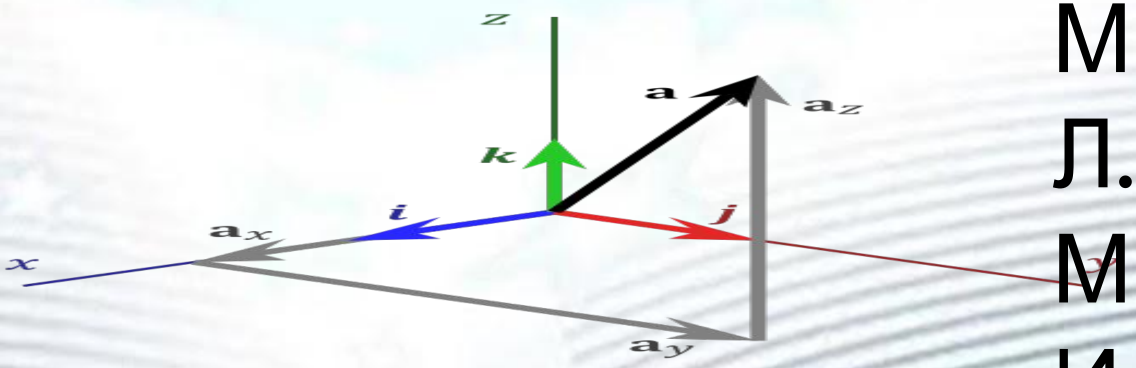
ГБПОУ «Пермский политехнический колледж имени Н.Г. Славянова»

Векторы в пространстве



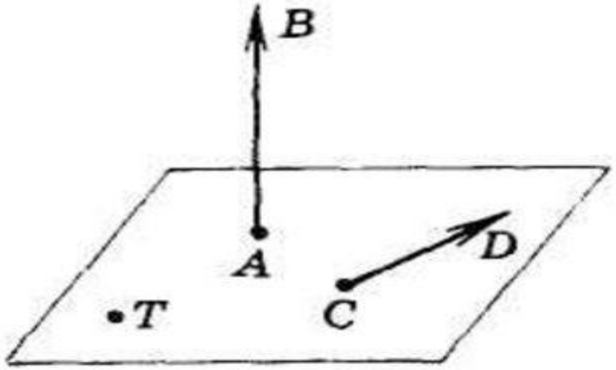
М.Г. Мингазова
Л.В. Мелюхина
И.В.Рягузова

Определение вектора.

Геометрически векторы изображаются направленными отрезками. ***Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется <u>вектором</u>.***

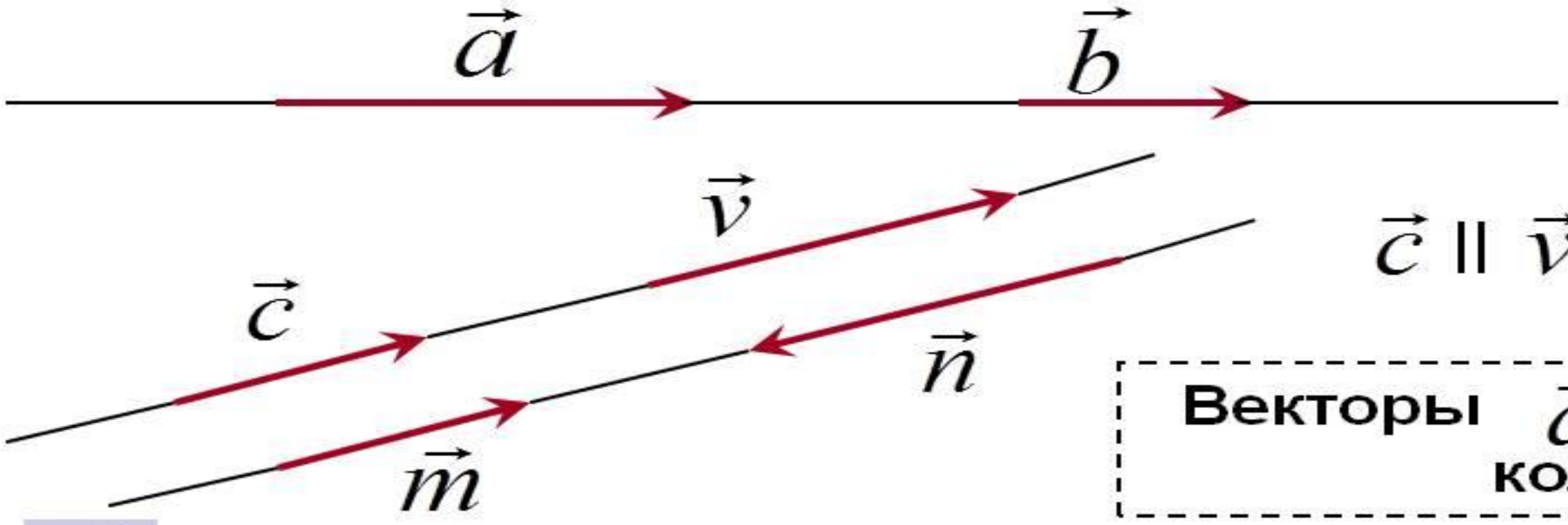
Вектор характеризуется следующими элементами:

