ВЕКТОРЫ

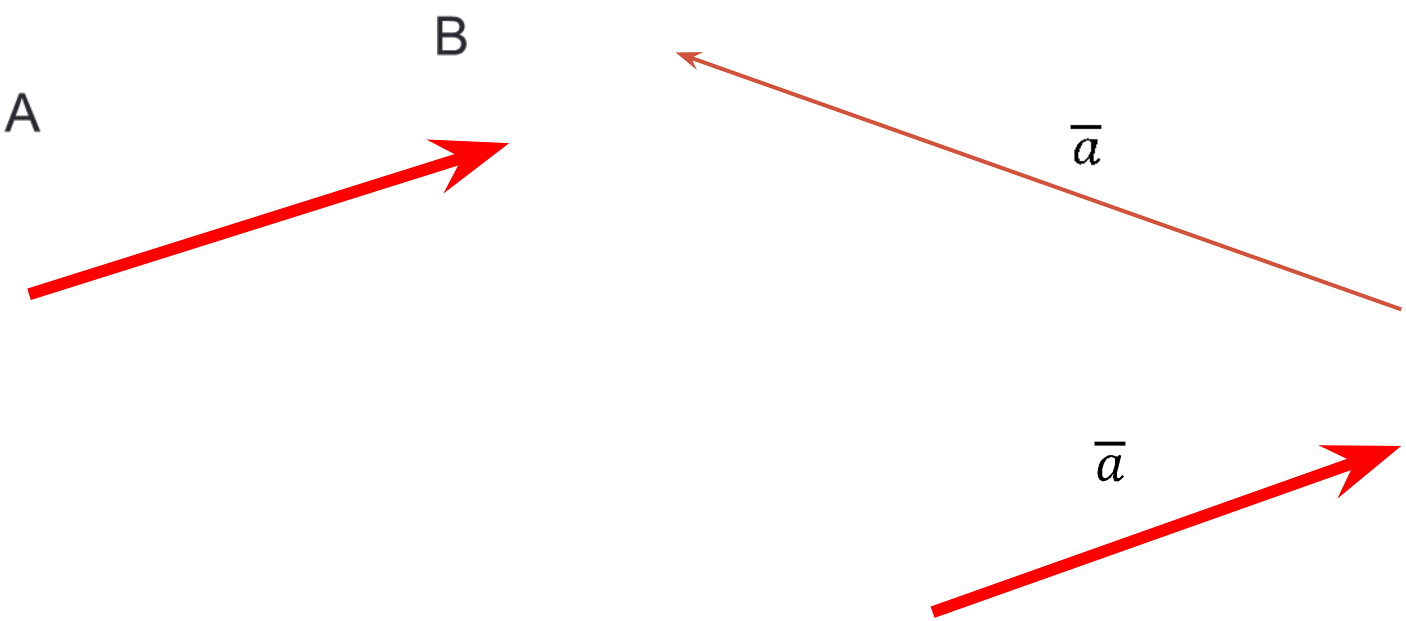
Дуйсембаевой Анар 9б класс

1)Какова разница между векторными и скалярными величинами?

Скалярные величины полностью определяются заданием своих численных величин(длина , площадь ,объем , масса и т.д),а векторные величины характеризуются не только своим числовым значением , но и направлением в пространстве(сила , скорость и т.д).

2) Что такое вектор и как его обозначают?

Любой направленный отрезок называется вектором. ($\overline{AB}$, $\overline{a}$)

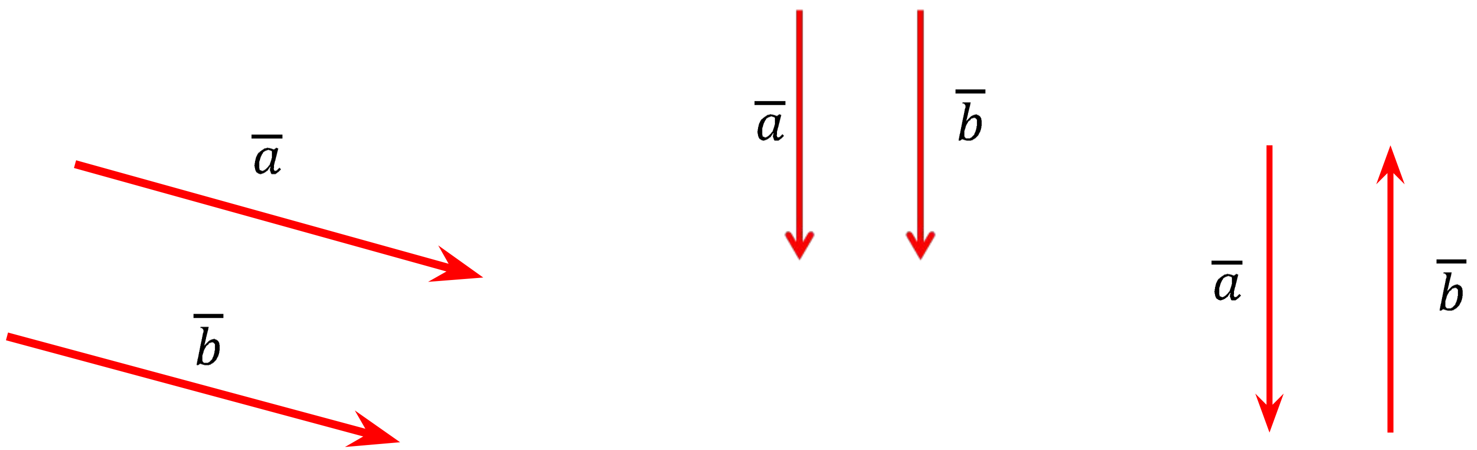


3) Какие векторы называются коллинеарными ? Приведите пример сонаправленных и противоположно направленных векторов.

Если два вектора лежат на одной прямой или на параллельных прямых , то такие векторы называются коллинеарными. Коллинеарность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ записывается так : $\overline{a} \parallel \overline{b}$

