Лекция № 8

22.05.2020г.

Напряжения и деформации при ударе.

Удар – ***динамическая нагрузка, скорость приложения которой резко изменяется в короткий промежуток времени.***

Различают продольный и поперечный удар.

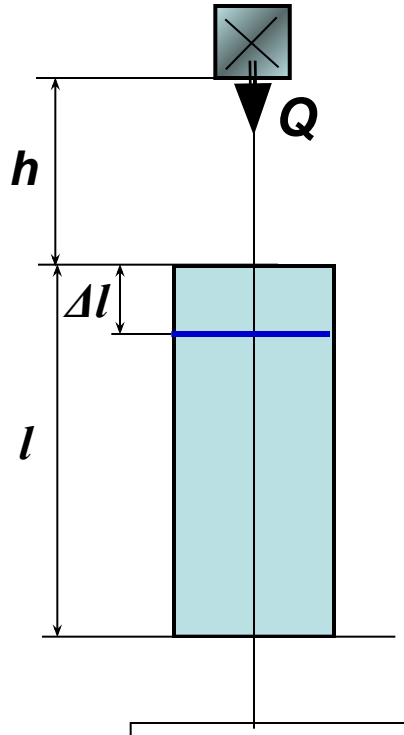
- забивка фундаментных свай;
- работа ударного молота;
- отскок пружины бойкового механизма в ружье.

- штамповка;
- ковка.

В приближенной теории удара вводятся следующие предположения и допущения:

- **ударяющее тело абсолютно жесткое и не отскакивает от ударяемого;**
- **масса ударяемого тела пренебрежимо мала по сравнению с массой ударяющего;**
- **вся кинетическая энергия ударяющего тела переходит в потенциальную энергию упругой деформации ударяемого.**

Продольный удар.



Кинетическая энергия T_0 *падающего груза* **Q** *переходит в потенциальную энергию упругой деформации стержня* **U**:

$$T_0 \rightarrow U$$

$$T_0 = Q\left(h + \Delta l\right) \quad (1) \qquad U = \frac{1}{2} P \Delta l \quad (2)$$

В силу действия закона Гука имеем:

$$P = \sigma F = \frac{\Delta l}{l} EF = \frac{\Delta l}{\Delta l_{ст}} Q$$

где: $\Delta l_{ст} = \dfrac{Ql}{EF}$ *- укорочение стержня от статического действия груза;*

F *- площадь поперечного сечения;* E *- модуль Юнга.*

Тогда **U** *в выражении (2) можно определить по формуле:*

$$U = \frac{1}{2} Q \frac{\Delta l^2}{\Delta l_{ст}}$$

Выражение (1) принимает вид: $h + \Delta l = \dfrac{1}{2} \dfrac{\Delta l^2}{\Delta l_{ст}}$

Откуда выразим Δl : $$\Delta l = \Delta l_{ст} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}} \right] = \Delta l_{ст} \cdot k_Д$$

Итак, получено: $$\boxed{\Delta l = \Delta l_{ст} \cdot k_Д}$$ **- укорочение стержня при ударе.**

где: $$\boxed{k_Д = \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}} \right]}$$ **- динамический коэффициент при ударе.**

Динамическое напряжение при ударе: $$\boxed{\sigma_Д = k_Д \cdot \sigma_{ст}}$$

Или : $$\sigma_Д = \sigma_{ст} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}} \right) \approx \frac{Q}{F} + \sqrt{\frac{2QhE}{lF}}$$

