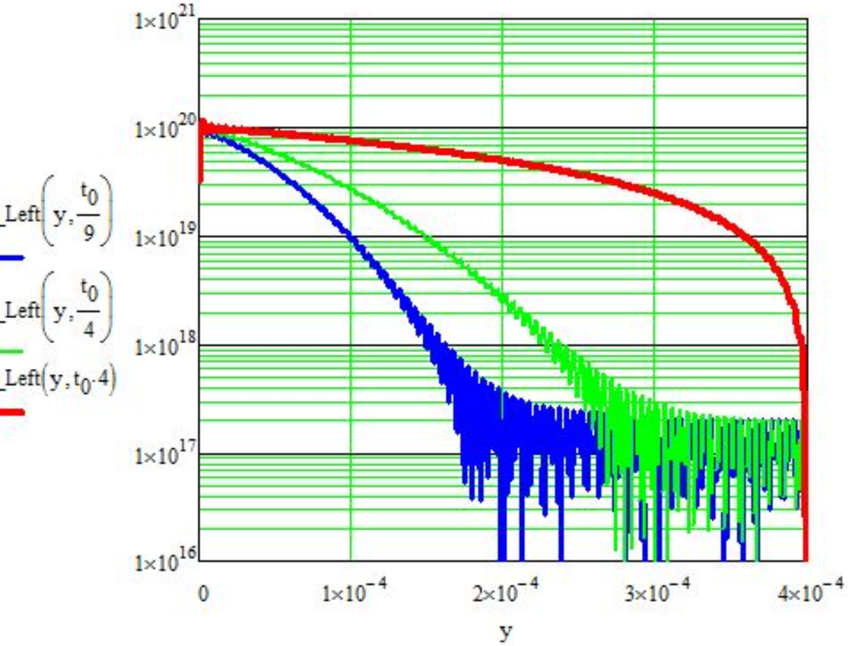
$$C\_Left(y,t) := a \cdot C_0 \cdot \left[\frac{2}{L} \cdot \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{L}\right) \cdot \frac{1 - \quad}{\frac{a \cdot n^2 \cdot \pi^2}{L^2}} \right] \right]$$

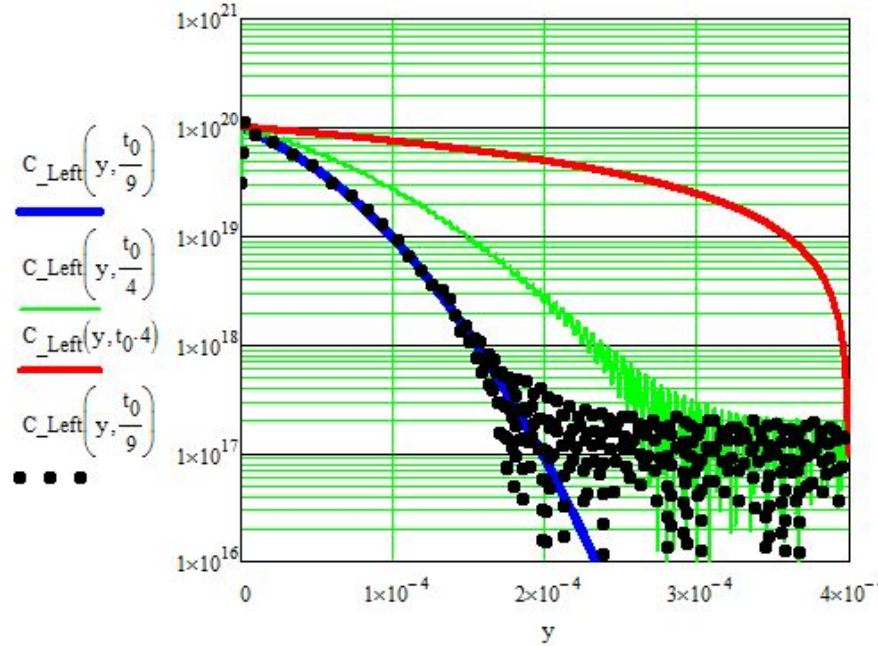


Co



$$C_{\_Left}(y,t) := C_{0}\cdot\frac{(L-y)}{L} - a\cdot C_{0}\cdot\left[\frac{2}{L}\cdot\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{n\cdot\pi}{L}\cdot\sin\left(n\cdot\pi\cdot\frac{y}{L}\right)\cdot\frac{e^{-\left(\frac{a\cdot n^2\cdot\pi^2}{L^2}\right)\cdot(t)}}{\frac{a\cdot n^2\cdot\pi^2}{L^2}}\right]\right]$$

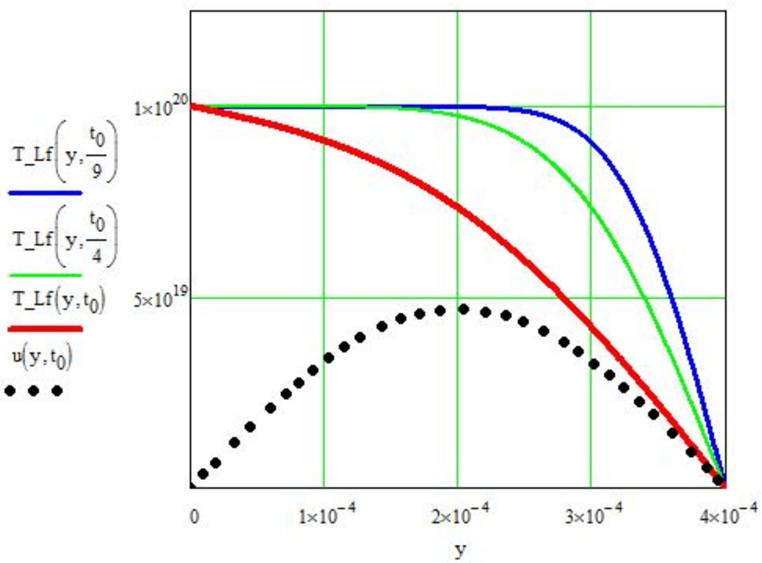


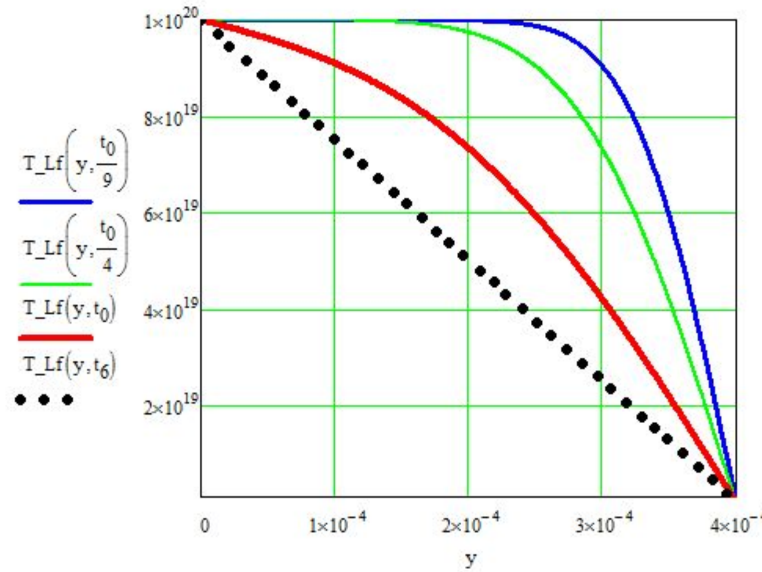


$$u(y,t) := C_0 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left[\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}} \left[\sin\left[\frac{\pi \cdot (2m+1) \cdot y}{L}\right] \cdot e^{\left[\frac{-a \cdot (2m+1)^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right] \cdot t} \cdot \left(\frac{2}{2m+1}\right) \right] \right]$$