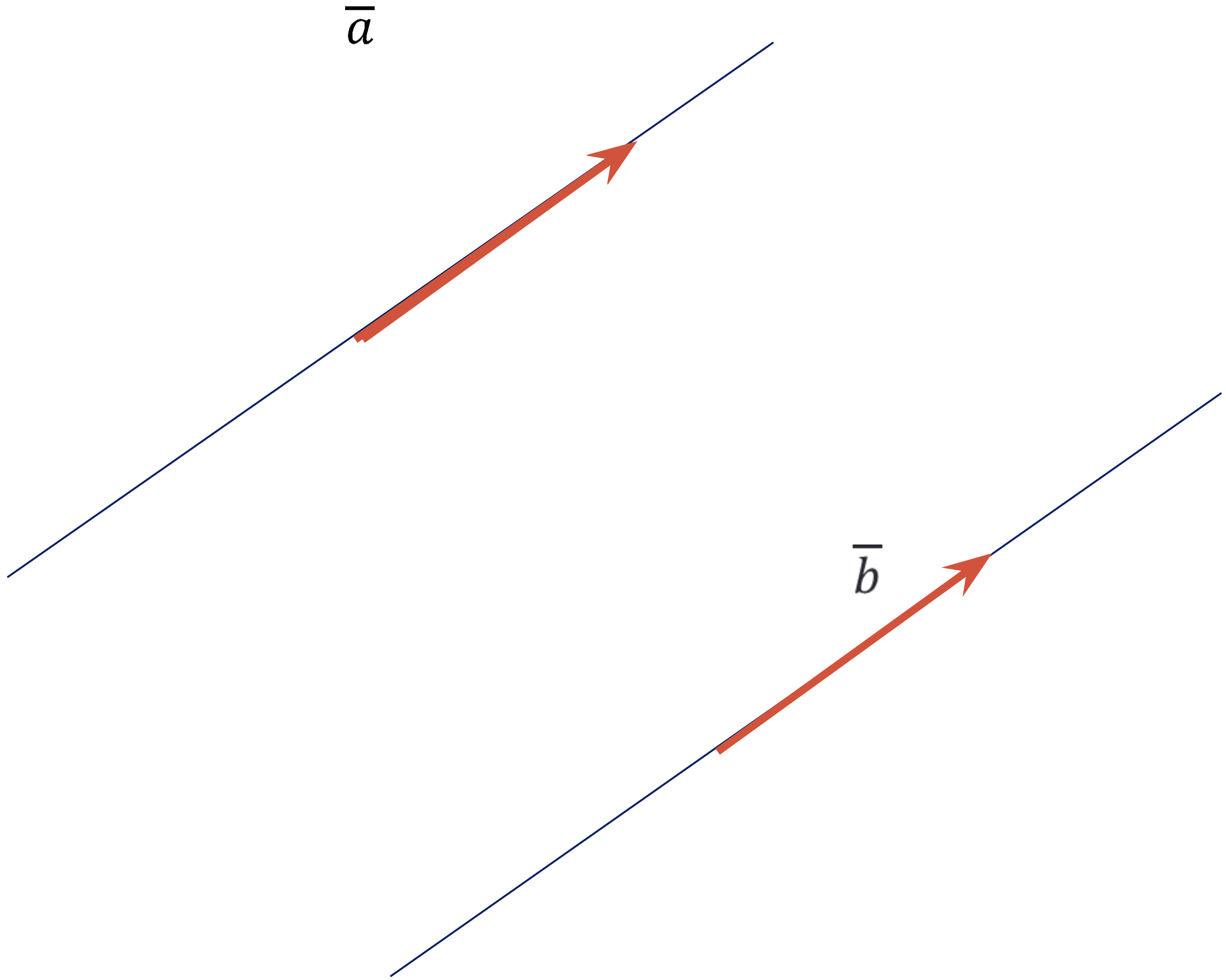
Если коллинеарные векторы имеют одинаковые направления , то их называют сонаправленными векторами . Сонаправленность векторов записывают так: $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны и имеют разные направления , то их называют противоположно направленными и записывают так: $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.



4) Какие векторы называются равными?

Векторы называются равными, если они сонаправленны и их модули равны. Другими словами, если $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ и $|\overline{a}| = |\overline{b}|$, то векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются равными т.е. $\overline{a} = \overline{b}$

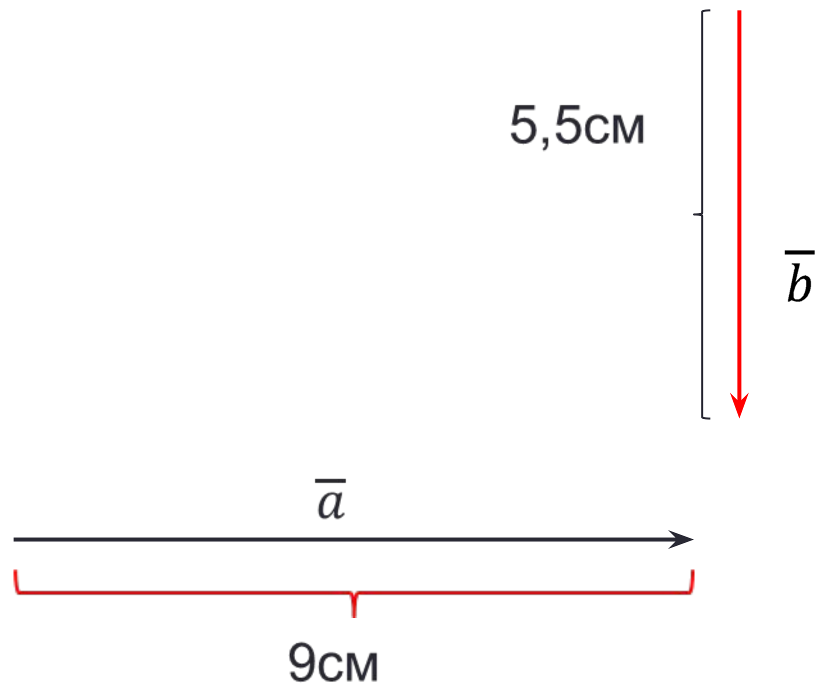


5)Какая связь между равенством векторов и параллельным переносом ?

Длина направленного отрезка определяет числовое значение вектора и называется длиной вектора или модулем вектора. Длину отрезка AB называют модулем вектора $\overline{AB}$ и обозначают так : $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$

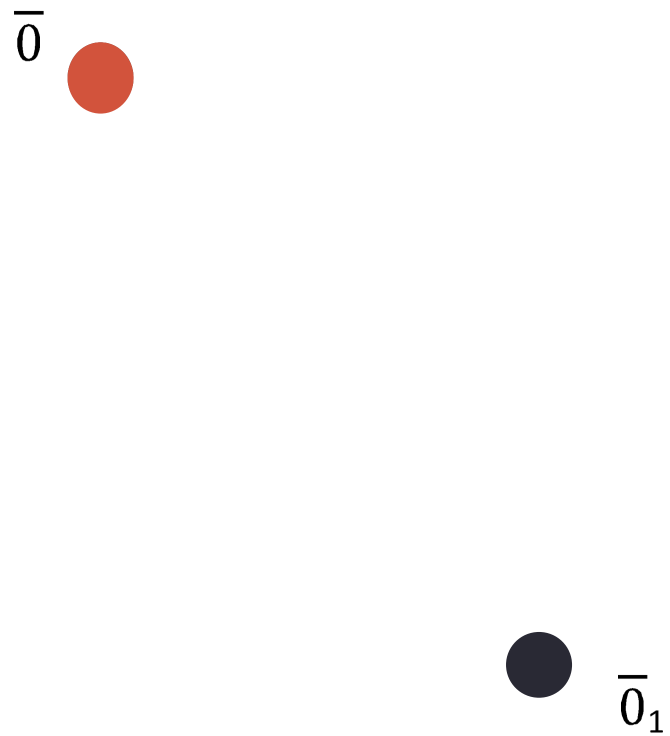
|a|=9

|b|=5,5



7)Что вы знаете о нулевом векторе?