1. начальной точкой (точкой приложения);
2. направлением;
3. длиной («модулем вектора»)



Коллинеарные векторы

Ненулевые векторы наз. *коллинеарными*, если изображающие их направленные отрезки параллельны или лежат на одной прямой.



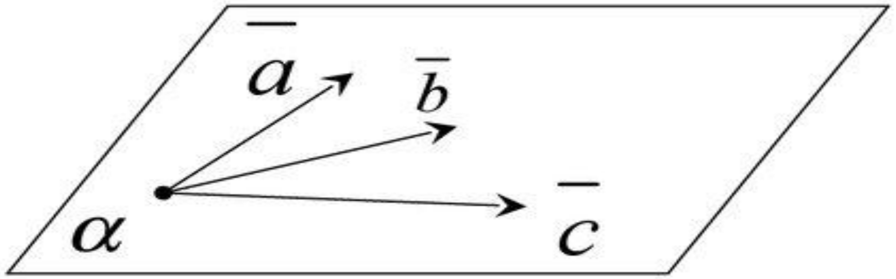
$\vec{a} \parallel \vec{b}$

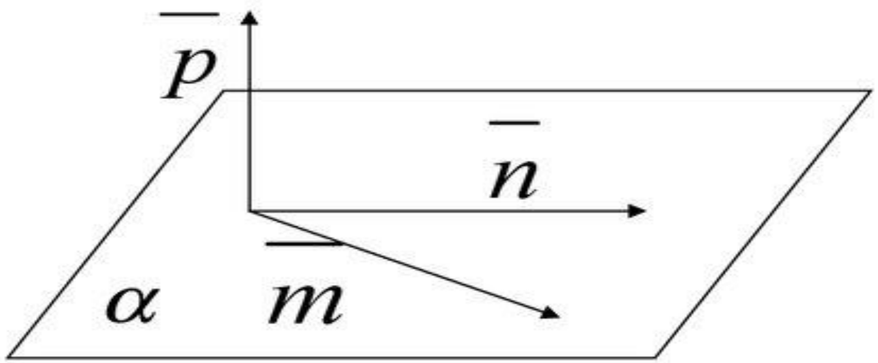
$\vec{c} \parallel \vec{v} \parallel \vec{m} \parallel \vec{n}$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарные

Компланарные векторы

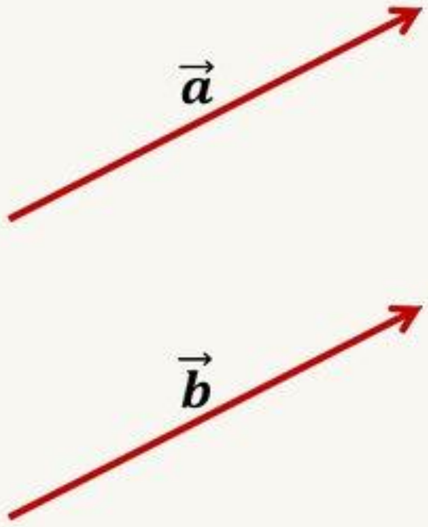
Три вектора называются компланарными, если они лежат в одной или параллельных плоскостях.





$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарны, $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$ – некомпланарны.

Равные векторы

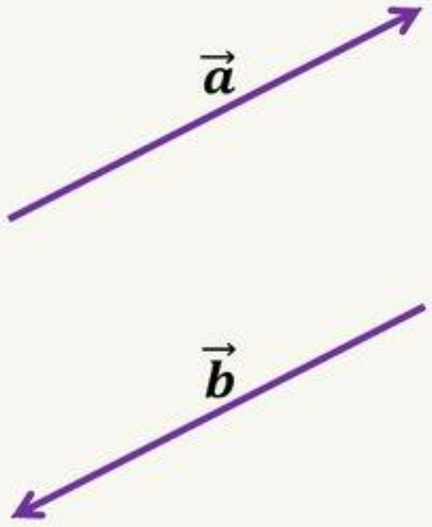


$$\vec{a} = \vec{b}$$

1. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
2. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Равными называют сонаправленные векторы, длины которых равны.