$$C_f(y,t) := u(y,t)$$

$$T\_Lf(y,t) := C_f(y,t) + C_{\_Left}(y,t)$$





Задание 1 Задача 1 Азаров Дмитрий Сергеевич

23. Начальная температура стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью равна

$$U_0 = \text{const}, \tag{1}$$

а на концах его поддерживается постоянная температура

$$u(0, t) = U_1 = \text{const}, \quad u(l, t) = U_2 = \text{const}, \quad 0 < t < +\infty. \tag{2}$$

Найти температуру $u(x, t)$ стержня при $t > 0$; найти также стационарную температуру

$$\overline{u}(x) = \lim_{t \to +\infty} u(x, t).$$

Задание 1 Задача 1 Азаров Дмитрий Сергеевич

1.1.2-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} &w = f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ &w = g_1(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\ &w = g_2(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,t) = \int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau\, + \\ + a \int_0^t g_1(\tau) H_1(x, t-\tau)\, d\tau - a \int_0^t g_2(\tau) H_2(x,t-\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Две формы представления для функции Грина:

$$\begin{aligned} G(x,\xi,t) &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big) \sin\Big(\frac{n\pi\xi}{l}\Big) \exp\Big(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Big) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big\{ \exp\Big[-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4at}\Big] - \exp\Big[-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4at}\Big] \Big\}. \end{aligned}$$

Первый ряд сходится быстро при больших t, а второй — при малых t. Функции H_1 и H_2 выражаются через функцию Грина по формулам

$$H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}, \quad H_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=l}.$$

Задание 1 Задача 1 Азаров Дмитрий Сергеевич

23. Решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \tag{3}$$

при начальном условии (1) и граничных условиях (2) (см. условие задачи) является

$$u(x, t) = U_1 + (U_2 - U_1)\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\{(U_0 - U_1)[1 - (-1)^n] +$$

$$+ (-1)^{n+1}(U_1 - U_2)\} \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t\right\} \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{4}$$

Установившаяся температура в стержне равна

$$\overline{u}(x) = \lim_{t\to\infty} u(x, t) = U_1 + (U_2 - U_1)\frac{x}{l}. \tag{5}$$

Указание. Решение уравнения (3) при начальном условии (1) и граничных условиях (2) можно искать в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + \overline{u}(x), \tag{6}$$

где функция $\overline{u}(x)$ определяется как стационарное решение уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям (2), т. е.

$$\frac{d^2\overline{u}(x)}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$\overline{u}(0) = U_1, \quad \overline{u}(l) = U_2,$$

откуда

$$\overline{u}(x) = U_1 + (U_2 - U_1)\frac{x}{l},$$

Пример 7. Начальная температура равна нулю, $f(x) = 0$. На границах поддерживаются постоянные температуры: $g_1(t) = w_1$, $g_2(t) = w_2$.

Решение:

$$w = w_1 + (w_2 - w_1)\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n w_2 - w_1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right).$$

Задание 1 Задача 1 Азаров Дмитрий Сергеевич

т. е. $\overline{u}(x)$ есть предел, к которому стремится температура в стержне при $t \to +\infty$.

Функция $v(x, t)$ будет удовлетворять уравнению (3) и условиям

$$v(x, 0) = U_0 - \overline{u}(x), \tag{7}$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \tag{8}$$

т. е. $v(x, t)$ является решением первой краевой задачи с нулевыми граничными условиями. Такая задача была уже рассмотрена (см. задачу 22).

Пример 7. Начальная температура равна нулю, $f(x) = 0$. На границах поддерживаются постоянные температуры: $g_1(t) = w_1$, $g_2(t) = w_2$.

Решение:

$$w = w_1 + (w_2 - w_1)\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n w_2 - w_1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right).$$

Задание 1 Задача 2 Бронников Андрея Александровича

24. Начальная температура стержня $0 < x < l$ является произвольной функцией $f(x)$. Температуры концов постоянны:

$$u(0, t) = U_1 = \text{const}, \quad u(l, t) = U_2 = \text{const}, \quad 0 < t < +\infty.$$

На боковой поверхности происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой равна $u_0 = \text{const}$. Найти температуру стержня. Рассмотреть, в частности, случай, когда $U_1 = U_2 = 0$, $f(x) = 0$.

Задание 1 Задача 2 Бронников Андрея Александровича

Задание 1 решение 2

24. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} - h(u - u_0), \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad h = \frac{\alpha p}{c\rho\sigma},$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0, t) = U_1, \quad u(l, t) = U_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x, t) = u_0 + w(x) + v(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

где

$$w(x) = \frac{(U_1 - u_0)\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}(l - x) + (U_2 - u_0)\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}x}{\operatorname{sh}\frac{l\sqrt{h}}{a}}, \quad 0 < x < l, \tag{5}$$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \exp\left\{-\left(\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2} + h\right)t\right\} \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{6}$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l [f(\xi) - w(\xi) - u_0] \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi. \tag{7}$$

Задание 1 Задача 2 Бронников Андрея Александровича

Задание 2 решение 2

В частности, если $U_1 = U_2 = 0$ и $f(x) \equiv 0$, то

$$w(x) = -u_0 \frac{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{h}}{a}(l - x) + \operatorname{sh} \frac{\sqrt{h}}{a} x}{\operatorname{sh} \frac{l\sqrt{h}}{a}}, \quad 0 < x < l, \qquad (5')$$

$$v(x, t) = -\frac{4hl^2 u_0}{\pi a^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}}{(2k-1)[(2k-1)^2\pi^2 a^2 + hl^2]} \times$$

$$\times \exp\left\{-\left[\frac{(2k-1)^2\pi^2 a^2}{l^2} + h\right] t\right\}. \qquad (6')$$

Задание 1 Задача 2 Бронников Андрея Александровича

1.1.3. Уравнение вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw + \Phi(x,t)$

Однородное уравнение этого вида описывает одномерный нестационарный массоперенос в неподвижной среде с объемной химической реакцией первого порядка ($b < 0$ соответствует поглощению вещества, а $b > 0$ — выделению вещества). Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих одномерных тепловых процессов, когда в среде происходит объемное тепловыделение ($b > 0$), пропорциональное температуре. Кроме того, это уравнение описывает теплоперенос в одномерном стержне, боковая поверхность которого обменивается теплом с окружающей средой постоянной температуры ($b > 0$ соответствует случаю, когда температура среды выше температуры стержня, а $b < 0$ — ниже).

$$\sigma\, c\rho\, u_t = \sigma\,\lambda u_{xx} - \alpha p\,(u - u_0)$$

$$u_t = a^2 u_{xx} - h(u - u_0), \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad h = \frac{\alpha p}{c\rho\sigma},$$

$$u_t = a^2 u_{xx} + (-h)u + h\, u_0$$

Задание 1 Задача 2 Бронников Андрея Александровича

1.1.3-7. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
w(x,t) = \int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau + \\
+ a \int_0^t g_1(\tau) H_1(x,t-\tau)\, d\tau - a \int_0^t g_2(\tau) H_2(x,t-\tau)\, d\tau,
$$

где

$$
G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} e^{bt} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right),
$$

$$
H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi} G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}, \quad H_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi} G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=l}.
$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 55).