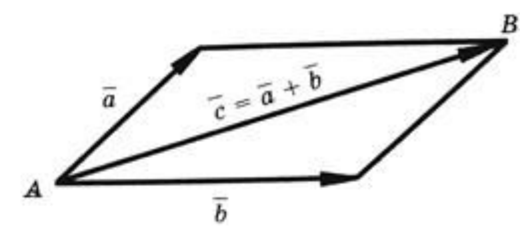
Нулевой вектор — вектор, начало которого совпадает с его концом. Нулевой вектор определяет тождественное движение пространства, при котором каждая точка пространства переходит в себя . Отсюда следует, что любую точку плоскости можно рассматривать как нулевой вектор . Нулевой вектор обозначают так: $\overline{0}$



1)Сформулируйте правило треугольника и правило параллелограмма сложения вектор.

Для сложения двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по правилу треугольника оба эти вектора переносятся параллельно самим себе так, чтобы начало одного из них совпадало с концом другого. Тогда вектор суммы задаётся третьей стороной образовавшегося треугольника, причём его начало совпадает с началом первого вектора, а конец с концом второго вектора.

Для сложения двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по правилу параллелограмма оба эти векторы переносятся параллельно самим себе так, чтобы их начала совпадали. Тогда вектор суммы задаётся диагональю построенного на них параллелограмма, исходящей из их общего начала.



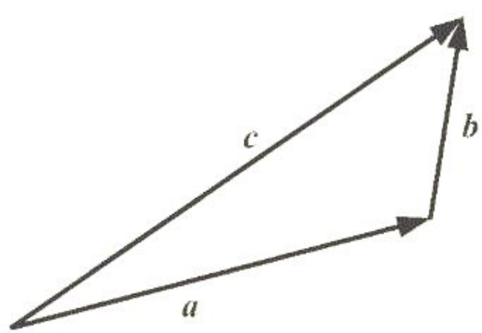


Рис. 1.3

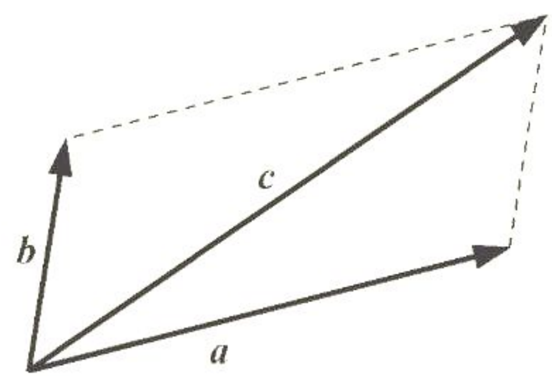
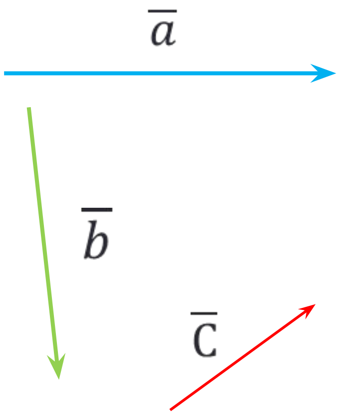


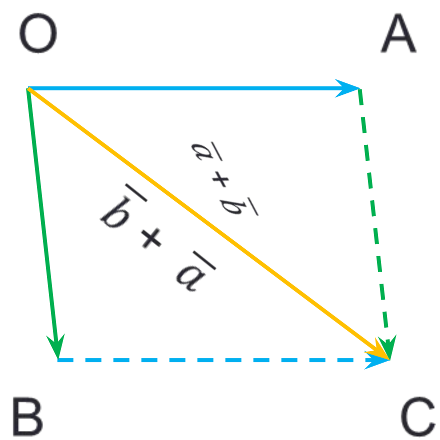
Рис. 1.4

3) Какими свойствами обладает сумма векторов?

Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ верно:

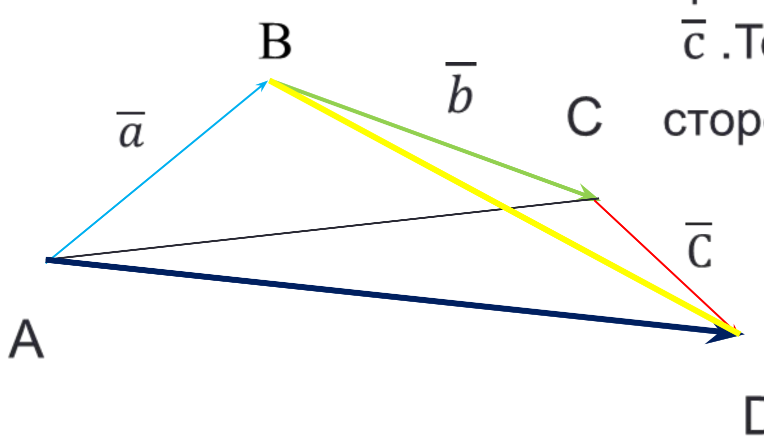
1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ (переместительный закон)
2. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$(сочетательный закон)
3. $\overline{a}+0=\overline{a}$





Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны. Тогда отложим их от точки О: ОА= $\overline{a}$ и ОВ= $\overline{b}$, а затем построим на них параллелограмм ОАВС=> ОА+АС=ОС, ОВ +ВС=ОС, ОА=ВС=а и АС=ОВ=b

Отложим от точки А вектор АВ= $\overline{a}$, а затем вектор ВС= $\overline{b}$ и вектор CD= $\overline{c}$.Тогда $AB+(BC+CD)=AB+BD=AD$ и, с другой стороны $(AB+BC)+CD=AC+CD=AD$



4) Как определяется разность векторов ?

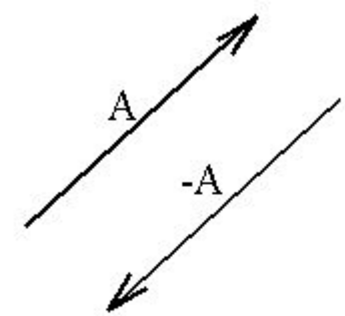
Чтобы найти разность векторов , заданных на плоскости координатами , необходимо вычесть из координат первого вектора соответствующие координаты второго.