Противоположные векторы



$$\vec{a} = -\vec{b}$$

1. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$
2. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

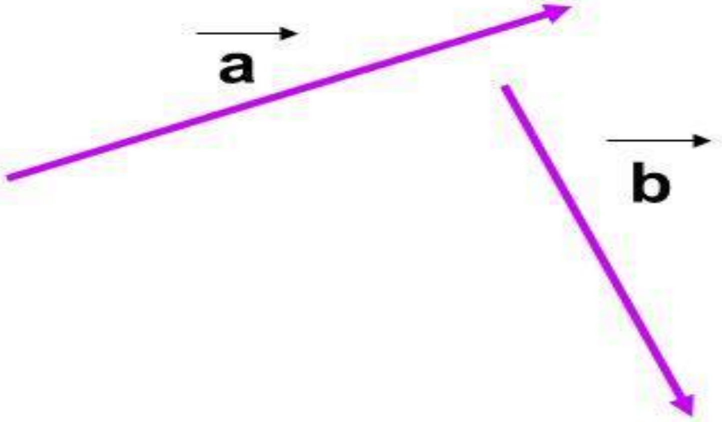
Противоположными называют противоположно направленные векторы, длины которых равны.

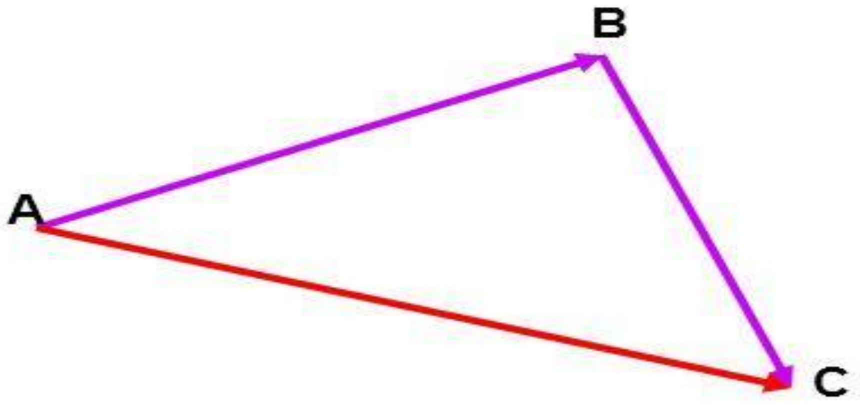
Сложение и вычитание векторов

- **Сложение и вычитание векторов.**

1. Правило треугольника

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

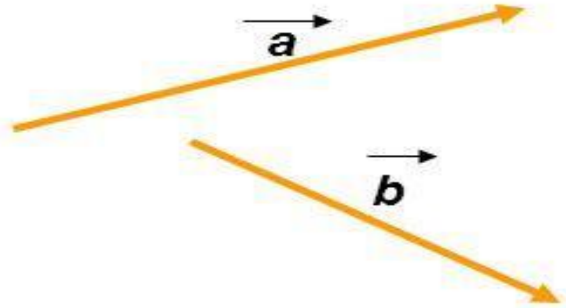