Задание 1 Задача 3 Глухов Никита Андреевич

25. Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью и теплоизолированными концами, если его начальная температура является произвольной функцией x. Перейти затем к случаю, когда на боковой поверхности происходит конвективный теплообмен (по закону Ньютона) со средой, температура которой равна нулю.

Задание 1 решение 3 Глухов Никита Андреевич

25. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1)$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \qquad (3)$$

является

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp\left\{-\frac{\pi^2 a^2 n^2}{l^2} t\right\} \cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (4)$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(z) \cos\frac{n\pi z}{l}\, dz, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (5)$$

Чтобы получить температуру в случае теплообмена на боковой поверхности, нужно умножить правую часть (4) на e^{-ht}, где h имеет тот же смысл, что и в предыдущей задаче.

Задание 1 решение 3 Глухов Никита Андреевич

1.1.2-6. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(x,t) = \int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau \,-\\
- a\int_0^t g_1(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Две формы представления для функции Грина:

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi,t) &= \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr) =\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \biggl\{\exp\biggl[-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4at}\biggr] + \exp\biggl[-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4at}\biggr]\biggr\}.
\end{aligned}
$$

Первый ряд сходится быстро при больших t, а второй — при малых t.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 65, 329), А. Г. Бутковский (1979, стр. 55).

Задание 1 Задача 4 Горбунов Иван Кириллович

26. Найти температуру стержня, на боковой поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры, если на концы стержня подаются извне постоянные тепловые потоки, а начальная температура является произвольной функцией.

Задание 1 решение 4 Горбунов Иван Кириллович

26. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$-\lambda\sigma u_x(0, t) = q_1, \quad \lambda\sigma u_x(l, t) = q_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x, t) = w(x) + v(x, t), \tag{4}$$

где

$$w(x) = \frac{a}{\sqrt{h}} Q_1 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{h}}{a} x + \frac{Q_2 - Q_1 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{h}}{a} l}{\frac{\sqrt{h}}{a} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{h}}{a} l} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{h}}{a} x, \quad 0 < x < l, \tag{5}$$

$$Q_1 = -\frac{q_1}{\lambda\sigma}, \quad Q_2 = \frac{q_2}{\lambda\sigma}, \tag{6}$$

$$v(x, t) = \frac{a_0}{2} e^{-ht} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp\left\{-\left(\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} + h\right)t\right\} \cos \frac{n\pi x}{l},$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{7}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l [f(z) - w(z)] \cos \frac{n\pi z}{l}\, dz, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

Указание. См. решение задачи 23.

Задание 1 Задача 5 Ковзик Никита Сергеевич

27. Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если один его конец ($x = 0$) поддерживается при заданной фиксированной температуре, а на другой конец ($x = l$) подается извне заданный постоянный тепловой поток, причем начальная температура произвольна. Рассмотреть, в частности, случай, когда начальная температура равна нулю, а конец $x = l$ теплоизолирован, и оценить погрешность, допускаемую при замене суммы ряда, представляющего решение в точке $x = l$, его частичной суммой. Найти момент времени, с которого на конце $x = l$ заведомо наступит регулярный режим [1]) с относительной точностью ε.

Задание 1 Задача 5 Ковзик Никита Сергеевич

27. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0, t) = U_0, \quad \lambda\sigma u_x(l, t) = q_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x, t) = Q_0 x + U_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ a_n - \frac{4}{\pi^2} \frac{(2n+1)\pi U_0 + (-1)^n 2lQ_0}{(2n+1)^2} \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} t \right\} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \tag{4}$$

где

$$Q_0 = \frac{q_0}{\lambda\sigma}, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l} \, dz, \tag{5}$$

а σ — площадь поперечного сечения стержня.

Задание 1 Задача 5 Ковзик Никита Сергеевич

Если $Q_0 = 0$, $f(x) \equiv 0$, то

$$u(x, t) = U_0 - \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \exp\left\{-\frac{(2k_1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t\right\} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty. \quad (6)$$

В точке $x = l$ имеем

$$u(l, t) = U_0 - \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\left\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t\right\}, \quad 0 < t < +\infty. \quad (7)$$

По теореме Лейбница о знакопеременных рядах получаем оценку для остатка ряда (7)

$$|R_n(l, t)| = \left|\frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\left\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4U_0}{\pi(2n+3)} \exp\left\{-\frac{(2n+3)^2\pi^2a^2}{4l^2}t\right\}, \quad 0 < t < +\infty. \quad (8)$$

Оценим, наконец, отношение $R_0(l, t)$ к $\frac{4U_0}{\pi}\exp\left\{-\frac{\pi^2a^2}{4l^2}t\right\}$. В силу (8)

$$\frac{|R_0(l, t)|}{\frac{4U_0}{\pi}\exp\left\{-\frac{\pi^2a^2}{4l^2}t\right\}} \leqslant \frac{1}{3}\exp\left\{-\frac{2\pi^2a^2}{l^2}t\right\} \leqslant \varepsilon$$

$$\text{при} \quad t \geqslant t^* = -\frac{l^2}{2\pi^2a^2}\ln 3\varepsilon. \quad (9)$$

Замечание. Нетрудно получить равномерную оценку для остатка $R_n(x, t)$ ряда на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ способом, указанным в замечании к ответу задачи 22 настоящего параграфа.

Задание 1 Задача 6 Комахин Евгений Олегович

28. Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью и теплоизолированным концом $x = 0$, если начальная температура стержня равна нулю и через конец $x = l$ в стержень подается постоянный тепловой поток. Дать оценку погрешности, допускаемой при замене суммы ряда, представляющего решение в точке $x = 0$, его частичной суммой.

Задание 1 решение 6

Комахин Евгений Олегович

28. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = \frac{q}{\lambda\sigma} = Q, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

где λ — коэффициент теплопроводности, σ — площадь поперечного сечения,

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

Задание 1 решение 6 Комахин Евгений Олегович

является

$$u(x,t) = Q\left[\frac{a^2t}{l} + \frac{3x^2 - l^2}{6l} + \frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{\exp\left\{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t\right\}}{k^2}\cos\frac{k\pi x}{l}\right]. \tag{4}$$

В точке $x = 0$ имеем

$$u(0,t) = Q\left[\frac{a^2t}{l} - \frac{l}{6l} + \frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\exp\left\{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t\right\}\right], \quad 0 < t < +\infty. \tag{5}$$

По признаку Лейбница для остатка ряда получаем оценку

$$|R_n(0,t)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2Ql}{\pi^2}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\exp\left\{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2Ql}{\pi^2(n+1)^2}\exp\left\{-\frac{(n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t\right\}, \quad 0 < t < +\infty. \tag{6}$$

Указание. Чтобы получить (4), можно свести краевую задачу (1), (2), (3) к первой краевой задаче путем замены $v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, решить краевую задачу для v, а затем проинтегрировать v по x; при этом появится произвольная слагаемая функция времени. Вычисляя количество тепла в стержне двумя способами (см. указание к ответу задачи настоящей главы), можно определить эту функцию.