$\overline{a}$(x,y) (8,4) $\overline{a}-\overline{b}$=x- x_1 ,y-y_1

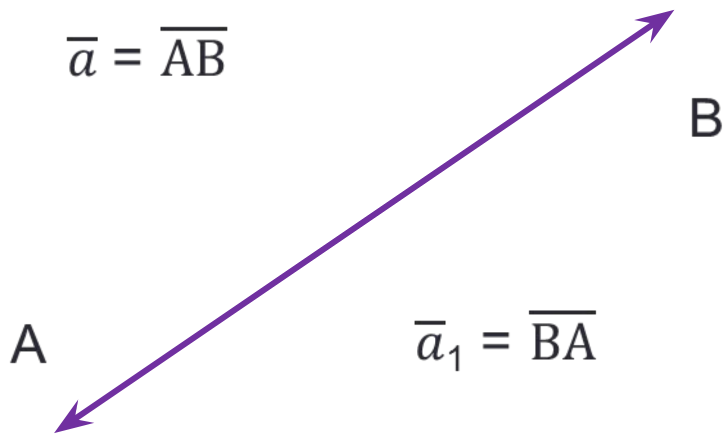
$\overline{b}$(x_1,y_1) (5,3) (8-5),(4-3)=(3,1)

5) Какие векторы называются противоположными?

Если нулевой вектор $\overline{a}$ и $\overline{a}_1$ удовлетворяют условиям : $|\overline{a}| = |\overline{a_1}|$, то векторы $\overline{a}$ и $\overline{a}_1$ называются противоположными . Вектор противоположный вектору $\overline{a}$, обозначается через - $\overline{a}$: $\overline{a}_1$ =- $\overline{a}$



$\overline{a} = \overline{\mathrm{AB}}$



$\overline{a}_1 = \overline{\mathrm{BA}}$

$\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{AA}} = \overline{0}$

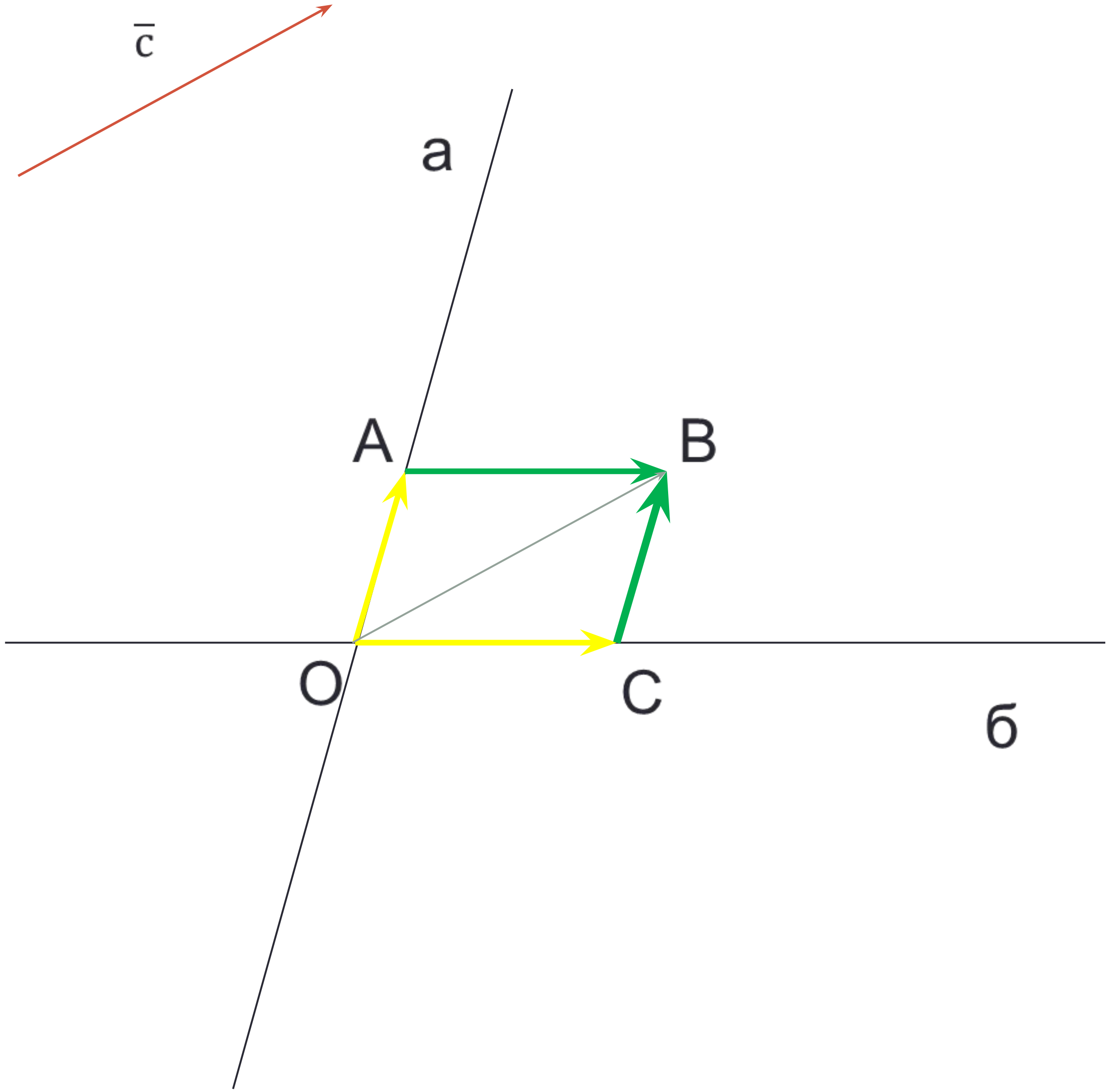
6) Как можно разложить вектор на сумму составляющих по двум пересекающимся прямым?

Если $\overline{a}$=$\overline{b}$+$\overline{c}$, то векторы $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называются составляющими вектора $\overline{a}$. Также говорят, что вектор $\overline{a}$ разложен на сумму составляющих векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Пусть даны две пересекающиеся прямые . Тогда любой вектор можно разложить на сумму составляющих, расположенных на данных прямых.

Даны прямые а и б, пересекающиеся в точке О. Вектор $\overline{c}$ отложим от точки О,ОВ= $\overline{c}$. С помощью прямых а и б достроим параллелограмм ОАВС так , что бы $\overline{OB}$ являлся диагональю. Стороны ОА и ОС построим с помощью правила параллелограмма .$\overline{OB}$=$\overline{OA}$+$\overline{OC}$. Векторы $\overline{OC}$ и $\overline{OA}$ являются составляющими $\overline{c}$. В этом случае $\overline{OB}$ не лежит на прямой .Если вектор$\overline{OB}$ лежит на прямой(на а или б) ,то одна из составляющих этого вектора будет равна самому вектору $\overline{OB}$,а вторая составляющая будет равна нулевому вектору .Если составляющие вектора будут перпендикулярны между собой , то ОАСВ будет являться прямоугольником, а отрезки ОА и ОС – проекциями диагонали.

