Расчетная работа № 4

Движение подводной лодки

Содержательная постановка задачи

Подводная лодка, находящаяся в момент времени t на глубине h от поверхности моря и движущаяся с постоянной горизонтальной скоростью v, получает приказ подняться на поверхность.

Разработать математическую модель, позволяющую описать движение всплывающей подводной лодки .
Модель должна позволять:
- вычислять положение лодки в любой момент времени;
- определять горизонтальное перемещение и время всплытия при различных начальных данных.

Исходные данные:
- Функция изменения общей плотности лодки;
- начальные координаты, начальная скорость лодки;
- плотность и коэффициент сопротивления воды.

Концептуальная постановка задачи

Рассмотрим процесс всплытия подводной лодки с глубины. Резервуары лодки освобождаются от воды и заполняются воздухом, чтобы ее средняя плотность $\rho_1(t)$ стала меньше плотности воды ρ_0 .Тогда на лодку начинает действовать выталкивающая сила Архимеда, большая, чем вес лодки. Кроме того, действует сила сопротивления воды

Гипотезы:

1. объектом моделирования является подводная лодки;
2. лодку будем считать материальной точкой переменной массы, положение которой совпадает с центром масс;
3. движение происходит в поле сил тяжести с постоянным ускорением свободного падения ***g*** под действием силы Архимеда и описывается уравнениями классической механики Ньютона;
4. движение лодки происходит в одной плоскости, перпендикулярной поверхности Земли ;
5. пренебрегаем сопротивлением воды и изменением плотности лодки.

Математическая постановка:

Уравнения движения лодки

$$\rho_1(t)V\frac{d^2x}{d\,t^2} = 0$$

$$\rho_1(t)V\frac{d^2y}{d\,t^2} = \rho_0 gV - \rho_1(t)gV - k\rho_1(t)V\frac{dy}{d\,t}$$

x(*t*), y (*t*)– координаты лодки в момент времени *t*

$\rho_1(t)$ – средняя плотность лодки в момент времени *t* (*const*),
ρ_0 – плотность воды,
k– коэффициент сопротивления воды (для начала не учитываем k =0)

Начальные условия:

$$x(0) = 0, \quad \mathrm{y}(0) = -h$$

$$\dot{x}(0) = v,\ \dot{y}(0) = 0$$

Аналитическое решение

Закон движения лодки: $$y(t) = g\,\frac{\rho_0-\rho_1}{\rho_1}\frac{t^2}{2} - h$$

$$x(t) = v\,t$$

Определим время всплытия лодки:

$$y(t_k) = g\,\frac{\rho_0-\rho_1}{\rho_1}\frac{{t_k}^2}{2} - h = 0 \qquad t_k = \sqrt{\frac{2h\rho_1}{g(\rho_0-\rho_1)}}$$

Путь, пройденный лодкой до всплытия (горизонтальное перемещение):

$$L = v\,t_k = v\sqrt{\frac{2h\rho_1}{g(\rho_0-\rho_1)}}$$

Траектория движения в плоскости Oxy

$$y(x) = g\,\frac{\rho_0-\rho_1}{\rho_1}\frac{1}{2v^2}x^2 - h$$

Численное решение методом Эйлера

Учтем, что средняя плотность лодки уменьшается со временем,

и действует сила сопротивления воды при движении лодки.

Чтобы записать расчетную схему метода Эйлера, дифференциальное уравнение второго порядка заменим двумя уравнениями первого порядка:

$$\dot{y} = v_y(t)$$

$$\dot{v}_y(t) = g\frac{\rho_0 - \rho_1(t)}{\rho_1(t)} - kv_y(t)$$

Тогда схема метода Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + \tau\, v_{yk}$$

$$v_{yk+1} = v_{yk} + \tau\left(g\frac{\rho_0 - \rho_1(t)}{\rho_1(t)} - kv_{yk}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Задание по Расчетной работе № 4

1. С помощью пакета «Wolfram Mathematica» решить задачу движения лодки без учета сопротивления воды аналитически. Построить график решения. Вычислить время всплытия и горизонтальное перемещение.
2. Рассмотреть решения при различных значениях начальной горизонтальной скорости и плотности лодки. Результаты оформить в виде таблицы (в тетради):

			Время всплытия, t_k	Горизонтальное перемещение, L
1				
2…				

3. Решить задачу с учетом сопротивления воды и изменения средней плотности лодки:

    -- решить уравнения движения численно методом Эйлера;

    -- результаты изобразить графически.

    -- рассмотреть решения при различных значениях начальной горизонтальной скорости и плотности лодки. Результаты оформить в виде таблицы