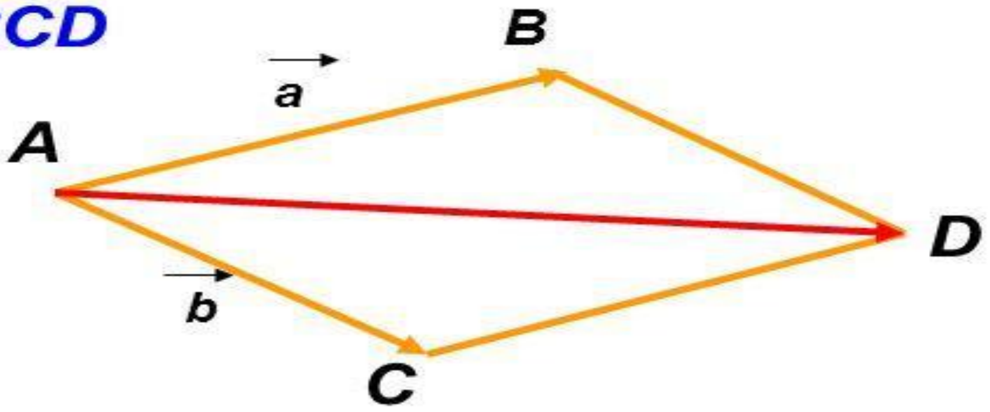


2. Правило параллелограмма

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, где AD –

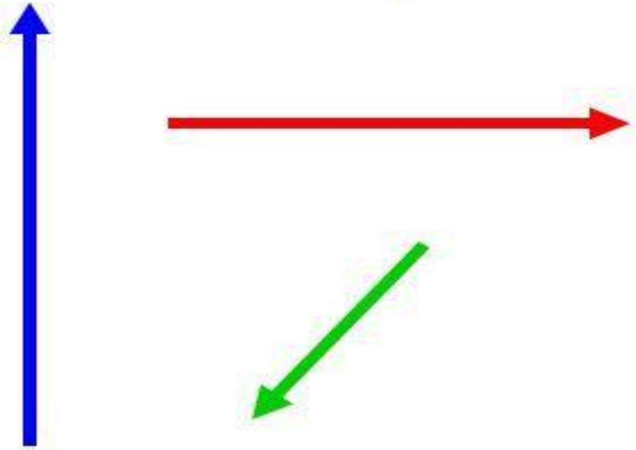
диагональ параллелограмма $ABCD$

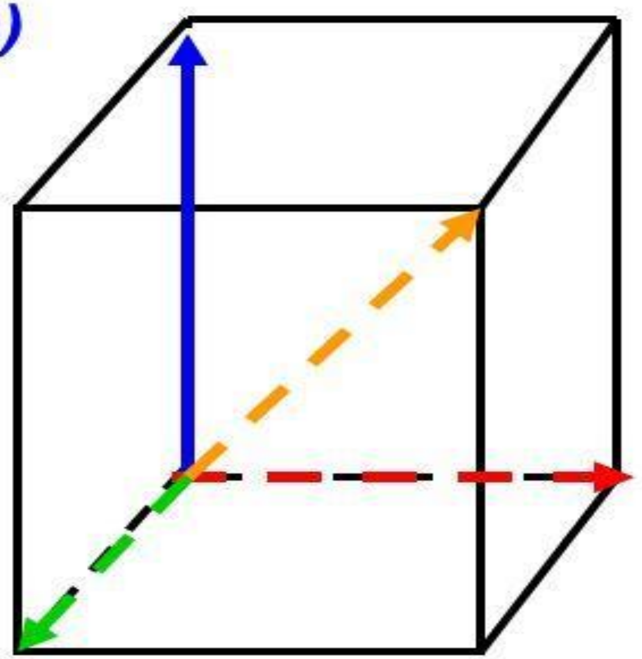




Правило параллелепипеда (для трех некомпланарных векторов)

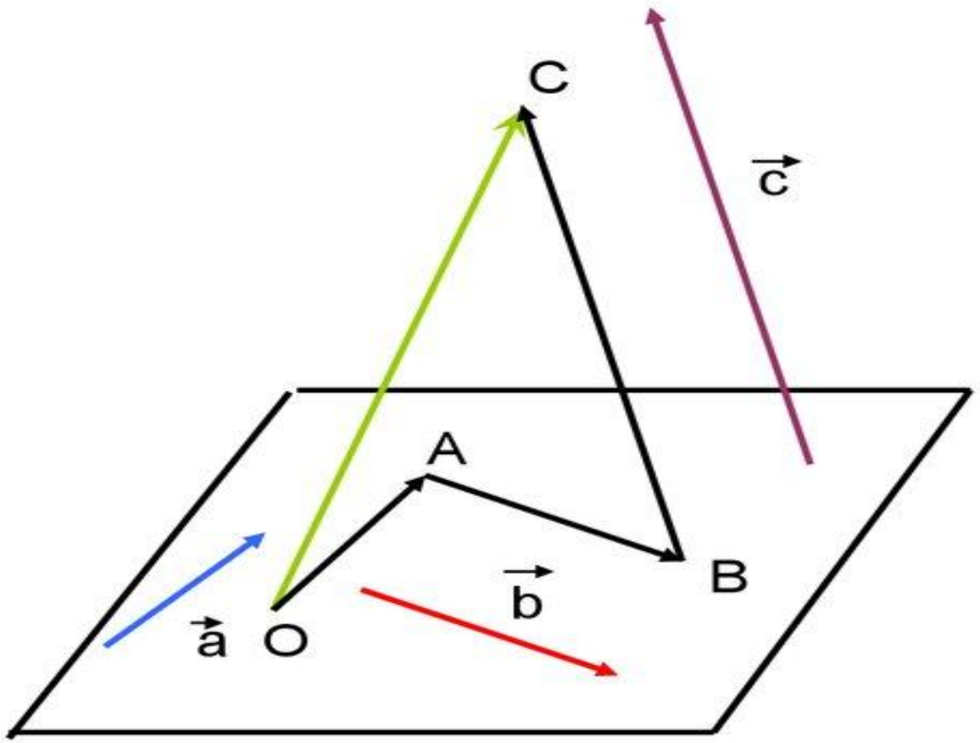
$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$, где OC – диагональ параллелепипеда





Сложение нескольких векторов.