Замечание. По поводу равномерной оценки остатка $R_n(x,t)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ см. замечание к ответу предыдущей задачи.

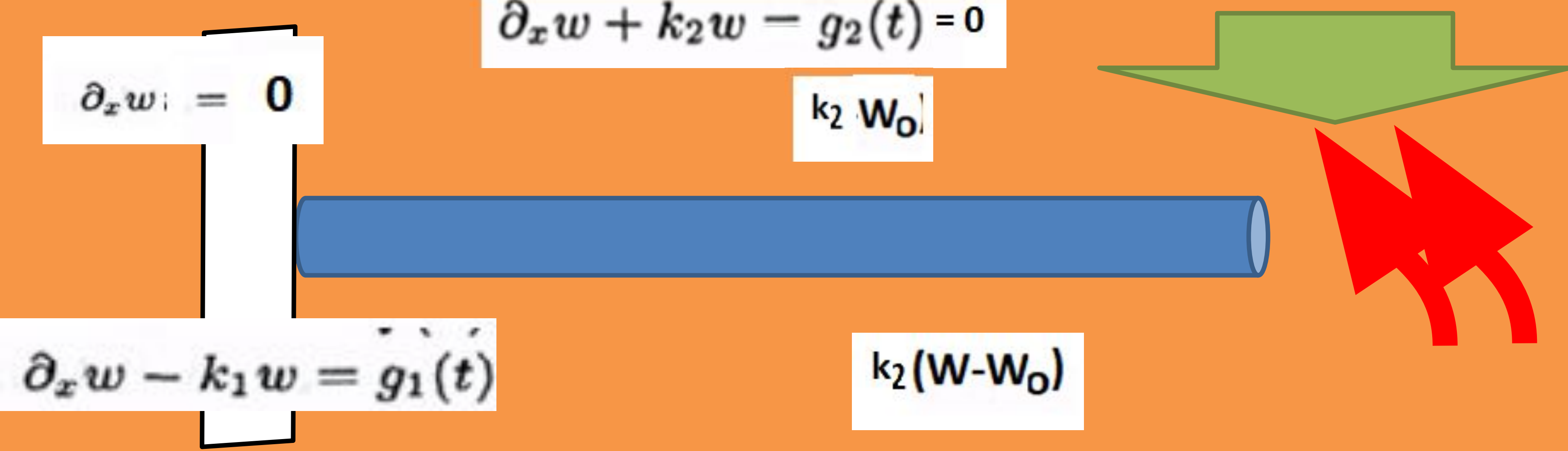
Задание 1 Задача 7 Куриленко Никиту Владимировича

Гл. III. Уравнения параболического типа 49

29. Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, один конец которого $(x = 0)$ теплоизолирован, а на другом конце $(x = l)$ происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна $U_0 = \text{const}$. Начальная температура стержня равна нулю. Оценить погрешность, допускаемую при замене суммы ряда, представляющего решение в точке $x = 0$, его частичной суммой; найти момент времени, с которого на конце $x = 0$ заведомо будет иметь место регулярный режим [1]) с относительной точностью ε.

$$\partial_x w + k_2 w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие).}$$

$$\partial_x w + k_2 w - g_2(t) = 0$$



Задание 1 решение 7 Куриленко Никиту Владимировича

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu l)}{} = \frac{+k_2 \; \mathbf{L}}{\mu \; \mathbf{L}}$$

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = \frac{k_1 + k_2}{\mu^2 - k_1 k_2}.$$

29.

$$u(x,t) = U_0\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2hl\sqrt{(hl)^2+\mu_n^2}}{\mu_n[(hl)^2+(hl)+\mu_n^2]}\exp\left\{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{l^2}\right\}\cos\frac{\mu_n x}{l}\right], \tag{1}$$

где h — коэффициент теплообмена, входящий в граничное условие $u_x(l,t) + h[u(l,t) - U_0] = 0$, а μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{1}{hl}\mu, \qquad \frac{\operatorname{tg}(\mu l)}{} = \frac{+k_2}{\mu} \tag{2}$$

образующие последовательность, монотонно стремящуюся к $+\infty$.