▪



$\bar{c}$
а
A
B
O
C
б

1)Каким может быть произведение k·$\overline{a}$, если :1) $\overline{a}$=0, 2) k=0?

Произведение вектора $\overline{a} \neq 0$ на число k называется вектор, модуль которого = числу |k|·|$\overline{a}$| и сонаправлен с вектором $\overline{a}$ при k>0, противоположно направлен с вектором $\overline{a}$ при k<0.Произведение числа k на вектор $\overline{a}$ записывается так: k·$\overline{a}$

Если k=0, то 0·$\overline{a}$=0

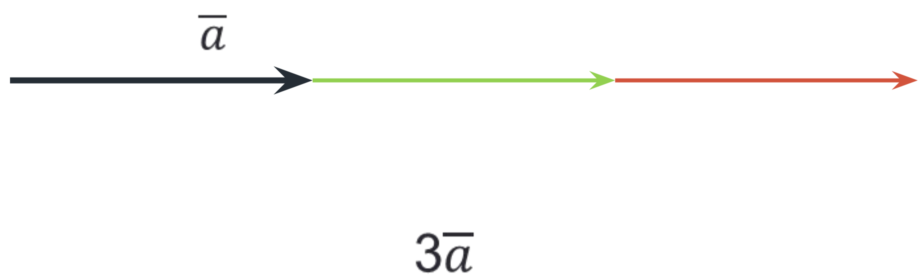
2)Как умножить ненулевое число на ненулевой вектор?

Произведение ненулевого вектора на число - это вектор, координаты которого равны соответствующим координатам данного вектора, умноженным на число.

$\overline{a}$ (7;3)

$3\overline{a}$ (7·3;3·3)=(21;9) $3\overline{a}$

. $\overline{a}$=4, $3\overline{a}$=12



3) Какими свойствами обладает умножение числа на вектор ?

Для любых чисел α,β и любых векторов $\overline{a},\overline{b}$ верно равенство:

1.$(\alpha\cdot\beta)\overline{a} = \alpha(\beta\overline{a})$ (сочетательный закон)

2. $(\alpha+\beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$ (1 распределительный закон)

3. $\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$ (2 распределительный закон)

$\overline{a}=5, \alpha=2, \beta=6, \overline{b}=3$

1.$(2\cdot6)5=2(6\cdot5)$ =60

2. $(2+6)5=2\cdot5+6\cdot5$ =40

3.$2(5+3)=2\cdot5+2\cdot3$ =16

4) Докажите признак коллинеарности векторов.

Чтобы вектор $\overline{b}$ был коллениарен ненулевому вектору $\overline{a}$,необходимо и достаточно существование числа α такого, что $\overline{b}=\alpha\overline{a}$.

Докажем, что существует число α такое , что $\overline{b}=\alpha\overline{a}$ при $\overline{a}||\ \overline{b}$.

1.Если $\overline{b}=\overline{0}$, то при α=0 получим $\overline{b}=0\cdot\overline{a}=0$

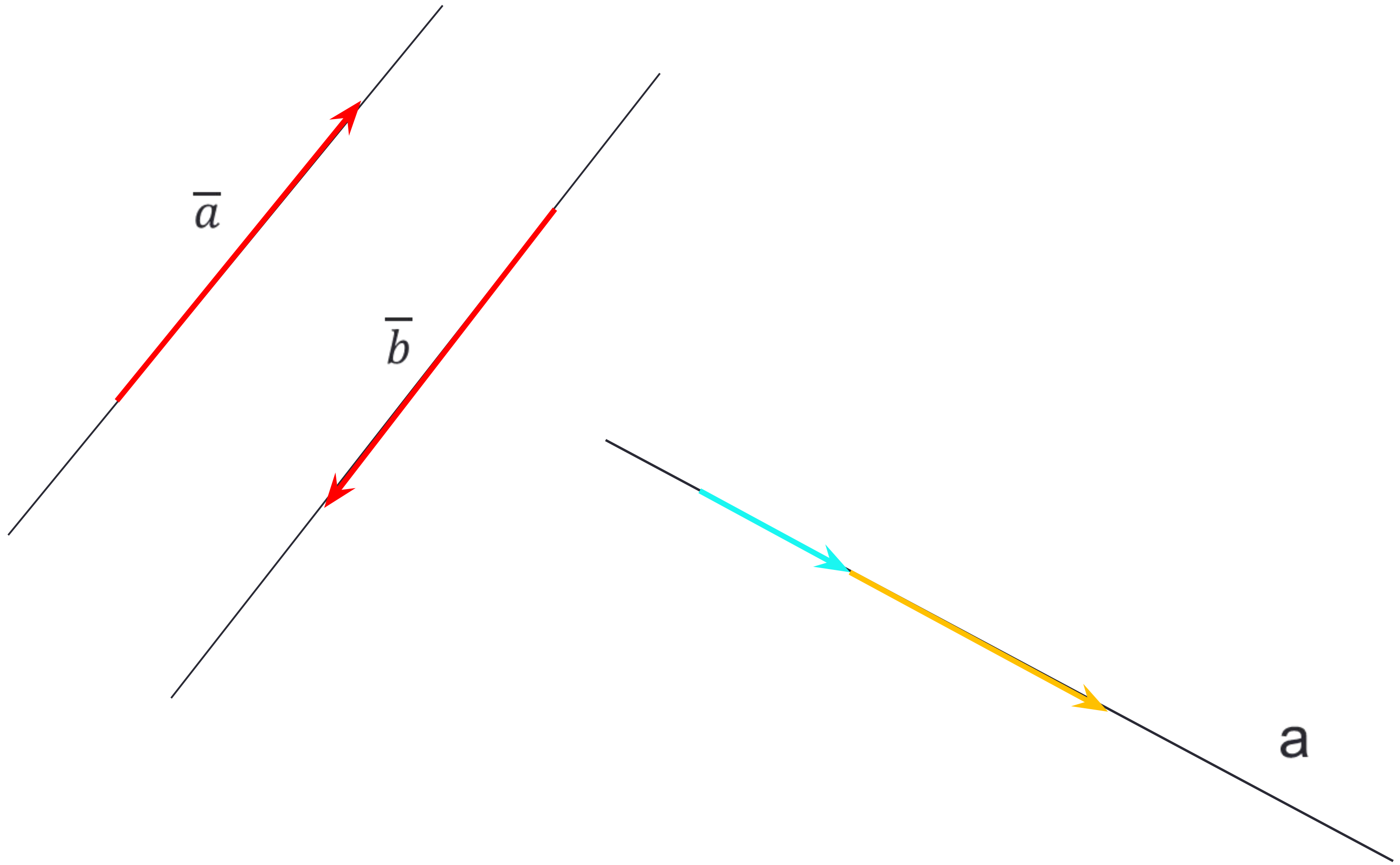
2.Пусть $\overline{b}\neq0$

3.Если $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$, то при α= $\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$ получим равенство $\overline{b}=\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\cdot\overline{a}$,так как $\overline{b}\uparrow\uparrow\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\cdot\overline{a}$ и

$$|\overline{b}|=\left|\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\right|\cdot|\overline{a}|=\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\cdot|\overline{a}|=|\overline{b}|$$