Динамическое нагрузка при ударе: $$\boxed{P_Д = \sigma_Д \cdot F}$$

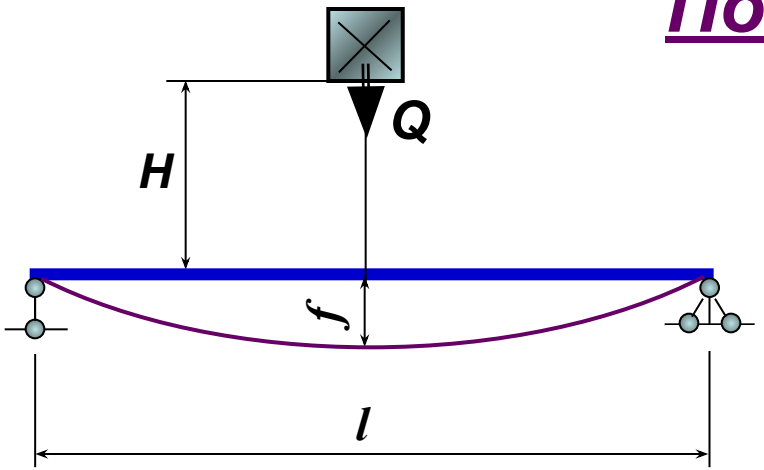
Или : $$P_Д = k_Д \cdot \sigma_{ст} \cdot F = Q \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}} \right)$$

Выводы:

*При равномерном распределении напряжений по длине стержня, т.е., когда стержень имеет постоянное поперечное сечение, величина динамического напряжения зависит не только от площади его поперечного сечения **F**, как при статическом нагружении, но и от его длины **l**, модуля упругости **E** .*

Чем больше объем материала, подвергаемого удару упругого стержня, тем меньше возникающее в нем динамическое напряжение.

Поперечный удар.



Балка на опорах.

$$\sigma_Д = k_Д \cdot \sigma_{ст}$$

- динамическое напряжение.

$$f_ст = \frac{Ql^3}{48EI_x}$$

- статический прогиб балки от груза **Q** посередине пролета.

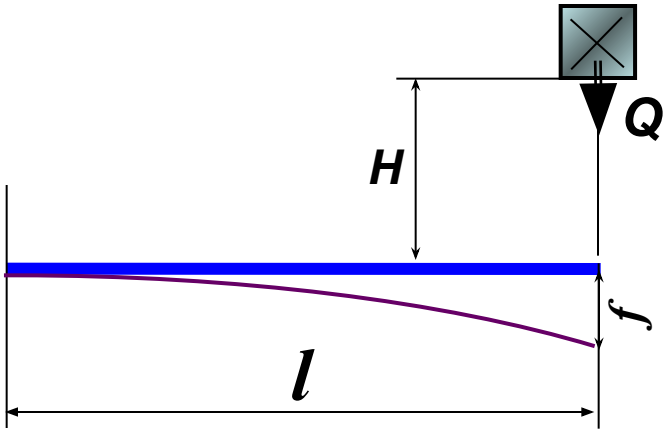
$$f_Д = f_ст \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_ст}} \right] = f_ст \cdot k_Д$$

- динамический прогиб.

где: $$k_Д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_ст}}$$

- динамический коэффициент при поперечном ударе.

Балка консольного типа.



$$f_{ст} = \frac{Ql^3}{3EI_x}$$

- статический прогиб свободного торца балки от груза Q.

$$f_Д = f_{ст} \cdot k_Д$$

- динамический прогиб.

где: $$k_Д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{ст}}}$$

- динамический коэффициент при поперечном ударе.

$$\sigma_Д = k_Д \cdot \sigma_{ст}$$

- динамическое напряжение.

Условие прочности:

$$\sigma_{Д_{max}} \le \left[\sigma_Д\right] = \frac{\sigma_T}{k_Д}$$

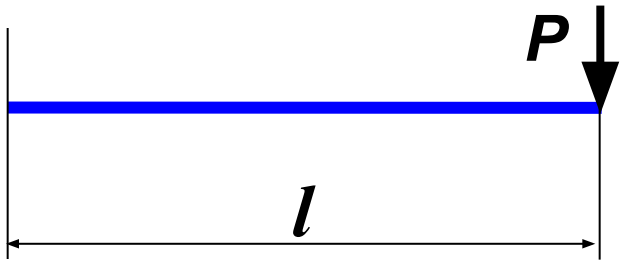
где: σ_T - предел текучести.