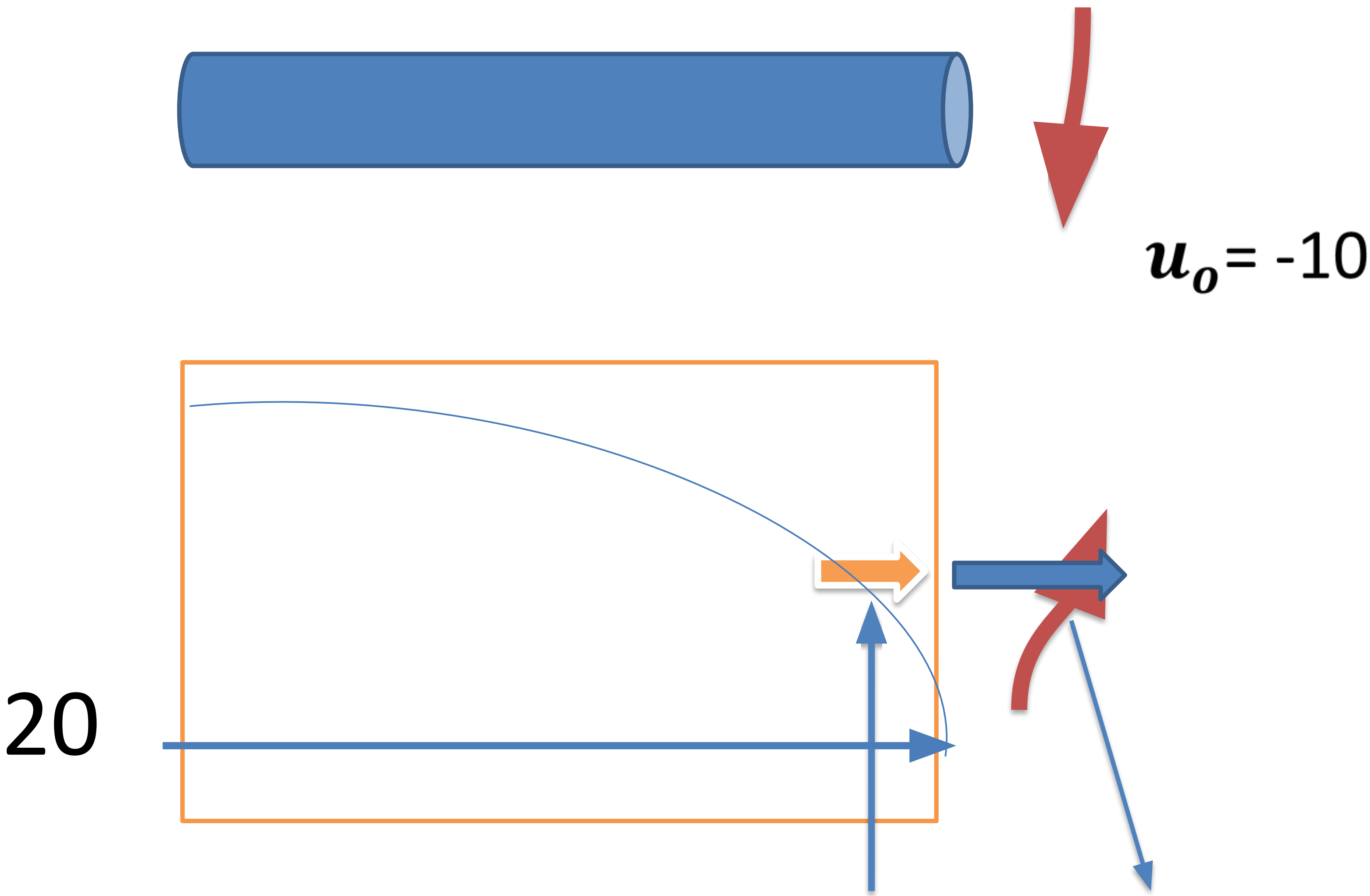
В точке $x = 0$ имеем

$$u(0, t) = U_0\left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{2hl\sqrt{(hl)^2+\mu_k^2}}{\mu_k[(hl)^2+(hl)+\mu_k^2]}\exp\left\{-\frac{\mu_k^2 a^2}{l^2}t\right\}\right]. \tag{2}$$

Нетрудно проверить, что ряд (3) удовлетворяет условиям теоремы Лейбница о знакопеременных рядах; поэтому для остатка ряда (3) получаем оценку

Куриленко Никиту Владимировича

Задание 1 Задача 7



$$-\lambda \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \alpha(u - u_o)$$

Задание 1 решение 7 Куриленко Никиту Владимировича

$$|R_n(0,\,t)| = \left| U_0 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2hl\sqrt{(hl)^2+\mu_k^2}}{\mu_k[(hl)^2+(hl)+\mu_k^2]} \exp\left\{-\frac{\mu_k^2 a^2}{l^2}t\right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2U_0 hl\sqrt{(hl)^2+\mu_{n+1}^2}}{\mu_{n+1}[(hl)^2+(hl)+\mu_{n+1}^2]} \exp\left\{-\frac{\mu_{n+1}^2 a^2}{l^2}t\right\}. \quad (4)$$

В силу (4) имеем

$$\frac{|R_1(0,\,t)|}{\dfrac{2U_0 hl\sqrt{(hl)^2+\mu_1^2}}{\mu_1(hl)^2+(hl)+\mu_1^2]} \exp\left\{-\dfrac{\mu_1^2 a^2}{l^2}t\right\}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(hl)^2+hl+\mu_1^2}{(hl)^2+hl+\mu_2^2} \sqrt{\frac{1+\left(\dfrac{hl}{\mu_2}\right)^2}{1+\left(\dfrac{hl}{\mu_1}\right)^2}} \exp\left\{-\frac{(\mu_2^2-\mu_1^2)a^2}{l^2}t\right\} \leqslant \varepsilon \quad (5)$$

при

$$t \geqslant t^* = -\frac{l^2}{(\mu_2^2-\mu_1^2)a^2} \ln\left[\varepsilon \frac{(hl)^2+hl+\mu_2^2}{(hl)^2+hl+\mu_1^2} \sqrt{\frac{1+\left(\dfrac{hl}{\mu_1}\right)^2}{1+\left(\dfrac{hl}{\mu_2}\right)^2}}\right].$$

Замечание. Равномерная оценка остатка ряда $R_n(x,\,t)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ может быть выполнена аналогично тому, как это было сделано в замечании на с. 286.

Задание 1 решение 7 Куриленко Никита Владимирович

Замечание. Равномерная оценка остатка ряда $R_n(x, t)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ может быть выполнена аналогично тому, как это было сделано в замечании на с. 286.

Учитывая, что для корней $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \mu_{n+1} < \ldots$ трансцендентного уравнения (2) будет иметь место неравенство

$$\frac{\pi}{2} < \mu_{n+1} - \mu_n < \pi,$$

получим

$$|R_n(x, t)| \leqslant 2U_0 hl \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(hl)^2 + \mu_k^2}\, \exp\left\{-\frac{\mu_k^2 a^2}{l^2} t\right\}}{\mu_k[(hl)^2 + (hl) + \mu_k^2]} <$$

$$< \frac{4U_0 hl}{\pi} \int_{\mu_n}^{+\infty} \left[\left(\frac{hl}{\mu}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \frac{\exp\left\{-\frac{\mu^2 a^2 t}{l^2}\right\}}{(hl)^2 + hl + \mu^2}\, d\mu <$$

$$< \frac{4U_0 hl}{\pi} \left[\left(\frac{hl}{\mu_n}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \int_{\mu_n}^{+\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{\mu^2 a^2 t}{l^2}\right\}}{\mu^2}\, d\mu <$$

$$< \frac{2U_0 a h\sqrt{t}}{\pi} \left[\left(\frac{hl}{\mu_n}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \frac{e^{-A_n^2}}{A_n^3},$$

где

$$A_n = \frac{\mu_n a \sqrt{t}}{l}.$$

Задание 1 решение 7 Куриленко Никиту Владимировича

1.1.1-11. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$).

Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(x) &&\text{при} \quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w - k_1 w &= g_1(t) &&\text{при} \quad x = 0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w + k_2 w &= g_2(t) &&\text{при} \quad x = l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi - a \int_0^t g_1(\tau) G(x,0,t-\tau)\, d\tau + a \int_0^t g_2(\tau) G(x,l,t-\tau)\, d\tau.$$

Здесь

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) y_n(\xi) \exp(-a\mu_n^2 t),$$

где

$$y_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{k_1}{\mu_n}\sin(\mu_n x), \quad \|y_n\|^2 = \frac{k_2}{2\mu_n^2}\frac{\mu_n^2 + k_1^2}{\mu_n^2 + k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{l}{2}\left(1 + \frac{k_1^2}{\mu_n^2}\right);$$

μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = \dfrac{k_1 + k_2}{\mu^2 - k_1 k_2}$.

Задание 1 Задача 8 Маслов Кирилл Сергеевич

30. а) Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на каждом из его концов происходит конвективный теплообмен с внешней средой, имеющей постоянную температуру, а начальная температура произвольна.

б) Рассмотреть, в частности, случай, когда температура внешней среды на обоих концах одинакова, а начальная температура стержня равна нулю, и установить связь с решением задачи 29.

Задание 1 решение 8 Маслов Кирилл Сергеевич

30. а) Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0, t) - H[u(0, t) - U_1] = 0,$$

$$u_x(l, t) + H[u(l, t) - U_2] = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x, t) = w(x) + v(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

где

$$w(x) = H\frac{U_2 - U_1}{2 + lH}x + \frac{U_2 + (1 + lH)U_1}{2 + lH}, \quad 0 < x < l, \tag{5}$$

и

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\left(\cos\lambda_n x + \frac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n x\right),$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{6}$$

$\lambda_n = \dfrac{z_n}{l}$, z_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{lH} - \frac{lH}{z}\right). \tag{7}$$

Собственные функции [1])

$$X_n(x) = \cos\lambda_n x + \frac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{8}$$

ортогональны на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$; квадрат нормы собственной функции $X_n(x)$ равен

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\,dx = \frac{(\lambda_n^2 + H^2)l + 2H}{2\lambda_n^2}, \tag{9}$$

$$a_n = \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 + H^2)l + 2H}\int_0^l [f(z) - w(z)]\left(\cos\lambda_n z + \frac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n z\right)dz. \tag{10}$$

Задание 1 решение 8 Маслов Кирилл Сергеевич

1.1.1-11. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$).

Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\
\partial_x w - k_1 w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},\\
\partial_x w + k_2 w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
w(x,t) = \int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi - a\int_0^t g_1(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau.
$$

Здесь

$$
G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x)y_n(\xi)\exp(-a\mu_n^2 t),
$$

где

$$
y_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{k_1}{\mu_n}\sin(\mu_n x), \qquad \|y_n\|^2 = \frac{k_2}{2\mu_n^2}\,\frac{\mu_n^2 + k_1^2}{\mu_n^2 + k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{l}{2}\Bigl(1 + \frac{k_1^2}{\mu_n^2}\Bigr);
$$

μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = \dfrac{k_1 + k_2}{\mu^2 - k_1 k_2}$.

Задание 1 решение 8 Маслов Кирилл Сергеевич

30

б) Если температура среды на обоих концах одинакова, а начальная температура стержня равна нулю, то, принимая середину стержня за начало координат, мы получим, что температура в стержне является четной функцией x, т. е. при $x = 0$ будет $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$. Таким образом, можно рассматривать вместо всего стержня лишь его половину, причем для определения температуры получится краевая задача 29 (при этом l нужно заменить на $\dfrac{l}{2}$).

---

[1]) Подробнее см. решение задачи 111 гл. II; рассматриваемые там собственные функции получаются умножением собственных функций (8) на $\dfrac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n^2 + h^2}}$, поэтому, зная квадрат нормы собственных функций, рассматриваемых в задаче 111 гл. II, нетрудно получить квадрат нормы собственных функций (8).

Задание 1 Задача 9 Нехитров Анатолий Сергеевич

31. Решить задачу 30, а), предполагая, что на боковой поверхности стержня происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю.

Задание 1 решение 9 Нехитров Анатолий Сергеевич

31. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0, t) - H[u(0, t) - U_1] = 0, \quad u_x(l, t) + H[u(l, t) - U_2] = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x, t) = w(x) + v(x, t) \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

где

$$w(x) = H\frac{\left[U_2\frac{\sqrt{h}}{a} - U_1\left(H\,\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{h}}{a}l - \frac{\sqrt{h}}{a}\,\mathrm{ch}\,\frac{\sqrt{h}}{a}l\right)\right]\mathrm{ch}\,\frac{\sqrt{h}}{a}x}{\left(H^2 + \frac{h}{a^2}\right)\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{h}}{a}l} + {}$$

$$+ H\frac{\left[U_1\left(H\,\mathrm{ch}\,\frac{\sqrt{h}}{a}l + \frac{\sqrt{h}}{a}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{h}}{a}l\right) + U_2 H\right]\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{h}}{a}x}{\left(H^2 + \frac{h}{a^2}\right)\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{h}}{a}l}, \tag{5}$$

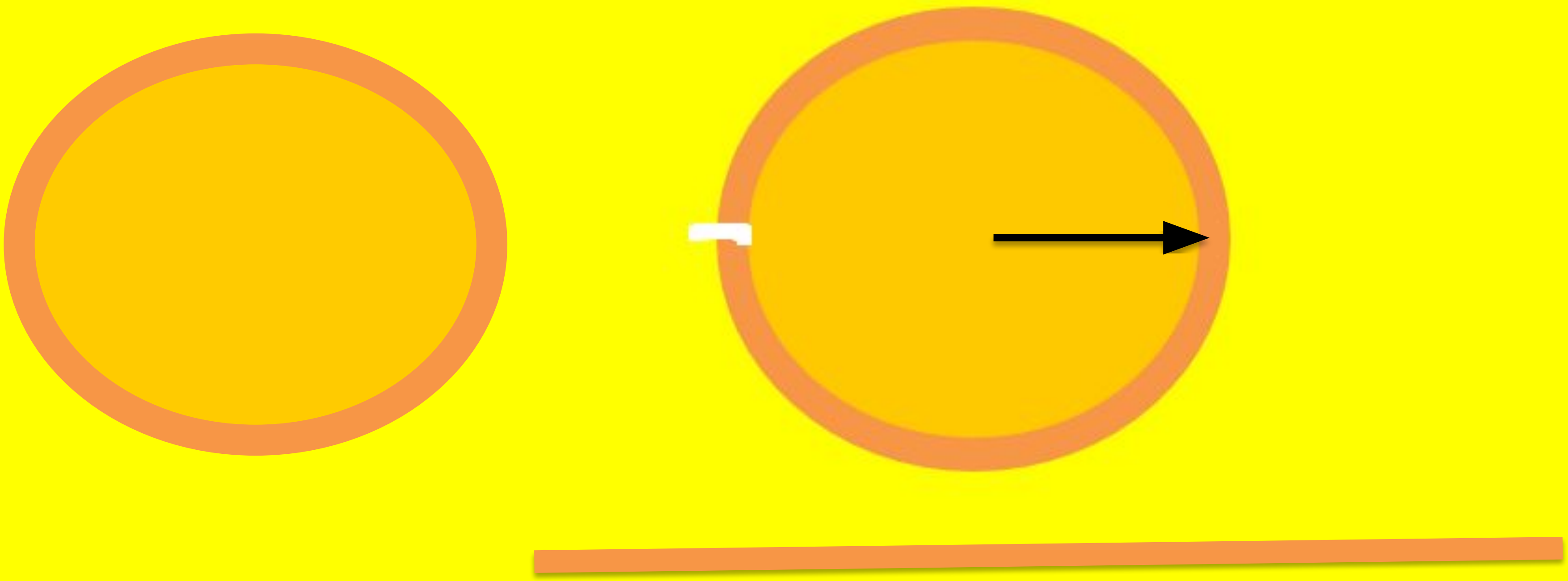
$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-(a^2\lambda_n^2 + h)t}\left(\cos\lambda_n x + \frac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n x\right), \tag{6}$$

λ_n, $X_n(x) = \cos\lambda_n x + \frac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n x$ и a_n определяются так же, как в ответе предыдущей задачи.

Задание 1 решение 9 Нехитров Анатолий Сергеевич

Задание 1 Задача 10   Светлов Сергей Александрович

32. Найти распределение температуры в тонком однородном кольце единичного радиуса, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, имеющей постоянную температуру; начальная температура кольца произвольна[2]). Рассмотреть, в частности, случай, когда в начальный момент времени кольцо было равномерно нагретым.