4.Если $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$,то при α=- $\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$ получим равенство $\overline{b}=\alpha\overline{a}$

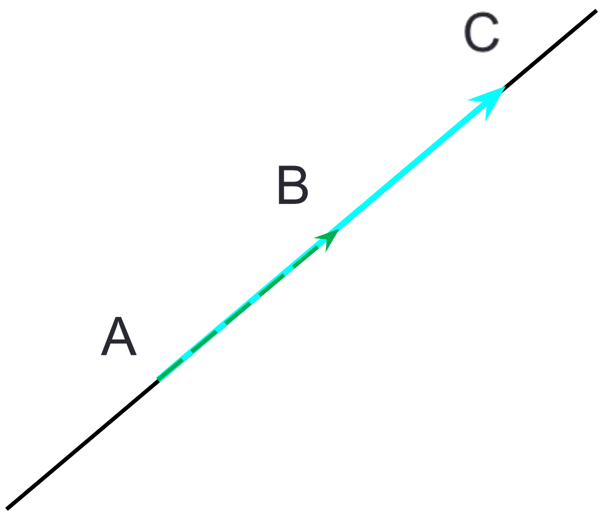
Если $\overline{b}=\alpha\overline{a}$, то векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллениарны по определению. Теорема доказана.



$\overline{a}$
$\overline{b}$
a

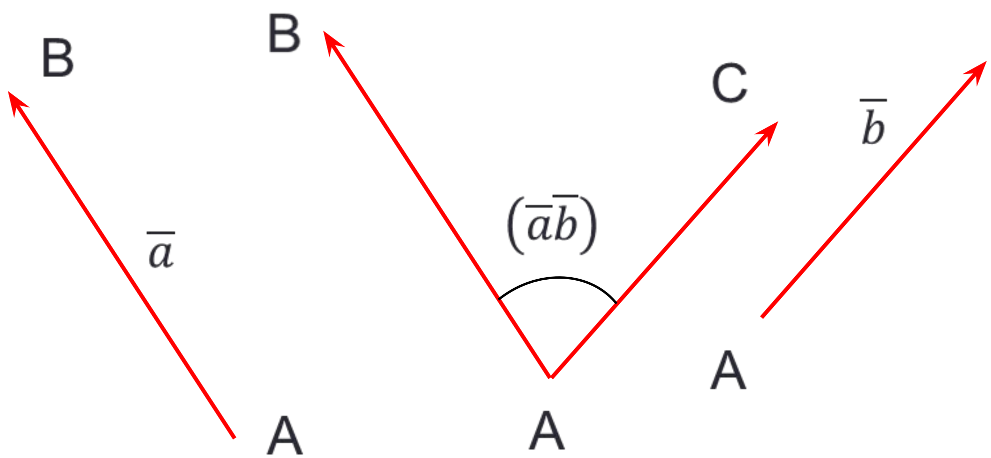
5)Какое условие является необходимым и достаточным для того , чтобы точки A, B и C лежали на одной прямой?

Для того , чтобы точка C лежала на прямой AB , необходимо и достаточно , чтобы существовало число α такое , что $\overline{AC}=\alpha\overline{AB}$



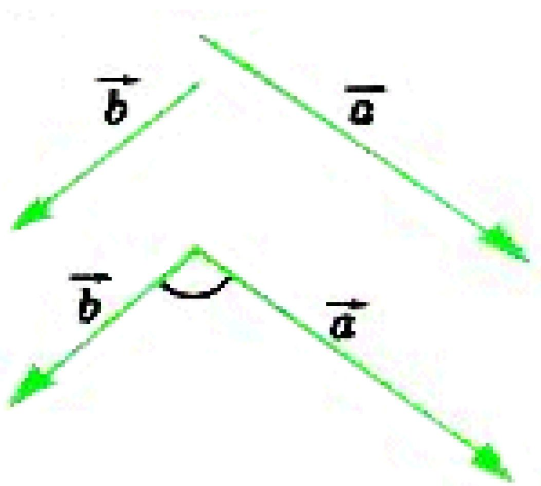
1)Какой угол называется углом между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$?

Углом между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ называется угол BAC . Углом между ненулевыми векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется угол , образованный при откладывании этих векторов от одной точки. $(\overline{a}\overline{b})$



2)Как определяется угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в общем случае?

В общем случае (когда векторы не сонаправленны) дается следующее определение : Углом между двумя ненулевыми векторами называется величина заданного ими угла, когда они отложены от одной точки



$$\cos\alpha = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$$

3) Что называется скалярным произведением двух векторов? Скалярное произведение векторов является числом или вектором?

Скалярным произведением двух векторов называется число , равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов равно числу. |а|·|б|·cos (а,б)

. $|\overline{a}|$=4 , cosφ=30°

. $|\overline{б}|$ =9 $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{б}|\cdot$cosφ(т.к. φ=$(\overline{a}\overline{b})$)

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = 4\cdot 9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$$

4) Сформулируйте свойства скалярного произведения.

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. Для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ верно равенство $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$.

2. Для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и любого действительного числа α верно равенство $(\alpha\overline{a}) \cdot \overline{b} = \alpha(\overline{a} \cdot \overline{b})$.

3. Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ верно равенство $(\overline{a}+\overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$

$\overline{a}=12$, $\overline{b}=15$, $\alpha=7$, $\overline{c}=20$. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a} \Rightarrow 12 \cdot 15 = 15 \cdot 12 = 180$

$(\alpha\overline{a}) \cdot \overline{b} = \alpha(\overline{a} \cdot \overline{b}) \Rightarrow (7 \cdot 12)15 = 7(12 \cdot 15) = 1260$

$(\overline{a}+\overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c} \Rightarrow (12+15)20 = 12 \cdot 20 + 15 \cdot 20 = 540$

5) Какое условие является необходимым и достаточным для перпендикулярности двух векторов?