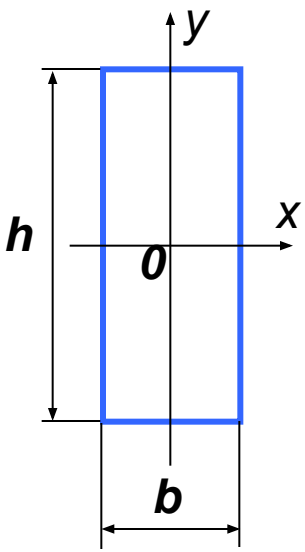
Примечание:

Конструкции из хрупких материалов не желательно подвергать удару, т.к. они имеют свойство разрушаться почти без образования пластических деформаций.

Проанализируем изменение напряжений при статическом и динамическом нагружении балки при ее различных положениях.

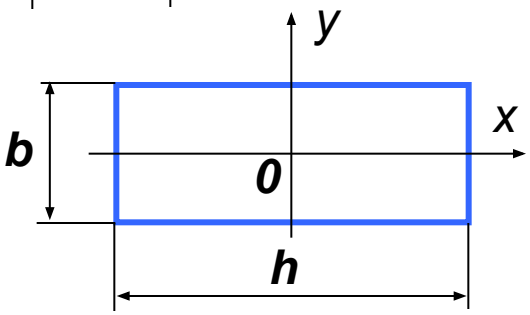
Статическое нагружение.





а) балка поставлена на ребро.

$$\sigma_m = \frac{M_x}{W_x} = \frac{6Pl}{bh^2} = \frac{6Pl}{hF}$$



б) балка положена плашмя.

$$\sigma_m = \frac{M_x}{W_x} = \frac{6Pl}{hb^2} = \frac{6Pl}{bF}$$

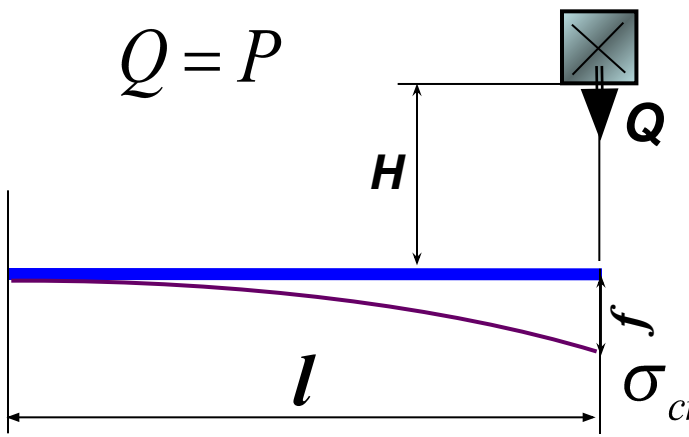
$$\frac{\sigma_m^{(a)}}{\sigma_m^{(б)}} = \frac{6Pl \cdot Fb}{Fh \cdot 6Pl} = \frac{b}{h}$$

Вывод:

Максимальные нормальные напряжения при одинаковой статической нагрузке в балке прямоугольного сечения (b×h) положенной плашмя будут в h/b раз больше, чем в балке, поставленной на ребро.

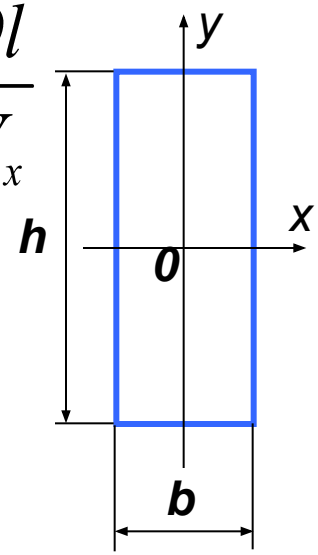
Динамическое нагружение (удар).

$$Q = P$$



$$\sigma_{Д} = \sigma_{ст} \cdot k_{Д} \qquad k_{Д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{ст}}}$$

$$\sigma_{ст} = \frac{6Ql}{hF} = \frac{Ql}{W_x}$$



$$f_{ст} = \frac{Ql^3}{3EI_x}$$

а) балка поставлена на ребро.

$$\sigma_{Д} = \frac{Ql}{W_x} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{ст}}}\right]$$

Статическая потенциальная энергия: $U_{ст} = \frac{Qf_{ст}}{2} = \frac{Q^2 l^3}{6EI_x}$

