

Расчетная работа № 4

Движение подводной лодки

Содержательная постановка задачи

Подводная лодка, находящаяся в момент времени t на глубине h от поверхности моря и движущаяся с постоянной горизонтальной скоростью v , получает приказ подняться на поверхность.

Разработать математическую модель, позволяющую описать движение всплывающей подводной лодки .

Модель должна позволять:

- вычислять положение лодки в любой момент времени;
- определять горизонтальное перемещение и время всплытия при различных начальных данных.

Исходные данные:

- Функция изменения общей плотности лодки;
- начальные координаты, начальная скорость лодки;
- плотность и коэффициент сопротивления воды.

Концептуальная постановка задачи

Рассмотрим процесс всплытия подводной лодки с глубины. Резервуары лодки освобождаются от воды и заполняются воздухом, чтобы ее средняя плотность $\rho_1(t)$ стала меньше плотности воды ρ_0 . Тогда на лодку начинает действовать выталкивающая сила Архимеда, большая, чем вес лодки. Кроме того, действует сила сопротивления воды

Гипотезы:

1. объектом моделирования является подводная лодка;
2. лодку будем считать материальной точкой переменной массы, положение которой совпадает с центром масс;
3. движение происходит в поле сил тяжести с постоянным ускорением свободного падения g под действием силы Архимеда и описывается уравнениями классической механики Ньютона;
4. движение лодки происходит в одной плоскости, перпендикулярной поверхности Земли ;
5. пренебрегаем сопротивлением воды и изменением плотности лодки.

Математическая постановка:

Уравнения движения лодки

$$\rho_1(t)V \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$\rho_1(t)V \frac{d^2y}{dt^2} = \rho_0 gV - \rho_1(t)gV - k\rho_1(t)V \frac{dy}{dt}$$

$x(t)$, $y(t)$ – координаты лодки в момент времени t

$\rho_1(t)$ – средняя плотность лодки в момент времени t (*const*),

ρ_0 – плотность воды,

k – коэффициент сопротивления воды (для начала не учитываем $k=0$)

Начальные условия:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = -h$$

$$\dot{x}(0) = v, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Аналитическое решение

Закон движения лодки:

$$y(t) = g \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1} \frac{t^2}{2} - h$$
$$x(t) = v t$$

Определим время всплытия лодки:

$$y(t_k) = g \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1} \frac{t_k^2}{2} - h = 0$$
$$t_k = \sqrt{\frac{2h\rho_1}{g(\rho_0 - \rho_1)}}$$

Путь, пройденный лодкой до всплытия (горизонтальное перемещение):

$$L = v t_k = v \sqrt{\frac{2h\rho_1}{g(\rho_0 - \rho_1)}}$$

Траектория движения в плоскости Оху

$$y(x) = g \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1} \frac{1}{2v^2} x^2 - h$$

Численное решение методом Эйлера

Учтем, что средняя плотность лодки уменьшается со временем,
и действует сила сопротивления воды при движении лодки.

Чтобы записать расчетную схему метода Эйлера, дифференциальное уравнение второго порядка заменим двумя уравнениями первого порядка:

$$\dot{y} = v_y(t)$$

$$\dot{v}_y(t) = g \frac{\rho_0 - \rho_1(t)}{\rho_1(t)} - k v_y(t)$$

Тогда схема метода Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + \tau v_{yk}$$

$$v_{yk+1} = v_{yk} + \tau \left(g \frac{\rho_0 - \rho_1(t)}{\rho_1(t)} - k v_{yk} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Задание по Расчетной работе № 4

1. С помощью пакета «Wolfram Mathematica» решить задачу движения лодки без учета сопротивления воды аналитически. Построить график решения. Вычислить время всплытия и горизонтальное перемещение.
2. Рассмотреть решения при различных значениях начальной горизонтальной скорости и плотности лодки. Результаты оформить в виде таблицы (в тетради):

			Время всплытия, t_k	Горизонтально е перемещение, L
1				
2...				

3. Решить задачу с учетом сопротивления воды и изменения средней плотности лодки.
 - решить уравнения движения численно методом Эйлера;
 - результаты изобразить графически.
 - рассмотреть решения при различных значениях начальной горизонтальной скорости и плотности лодки. Результаты оформить в виде таблицы