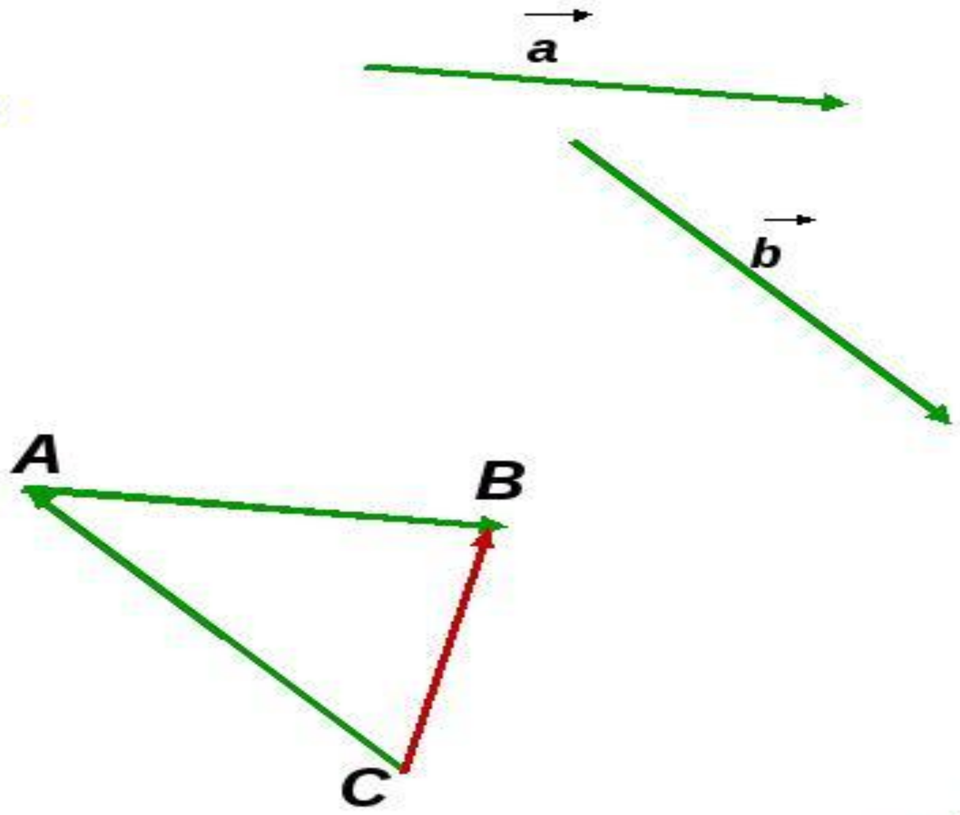
- Сложение нескольких векторов в пространстве выполняется так же, как и на плоскости: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма — с третьим вектором и т. д. Из законов сложения векторов следует, что **сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.**