С учетом того, что $T_0 \approx QH$ определим отношение

$$\frac{2H}{f_{ст}} = \frac{QH}{\frac{1}{2}Qf_{ст}} = \frac{T_0}{U_{ст}}$$

Тогда:

$$\sigma_Д = \frac{Ql}{W_x}\left(1+\sqrt{1+\frac{T_0}{U_{ст}}}\right) = \frac{Ql}{W_x}\left(1+\sqrt{1+\frac{6T_0EI_x}{Q^2l^3}}\right) \approx \sqrt{\frac{6T_0EI_x}{Q^2l^3}}$$

Итак, получено: $\boxed{\sigma_Д = \sqrt{\frac{6T_0EI_x}{Q^2l^3}}}$ **- динамическое напряжение при поперечном ударе.**

Примечание:

Множитель перед скобкой определяет величину статического напряжения, а оно на практике намного меньше динамического, поэтому им пренебрегаем.

Примечание:

В случае, когда $H >> f_{cm}$ в радикале формулы для $k_Д$ можно пренебречь единицей. Из этого же соображения в формуле $T_{\theta m} = Q\left(H + f\right)$ можно пренебречь прогибом.

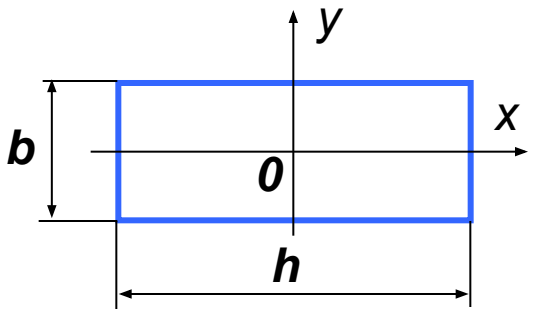
Имея ввиду, что $I_x = i_x^2 \cdot F$ определим отношение: $\dfrac{I_x}{W_x^2} = \left(\dfrac{y_{max}}{i_x}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{F}$

Тогда: $$\boxed{\sigma_Д^{(a)} = \frac{E y_{max}}{i_x}\sqrt{\frac{6T_0}{Fl}}}$$

- динамическое напряжение при поперечном ударе.

где: $$\frac{y_{max}}{i_x} = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{bh^3}{12bh}}} = \sqrt{3}$$

б) балка положена плашмя.



$$\sigma_Д = \frac{6Pl}{bF}\cdot\left[1+\sqrt{1+\frac{2H}{f_m}}\right] \qquad I_x = \frac{hb^3}{12}$$

Проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, получаем:

$$\boxed{\sigma_Д^{б)} = \frac{y_{max}}{i_x}\sqrt{\frac{6T_0}{Fl}}}$$

$$\frac{y_{max}}{i_x} = \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{hb^3}{12bh}}} = \sqrt{3}$$

Таким образом получено, что $\frac{y_{max}}{i_x} = const$

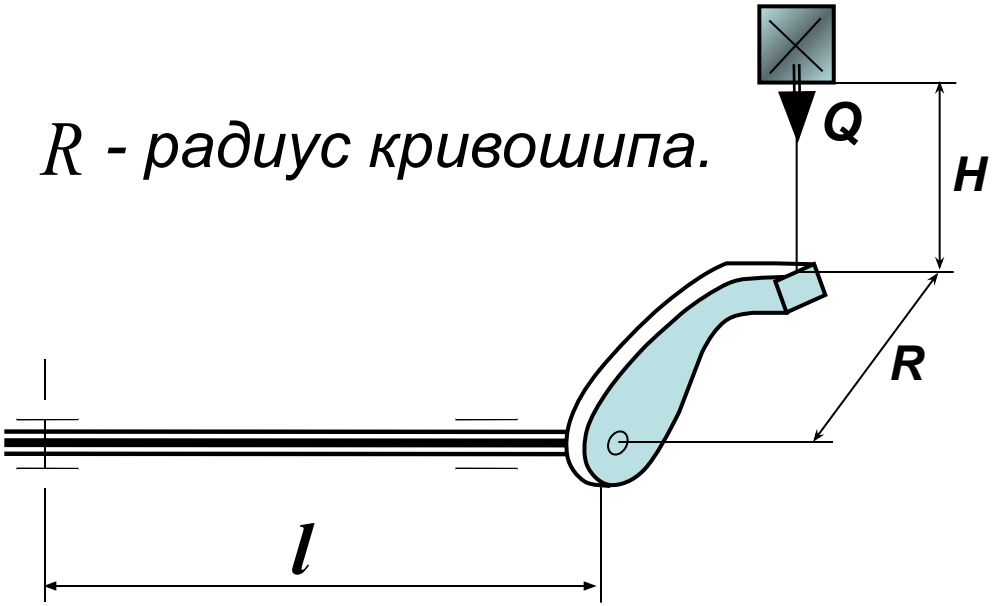
для любого положения сечения.