Задание 1 решение 10 Светлов Сергей Александрович

32. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} - h[u - u_0], \quad -\pi < x < \pi, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\pi < x < \pi, \tag{2}$$

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t), \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

является

$$u(x, t) = u_0 + e^{-ht} v(x, t), \tag{4}$$

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) e^{-n^2 a^2 t}, \tag{5}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - u_0]\, dx, \tag{6}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - u_0] \cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - u_0] \sin nx\, dx. \tag{7}$$

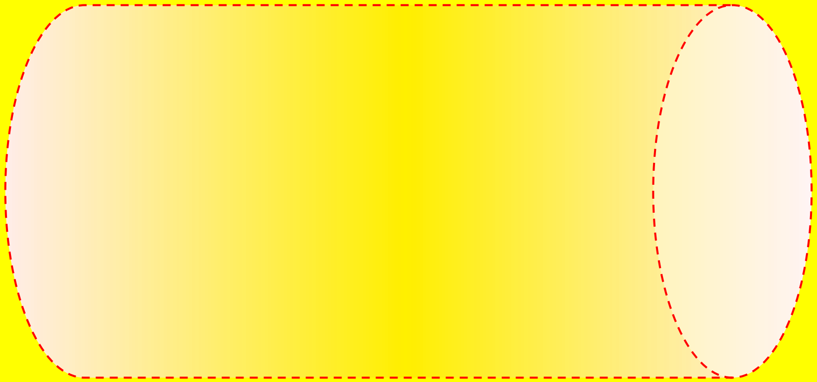
Если начальная температура кольца $f(x) \equiv u_1 = \text{const}$, то

$$u(x, t) = u_0 + e^{-ht}[u_1 - u_0].$$

32

б) Задачи теплопроводности с переменными граничными условиями и свободными членами, зависящими от x и t.

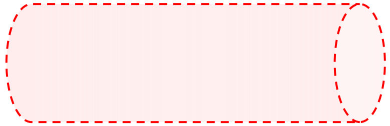
Задание 1 решение 10 Светлов Сергей Александрович



$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} = a\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}^2} + \mathrm{b}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{cT} + \Phi(\mathrm{y},\mathrm{t}),\ 0 \ll \mathrm{y} \ll \mathrm{L},$$

$$0 < t < \infty\ , \qquad (1.80)$$

Задание 1 решение 10 Светлов Сергей Александрович



$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} = a\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}^2} - \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\alpha P}{\sigma\rho C_{\mathrm{p}}}(\mathrm{T} - \mathrm{T_o}) + \frac{\varphi(\mathrm{y})}{\sigma\rho \mathrm{C_p}},$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} = a\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}^2} + \mathrm{b}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{cT} - \mathrm{cT_o},\ 0 \ll \mathrm{y} \ll \mathrm{L},\ 0 < t < \infty \ ,$$

(1.80)

$$u_t = a^2 u_{xx} - h[u - u_0],$$

2. На боковой поверхности стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой является заданной функцией времени. Пренебрегая деформацией изотермических поверхностей, поставить краевую задачу об определении температуры в стержне при начальных и граничных условиях предыдущей задачи.

3. Поставить краевую задачу об остывании тонкого кольца, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой, имеющую заданную температуру. Неравномерностью распределения температуры по толщине кольца пренебречь.

4. Поставить краевую задачу о нагревании полуограниченного стержня, если конец стержня горит, причем фронт горения распространяется с постоянной скоростью v_0 и имеет известную температуру $\varphi(t)$.

5. Вывести уравнение для температуры тонкой проволоки, нагреваемой постоянным электрическим током, если на ее поверхности происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающим воздухом, имеющим известную температуру. Поставить краевую задачу об определении температуры в этом проводе, если его концы зажаты в массивные клеммы с заданной теплоемкостью и очень большой теплопроводностью.

6. Вывести уравнение диффузии в неподвижной среде, предполагая, что поверхностями равной концентрации в каждый момент времени t являются плоскости, перпендикулярные к оси x. Написать граничные условия, предполагая, что диффузия происходит в плоском слое $0 \leqslant x \leqslant l$; рассмотреть случаи, когда:

2. Уравнение теплопроводности в данном случае имеет вид

$$u_t = \frac{\lambda}{c\rho}\,u_{xx} - \frac{\alpha p}{c\rho\sigma}\,(u - u_0),$$

где p — периметр поперечного сечения стержня, α — коэффициент теплообмена между поверхностью стержня и окружающей средой, температура которой равна u_0; остальные величины имеют те же значения, что и в предыдущей задаче; начальные и граничные условия записываются так же, как и в предыдущей задаче.

Указание. Рассматривая элемент $(x,\, x+\Delta x)$ стержня, учесть в тепловом балансе не только потоки тепла через торцы элемента, но и потоки тепла через его боковую поверхность.

Задание 1 Задача 11   Шаров Максим Александрович

33. Найти распределение температуры в стержне $0 < x < l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его конце $x = 0$ поддерживается температура, равная нулю, а на конце $x = l$ температура меняется по закону

$$u(l, t) = At, \quad A = \text{const}, \quad 0 < t < +\infty.$$

Начальная температура стержня равна нулю.

Задание 1 решение 11 Шаров Максим Александрович

33. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = At, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x, t) = \frac{A}{l} xt + \frac{Ax}{6a^2 l}(x^2 - l^2) + v(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} t\right\} \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{5}$$

где

$$a_n = -\frac{A}{3a^2 l^2} \int_0^l z(z^2 - l^2) \sin\frac{n\pi z}{l}\, dz. \tag{6}$$

Задание 1 Задача 12 Яловой Тихон Владиленович

34. Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если по стержню непрерывно распределены тепловые источники, плотность которых равна $\Phi(t)\sin(\pi x/l)$, начальная температура стержня является произвольной функцией $f(x)$, а температура концов поддерживается равной нулю.

Задание 1 решение 12 Яловой Тихон Владиленович

34. $$u(x,t)=\left\{\int_0^t \Phi(\tau)\exp\left\{-\frac{\pi^2a^2}{l^2}(t-\tau)\right\}d\tau\right\}\sin\frac{\pi x}{l}+$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t\right\}\sin\frac{n\pi x}{l},\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \qquad \mathbf{(1)}$$

где

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(z)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz. \qquad (2)$$

Указание. Частное решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (см. условие задачи), можно искать в виде

$$w(x,t)=\varphi(t)\sin\frac{\pi x}{l}, \qquad (3)$$

где $\varphi(t)$ — функция, подлежащая определению.

Задание 1 Задача 13

СТР 295

35. а) Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура является произвольной функцией $f(x)$, температура концов поддерживается равной нулю, по стержню непрерывно распределены источники тепла, плотность которых равна $F(x, t)$.

---

[1]) См. задачу 22 и сноску к задаче 27.
[2]) См. задачу 3.

35

б) Рассмотреть, в частности, предельный случай, когда в стержне действует лишь один сосредоточенный источник постоянной мощности Q, находящийся в точке x_0, $0 < x_0 < l$, а начальная температура стержня равна нулю.

Задание 1 решение 13

35. а) Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

где $f(x, t) = \dfrac{F(x, t)}{c\rho}$, является

$$u(x, t) = \int_0^l \varphi(\xi)\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right\}d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_0^l f(\xi, \tau)\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}(t-\tau)\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right\}d\xi.$$

Задание 1 решение 13

35 б) Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q}{c\rho}\delta(x - x_0), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x, t) = \frac{2Ql}{c\rho\pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} t\right\}\right) \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi x_0}{l}. \tag{4}$$

Задание 1 Задача 14

36. По стержню $0 \leqslant x \leqslant l$, на боковой поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой (температура среды равна нулю), движется печь с постоянной скоростью v_0. Поток тепла от печи к стержню равен $q(t) = Ae^{-ht}$, где h — коэффициент теплообмена, входящий в уравнение теплопроводности для стержня $u_t = a^2 u_{xx} - hu$. Найти температуру стержня, если его начальная температура равна нулю и температура концов все время поддерживается равной нулю.