$\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

3. Разность векторов

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$

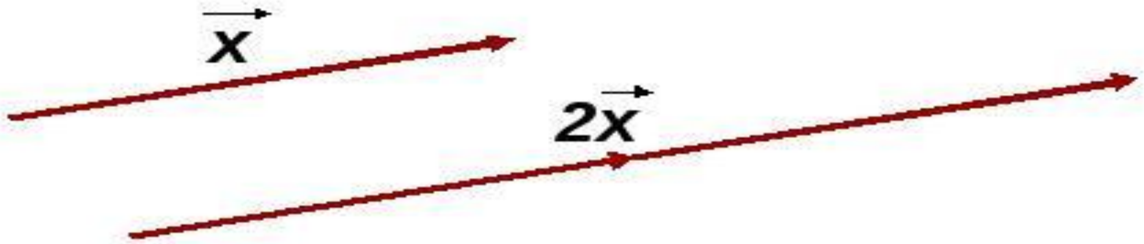


Умножение вектора на число

$\vec{b} = k\vec{a}$, если $|\vec{b}| = |k|\,|\vec{a}|$

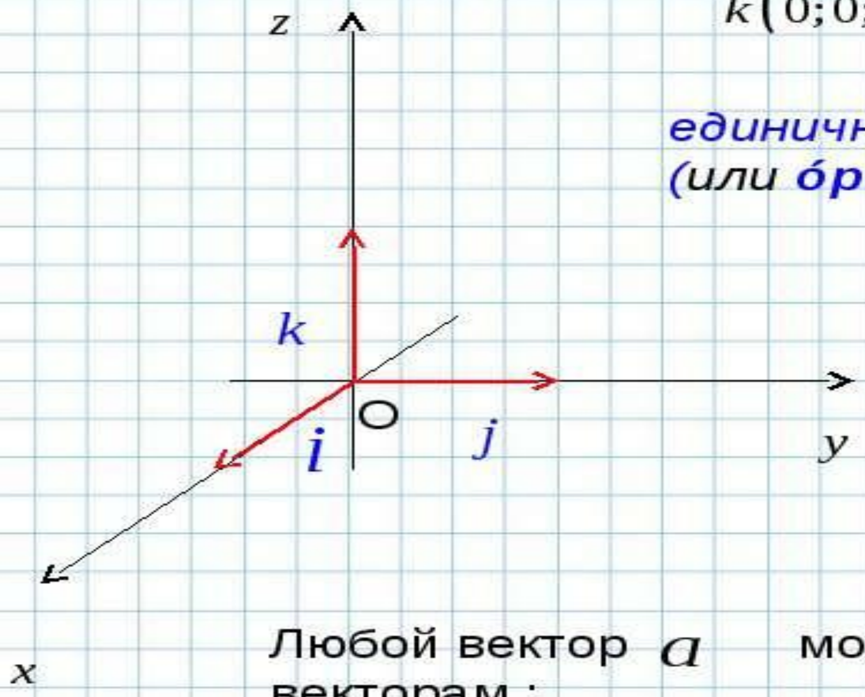
если $k > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

если $k < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$



Координаты вектора.

В прямоугольной системе координат в пространстве векторы $i(1;0;0)$, $j(0;1;0)$ $k(0;0;1)$ называются *единичными координатными векторами (или **óртами**)*.