Два ненулевых вектора называются перпендикулярными, если угол между ними равен девяноста градусам (радиан). Для перпендикулярности двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю, то есть, чтобы выполнялось равенство $\overline{a} \cdot \overline{b}$=0.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны(перпендикулярны), то $(\overline{a}\overline{b})$=90˚и выполняется равенство $\overline{a}\cdot\overline{b}$ =$|\overline{a}|\cdot|\overline{б}|\cdot$ cos90˚=0.Обратно, если для ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$выполняется равенство $\overline{a} \cdot \overline{b}$=0, то по формуле $\overline{a} \cdot \overline{b}$ =$|\overline{a}|\cdot|\overline{б}|$ ·cosφ имеем $|\overline{a}|\cdot|\overline{б}|$ ·cosφ=0

Обратно, если для ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ выполнено равенство $\overline{a}\cdot\overline{b}$ =0, то по формуле (1) имеем $|\overline{a}|\cdot|\overline{б}|$ ·cosφ=0. Так как $|\overline{a}|\neq 0$, $|\overline{б}|\neq 0$, то необходимо, чтобы cosφ=0, значит, φ=90˚. Итак, мы показали, что для того чтобы векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ были перпендикулоярны, необходимо и достаточно выполнения равенства $\overline{a} \cdot \overline{b}$=0.

6)Укажите принципы применения элементов векторной алгебры.

Раздел математики , изучающий векторы и действия над ними , называется векторной алгеброй. Аппарат векторной алгебры удобен при решении геометрических и физических задач.

1)Сформулируйте и докажите теорему о разложение вектора по двум неколлениарным векторам.

Если ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллениарны, то для любого вектора $\overline{c}$ найдутся числа x и y такие , что выполняется равенство $\overline{c}$ =x$\overline{a}$ +y$\overline{b}$, причем коэффициенты разложения x и y определяются единственным образом.

Доказательство: На плоскости отложим от точки О векторы $\overline{a}$,$\overline{b}$ и $\overline{c}$. Концы полученных векторов обозначим А,В и С, по теореме о разложении вектора вдоль прямых ОА и ОВ найдутся единственные векторы $\overline{OA_1}$ и $\overline{OB_1}$

,что получится равенство $\overline{OC}=\overline{OA_1}+\overline{OB_1}$

Т.к. $\overline{OA}||\overline{OA_1}$ и $\overline{OB}||\overline{OB_1}$,то по теореме о коллинеарных векторах существуют единственные действительные числа x и y , что $\overline{OA_1}=x\cdot \overline{OA}=x\overline{a}$ и $\overline{OB_1}=y\cdot \overline{OB}=y\cdot \overline{b}$.Поэтому из равенства $\overline{OC}=\overline{OA_1}+\overline{OB_1}$ следует единственное представление вида $\overline{c}=\overline{OC}=x\overline{a}+y\overline{b}$.

2)Какие векторы называются базисными векторами на плоскости?

Любой вектор можно разложить по двум произволным неколлинеарным векторам. Если на плоскости выбраны такие два неколлинеарных вектора, то они называются базисными векторами на плоскости.

3)Что такое координаты вектора и как их обозначают?

Координа́ты ве́ктора — коэффициенты единственно возможной линейной комбинации базисных векторов в выбранной системе координат, равной данному вектору. $\overline{a}$ =(x;y)

4)Напишите координаты координатных векторов.

Координаты нулевого вектора равны нулю.

Координаты равных векторов соответственно равны.

Координаты вектора суммы двух векторов равны сумме соответствующих координат этих векторов.

Координаты вектора разности двух векторов равны разностям соответствующих координат этих векторов.

Координаты вектора произведения данного вектора на число равны произведениям соответствующих координат этого вектора на данное число.

5)Какие свойства координат векторов вы знаете ?

1.У равных векторов соответствующие координаты равны .Обратно, векторы ,у которых соответствующие координаты равны между собой

2. При сложении векторов складываются их соответствующие координаты

3. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это же число

6)Какой вектор называется радиус-вектором точки А?

Радиус-вектором называется вектор, идущий из начала координат вы заданную точку на плоскости

7)Как определяются координаты вектора , если заданы координаты его концов?

Чтобы найти координаты вектора $\overline{AB}$, зная координаты его начальной точек А и конечной точки В, необходимо из координат конечной точки вычесть соответствующие координаты начальной точки.

8)По какой формуле определяется модуль вектора?

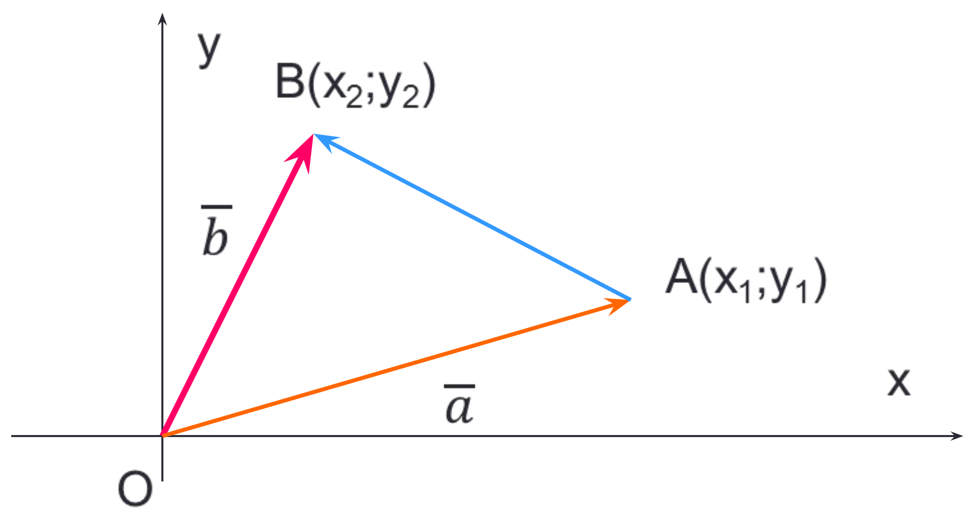
$$|AB|=\sqrt{(x2-x1)2+(y2-y1)2}$$

1)Как можно определить скалярное произведение векторов по их координатам? Запишите соответствующие формулы и докажите их.

Скалярное произведение векторов $\overline{a}=(x_1;y_1)$, $\overline{b}=(x_2;y_2)$ определяется по формуле : $\overline{a}\cdot\overline{b} = x_1\cdot x_2+ y_1\cdot y_2$.

Действительно, если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ отложить от начала координат, то они определяют соответственно радиус-векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.Тогда $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$.Отсюда $\overline{AB}^2=\overline{AB}\cdot\overline{AB}=(\overline{OB}-\overline{OA})^2=(\overline{b}-\overline{a})^2=\overline{b}^2+\overline{a}^2-2\overline{a}\cdot\overline{b} \Rightarrow \overline{a}\cdot\overline{b}=\frac{1}{2}(\overline{a}^2+\overline{b}^2-\overline{AB}^2)$.Здесь ,учитывая, что $\overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1) \Rightarrow \overline{AB}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$, $\overline{a}^2=x_1^2+y_1^2$,$\overline{b}^2=x_2^2+y_2^2$

Имеем $\overline{a}\cdot\overline{b}=\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-x_1^2+2x_1x_2-x_1^2-y_1^2+2y_1y_2-y_2^2)=x_1x_2+y_1y_2$,что и требовалось доказать.