Задание 1 решение 14

36. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu + \frac{A}{c\rho\sigma} e^{-ht}\delta(x - v_0 t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \frac{l}{v_0},$$

$$u(0,\, t) = u(l,\, t) = 0, \quad 0 < t < \frac{l}{v_0},$$

$$u(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < l,$$

является

$$u(x,\, t) = \frac{2A}{c\rho\sigma l} e^{-ht} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{v_0^2 + \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}} \left(\sin \frac{n\pi v_0 t}{l} - \frac{v_0 l}{n\pi} \cos \frac{n\pi v_0 t}{l} + \frac{v_0 l}{n\pi} \right).$$

Задание 1 решение 14

37. Решить задачу 35, а) для стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его концах происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой меняется по заданному закону.

Задание 1 Задача 15

37. Нужно решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = \psi_1(t), \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = \psi_2(t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

Если потребовать, чтобы функция

$$\psi(x, t) = (\alpha_1 x + \beta_1)\psi_1(t) + (\alpha_2 x + \beta_2)\psi_2(t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

удовлетворяла граничным условиям (2) краевой задачи (1), (2), (3), то коэффициенты α_1, β_1, α_2, β_2 определяются однозначно:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2 + hl}, \quad \beta_1 = \frac{1 + hl}{(2 + hl)h}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2 + hl}, \quad \beta_2 = \frac{1}{h(2 + hl)}. \tag{5}$$

Решение краевой задачи (1), (2), (3) можно искать в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + \psi(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{6}$$

где $v(x, t)$ — новая искомая функция, а $\psi(x, t)$ уже определена. Для функции $v(x, t)$ получаем краевую задачу

$$v_t = a^2 v_{xx} + f^*(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{7}$$

$$v_x(0, t) - hv(0, t) = 0, \quad v_x(l, t) + hv(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{8}$$

$$v(x, 0) = \varphi^*(x), \quad 0 < x < l, \tag{9}$$

Задание 1 решение 15

где

$$f^*(x,\, t) = f(x,\, t) - (\alpha_1 x + \beta_1)\psi'(t) - (\alpha_2 x + \beta_2)\psi_2'(t), \qquad (10)$$

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) - (\alpha_1 x + \beta_1)\psi_1(0) - (\alpha_2 x + \beta_2)\psi_2(0). \qquad (11)$$

Решение краевой задачи (7), (8), (9) будем искать в виде

$$v(x,\, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t) X_n(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (12)$$

где $X_n(x)$ — собственные функции краевой задачи

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \qquad (13)$$

$$X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0^{1)}. \qquad (14)$$

Функции же $v_n(t)$ подлежат определению. Функция $v(x,\, t)$ уже удовлетворяет граничным условиям (8). Если потребовать, чтобы $v(x,\, t)$ удовлетворяла также уравнению (7) и начальному условию (9), то отсюда определятся функции $v_n(t)$. Для этого разложим в ряд по собственным функциям $X_n(x)$ правую часть уравнения (7) и $\varphi^*(x)$:

$$f^*(x,\, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Theta_n(t) X_n(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (15)$$

где

$$\Theta_n(t) = \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 + h^2)l + 2h} \int_0^l f^*(z,\, t) X_n(z)\, dz, \qquad (16)$$

и

$$\varphi^*(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n X_n(x), \quad 0 < x < l, \qquad (17)$$

где

$$a_n = \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 + h^2)l + 2h} \int_0^l \varphi^*(z) X_n(z)\, dz. \qquad (18)$$

Задание 1 решение 15

Подставляя (12) и (15) в уравнение (7) и предполагая равномерную сходимость получающихся производных рядов, получим

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[v_n'(t) + a^2\lambda_n^2 v_n(t) - \Theta_n(t)]X_n(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty. \tag{19}$$

Для выполнения равенства (19) достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$v_n'(t) + a^2\lambda_n^2 v_n(t) = \Theta_n(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{20}$$

Так мы получаем дифференциальные уравнения для определения функций $v_n(t)$.

Полагая в (12) $t = 0$ и сравнивая с (17), мы в силу (9) получим

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[v_n(0) - a_n]X_n(x) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{21}$$

---

[1]) По поводу определения собственных значений λ_n и нормы собственных функций X_n см. ответ к задаче 30.

Задание 1 решение 15

37

Для выполнения равенства (21) достаточно выполнения равенств

$$v_n(0) = a_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{22}$$

Решая дифференциальные уравнения (20) при начальных условиях (22), получим

$$v_n(t) = \int_0^t e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)}\Theta_n(\tau)d\tau + a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}. \tag{23}$$

Этим решение задачи заканчивается.

Задание 1 решение 16

38. Найти температуру $u(x, t)$ стержня, решая краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} - Hu + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = \psi_1(t), \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = \psi_2(t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

путем сведения к однородной краевой задаче.

Задание 1 решение 16

38. Решением краевой задачи (1), (2), (3) (см. условие) является

$$u(x,\, t) = v(x,\, t) + \psi(x,\, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

где $\psi(x,\, t)$ имеет то же значение, что и в ответе к предыдущей задаче, а

$$v(x,\, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l f^*(z,\, \tau) G(x,\, z,\, t-\tau)\, dz + \int_0^l \varphi^*(z) G(x,\, z,\, t)\, dz, \tag{5}$$

$$G(x,\, z,\, t-\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(a^2\lambda_n^2 + h)(t-\tau)} \frac{X_n(x) X_n(z)}{\|X_n\|^2}, \tag{6}$$

$\|X_n\|^2$ и λ_n имеют те же значения, что и в ответе к задаче 30,

$$f^*(x,\, t) = f(x,\, t) - H\psi(x,\, t) - \psi_t(x,\, t), \tag{7}$$

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) - \psi(x,\, 0). \tag{8}$$

Задание 1 решение 15

1.1.5-9. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_x w - k_1 w &= g_1(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_x w + k_2 w &= g_2(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(x,t)$ определяется по формуле из разд. 1.1.5-8, где

$$
G(x,\xi,t) = \exp\left[\frac{b(\xi - x)}{2a} + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)t\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{B_n} y_n(x) y_n(\xi) \exp(-a\mu_n^2 t),
$$

$$
y_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{2ak_1 + b}{2a\mu_n} \sin(\mu_n x),
$$

$$
B_n = \frac{2ak_2 - b}{4a\mu_n^2} \frac{4a^2\mu_n^2 + (2ak_1 + b)^2}{4a^2\mu_n^2 + (2ak_2 - b)^2} + \frac{2ak_1 + b}{4a\mu_n^2} + \frac{l}{2} + \frac{l(2ak_1 + b)^2}{8a^2\mu_n^2}.
$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
\frac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = \frac{4a^2(k_1 + k_2)}{4a^2\mu^2 - (2ak_1 + b)(2ak_2 - b)}.
$$