Вывод:

Максимальные напряжения при одинаковой ударной нагрузке в балке прямоугольного сечения (b × h) будут одинаковыми и при постановке ее на ребро, и при укладывании плашмя. В пределах действия закона Гука.

Скручивающий удар.

R - радиус кривошипа.



Динамическое касательное напряжение:

$$\tau_Д = \tau_{ст} \cdot k_Д$$

$$\tau_{ст} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{QR}{W_p}$$

$$k_Д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_m}}$$

$$\delta_m = \varphi R = \frac{M_z l}{GI_p} R = \frac{QR^2 l}{GI_p}$$

где: φ - угол поворота кривошипа. $\varphi = \frac{M_z l}{GI_p}$

δ_m - длина дуги, описываемой кривошипом.

Исходя из закона сохранения энергии $T_Д = U$

где: $U_Д$ - потенциальная энергия деформации вала при ударном кручении.

и имея ввиду, что: $U_Д = \frac{1}{2} M_Д \cdot \varphi_Д = \frac{M_Д^2 l}{2GI_p}$

и учитывая, что: $\tau_Д = \frac{M_Д}{W_p}$ или $M_Д = \tau_Д \cdot W_p = \frac{\pi d^3}{16} \tau_Д$

можно записать: $U_Д = \frac{\tau_Д^2 \pi^2 d^6 l}{16^2 GI_p \cdot 2} = \frac{\tau_Д^2 Fl}{4G}$

Откуда $\boxed{\tau_Д = 2\sqrt{\frac{T_0 G}{Fl}}}$ **- динамическое касательное напряжение при скручивающем ударе.**

F - площадь поперечного сечения вала.

Влияние различных факторов на снижение динамических напряжений при ударе.

Проанализируем формулу для определения динамического напряжения.

$$\sigma_Д = k_Д \cdot \sigma_{ст} \quad \text{где:} \quad k_Д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}}$$

- динамический коэффициент при ударе.

При снижении $k_Д$ будут уменьшаться $\sigma_Д$.

При любом виде удара снижение высоты падения груза уменьшает динамические напряжения.

Продольный удар: $\delta_{ст} = \Delta l_{ст} = \dfrac{Nl}{EF} \rightarrow k_Д = 1 + \sqrt{1 + \dfrac{2HEF}{Nl}}$

$k_Д$ будет уменьшаться при:

- увеличении длины стержня ***l***,
- снижении объема стержня ***V***,
- снижении жесткости стержня ***EF***.
- снижении площади поперечного сечения стержня ***F***.

$$k_Д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2HEV}{Nl^2}}$$

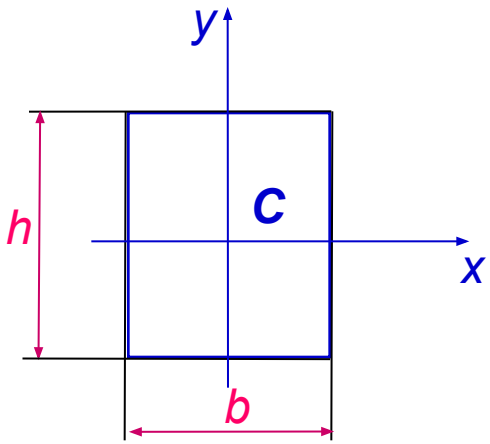
Поперечный удар: $\delta_{ст} = f_{ст} = \dfrac{Pl^3}{EI_x} \rightarrow k_Д = 1 + \sqrt{1 + \dfrac{2HEI_x}{Pl^3}}$

$k_Д$ будет уменьшаться при:

- увеличении длины балки ***l***,
- увеличении объема балки ***V***,

например, для балки прямоугольного сечения:

$$k_Д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2HEbh^3}{12Pl^3}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{HEh^2V}{6Pl^4}}$$



- снижении жесткости стержня EI_x.
- снижении площади поперечного сечения балки ***F***.