2) Напишите условие перпендикулярности векторов .

Если векторы $\overline{a}$ =(x_1;y_1) и $\overline{b}$=(x_2;y_2) взаимно перпендикулярны , то ($\overline{a}$,$\overline{b}$)=90˚. Поэтому их скалярное произведение равно нулю , т.е.

$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$. Тогда по формуле имеем: $x_1x_2+y_1y_2 = 0$. Это и есть условие перпендикулярности ненулевых векторов.

3)Напишите условие коллениарности векторов и докажите его.

Пусть векторы а и $\overline{b}$ коллениарны. Тогда по теореме найдется число к такое ,что а=к·$\overline{b}$, т.е. (х1;у1)=(кх2;ку2). Отсюда х1=кх2,у1=ку2.Если х2=0, у2=0, то из последних равенств получим равенства $\frac{x1}{x2}$=к, $\frac{y1}{y2}$=к, т.е. выполняется равенство $\frac{x1}{x2}=\frac{y1}{y2}$.Соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

4) По какой формуле определяется угол между векторами ? Докажите ее.

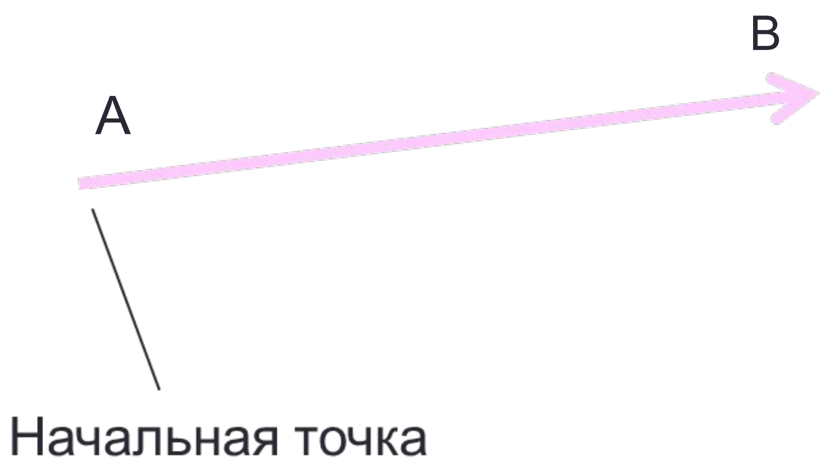
$$\text{Cos}(a,б)=\frac{X1X2+У1У2}{\sqrt{X1^2+У1^2\cdot\sqrt{X2^2+У2^2}}}.$$

1)Какой вектор называется направляющим вектором прямой?

Направляющий вектор прямой - это любой ненулевой вектор, лежащий на данной прямой или на параллельной ей прямой.

2)Какая точка называется начальной точкой прямой?

Точка на прямой , от которой отложили вектор.



3)Напишите уравнение прямой , проходящией через две заданные точки.

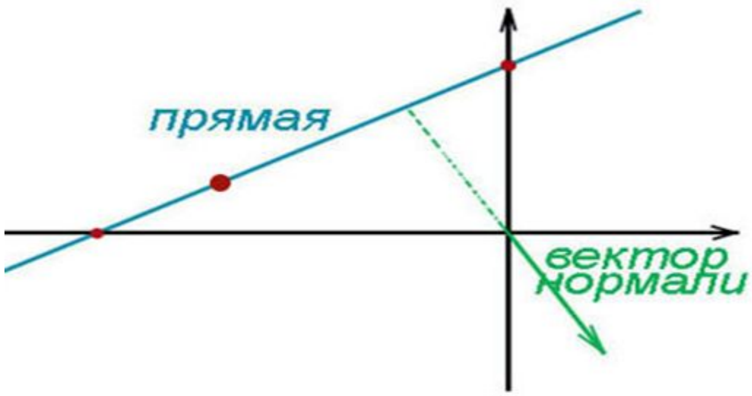
Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (x1,y1) и (x2,y2), имеет вид: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

или в общем виде $(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+(x_1y_2-x_2y_1)=0.$

Т.е. получили общее уравнение прямой линии на плоскости в декартовых координатах: $Ax+By+C=0,$ где A и B одновременно не равны нулю.

4)Что такое вектор нормали прямой? Напишите уравнение прямой по точке и вектору нормали.

Вектор нормали - это вектор, перпендикулярный искомой прямой.



$$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)=0$$

5) Напишите по общему уравнению прямой направляющий вектор, вектор нормали и угловой коэффициент этой прямой.

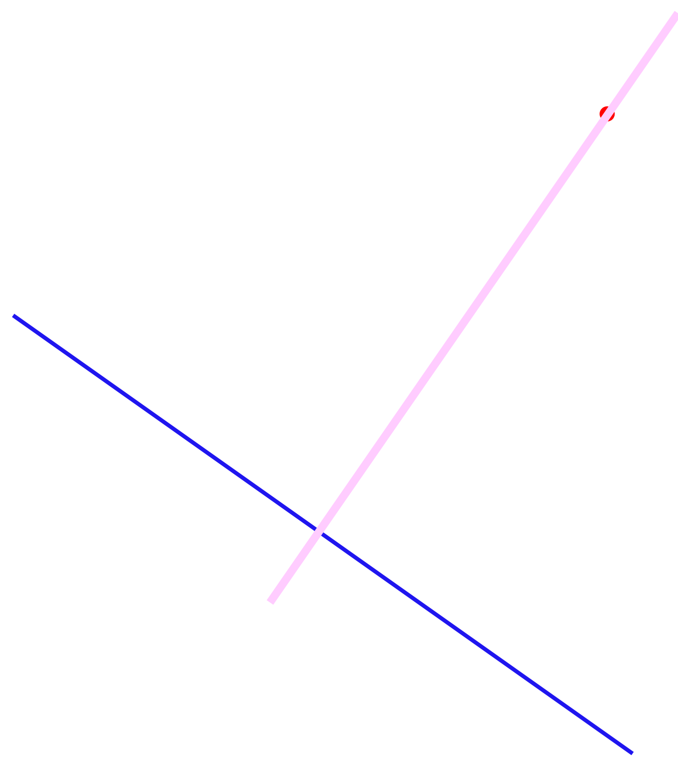
6)По какой формуле определяется угол между прямыми?

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \bullet \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

7)Как определяется расстояние от точки до прямой?

Расстояние от точки до прямой — равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Если задано уравнение прямой Ax + By + C = 0, то расстояние от точки M(Mx, My) до прямой можно найти, используя следующую формулу

$$d = \frac{|ax_0 + бy_0 + c|}{\sqrt{a^2 + б^2}}$$



Благодарю за внимание!