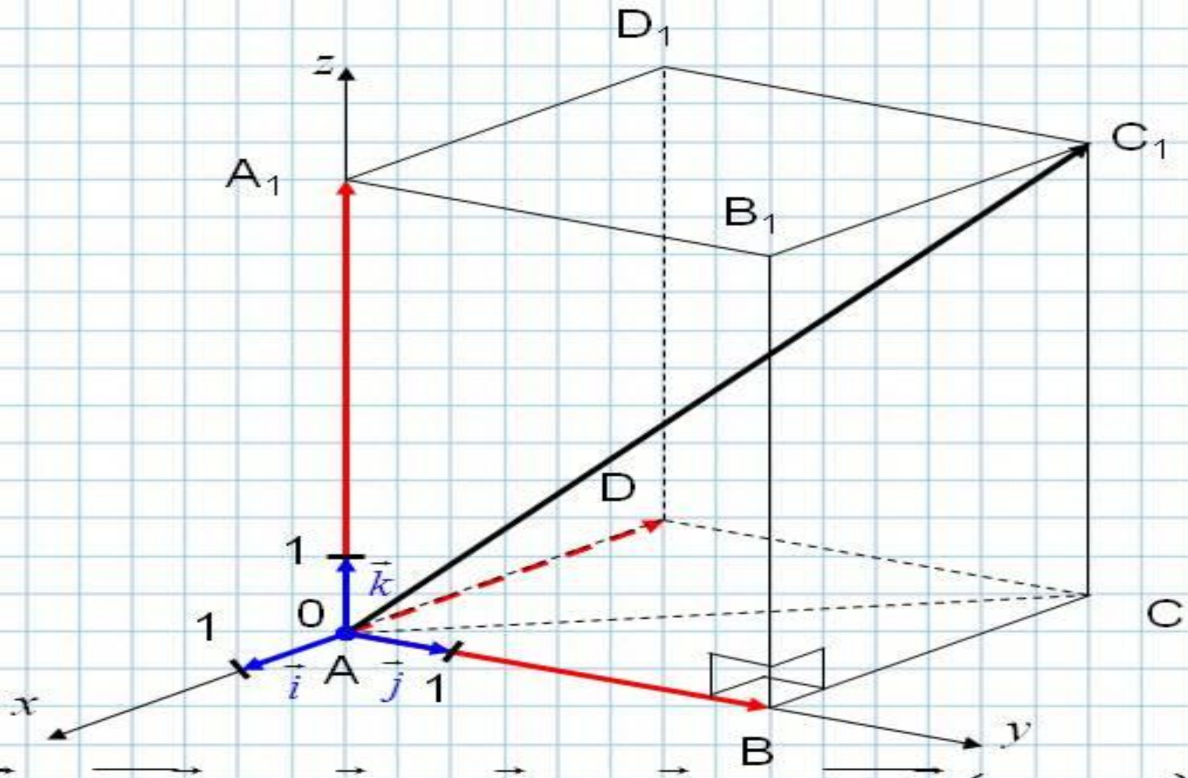


Любой вектор a можно разложить по координатным векторам :

$$a = xi + yj + zk$$

коэффициенты разложения x, y, z определяется единственным образом.

В прямоугольной системе координат в пространстве векторы $\vec{i}(1;0;0)$, $\vec{j}(0;1;0)$ и $\vec{k}(0;0;1)$ называются *единичными координатными векторами (или **ортами**)*. Т.к. эти векторы являются некомпланарными, то любой вектор пространства можно разложить по ортам. При этом образуется прямоугольный параллелепипед, а коэффициенты разложения – координаты данного вектора.



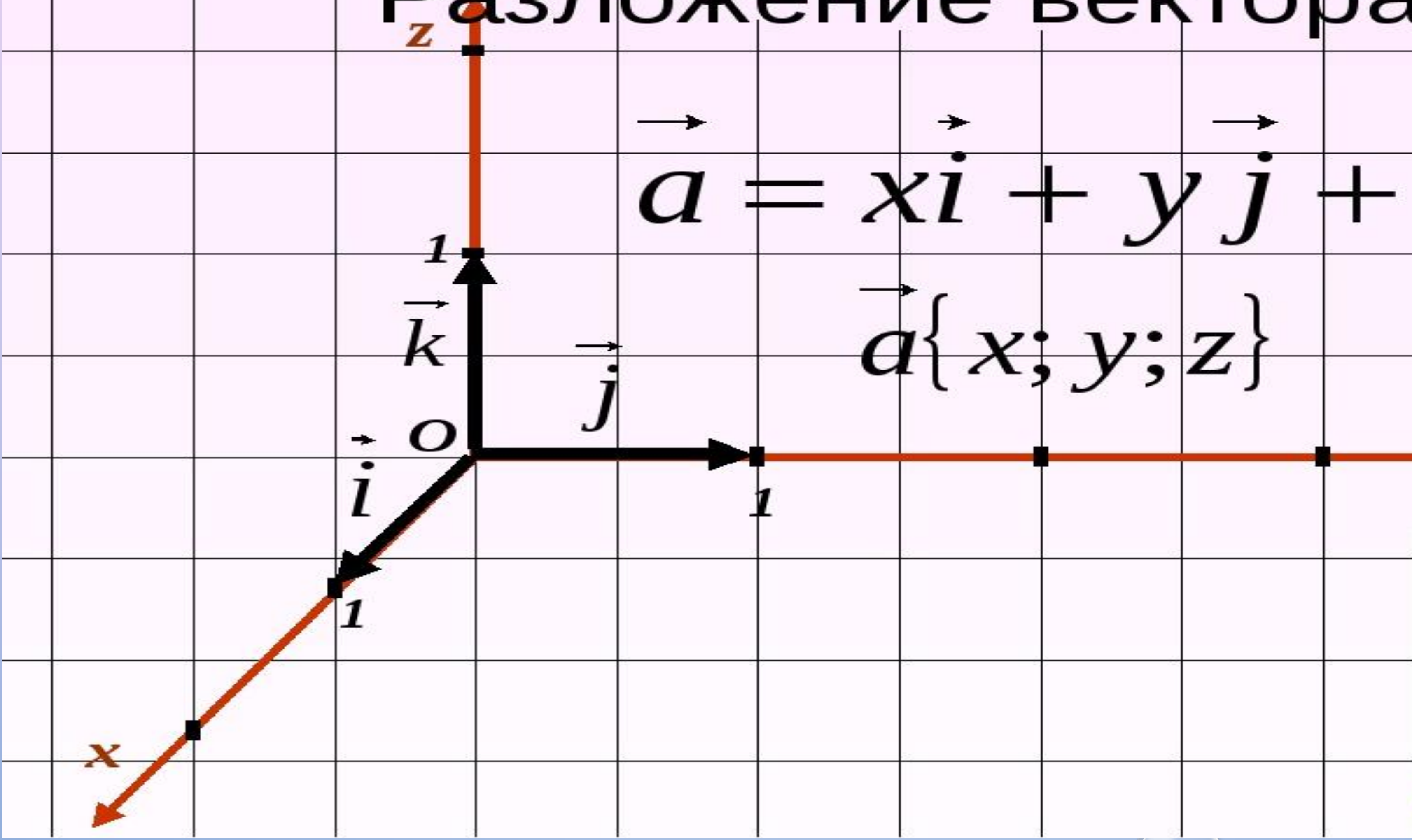
$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AC_1}(x;y;z)$$