Скручивающий удар: $\tau_Д = 2\sqrt{\dfrac{T_0 G}{Fl}}$

$\tau_Д$ будет уменьшаться при:

- увеличении объема вала $V = Fl$,
- уменьшении диаметра маховика ***D***.

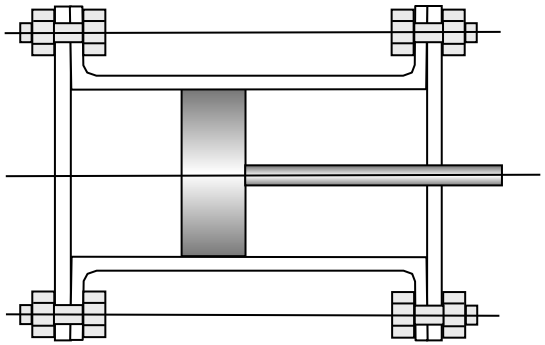
Конструктивные решения по снижению динамических напряжений при ударе.

Представляют собой технологические мероприятия по изменению размеров деталей, испытывающих ударную нагрузку.

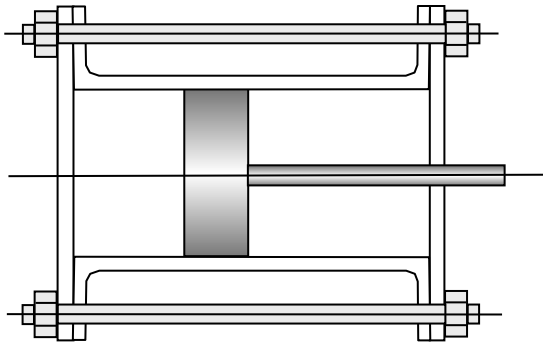
Примеры:

Увеличение длины.

Крышка поршня бурового инструмента.
Короткие болты дают обрыв, поэтому вместо них ставят длинные шпильки.



а)



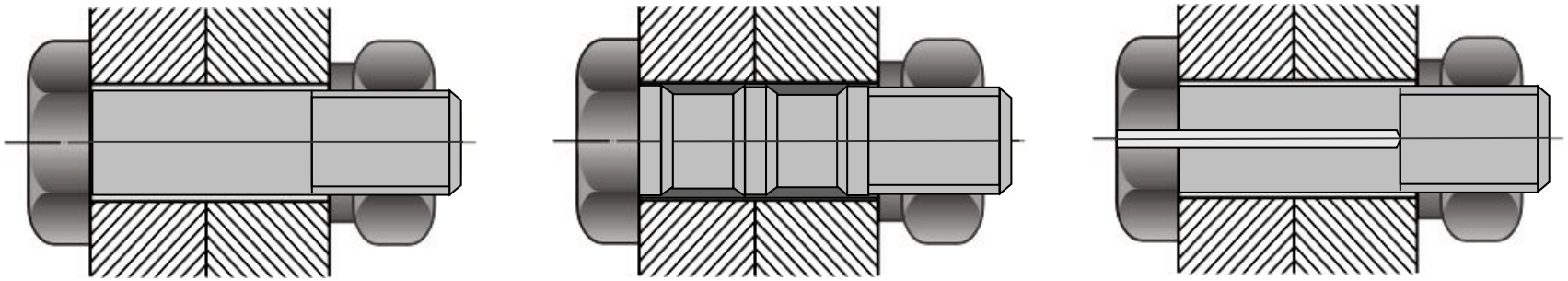
б)

Уменьшение площади.

В болтовых соединениях.

Методы выравнивания площадей по наименьшей:

- обтачивание болта.
- высверливание канала.



а) *б*) *в*)