В данном случае $x=-3$; $y=4$; $z=6$, т.е. координаты вектора $\overrightarrow{AC_1}(-3;4;6)$.

Разложение вектора

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{a}\{x; y; z\}$$



Действия над векторами, заданными своими координатами (проекциями).

Пусть $\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}$ или $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$

$\overline{b} = b_x \overline{i} + b_y \overline{j} + b_z \overline{k}$ или $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$

- Сумма (разность):

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$$

- Умножение вектора на скаляр:

$$\lambda \cdot \overline{a} = \lambda \cdot (a_x; a_y; a_z) = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$$

Условие коллинеарности двух векторов

Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ***коллинеарны*** тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т.е. когда справедливо равенство

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}}$$

Компланарность векторов

- Три вектора $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$,
$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$,
$\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$,

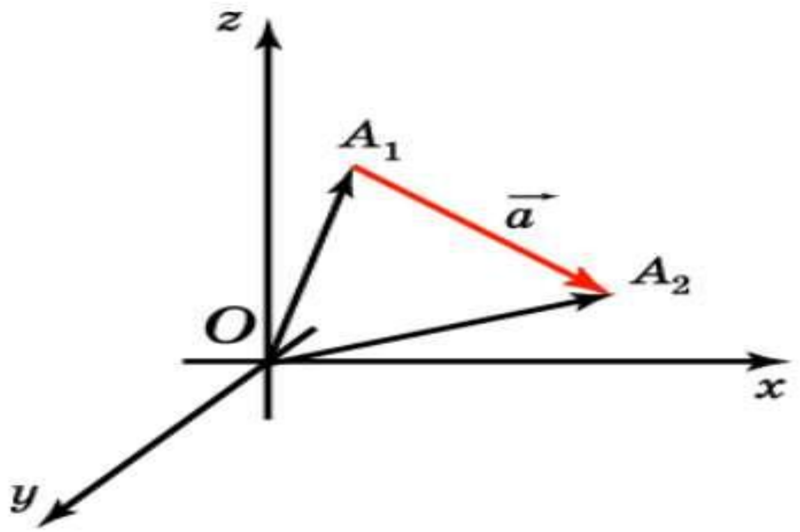
компланарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

ДЛИНА ВЕКТОРА

Если вектор a задан координатами начальной и конечной точек, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то его длина выражается формулой

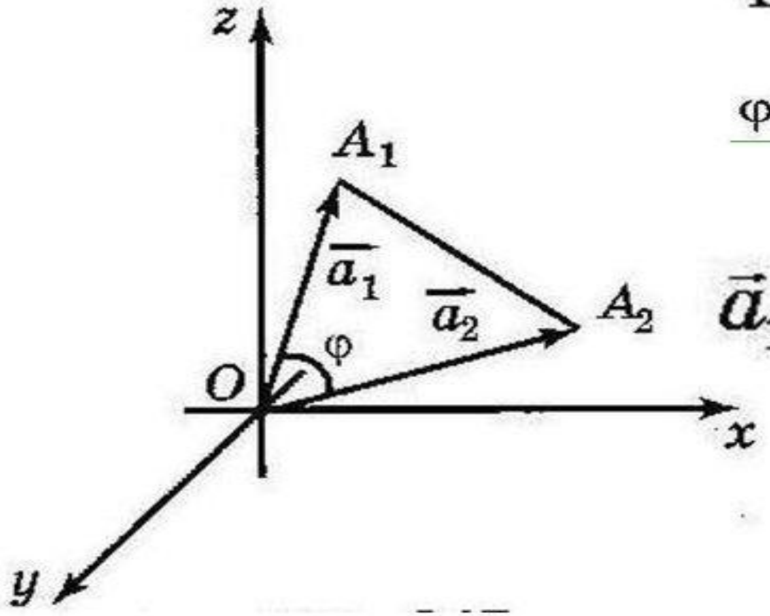
$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$



Скалярное произведение векторов

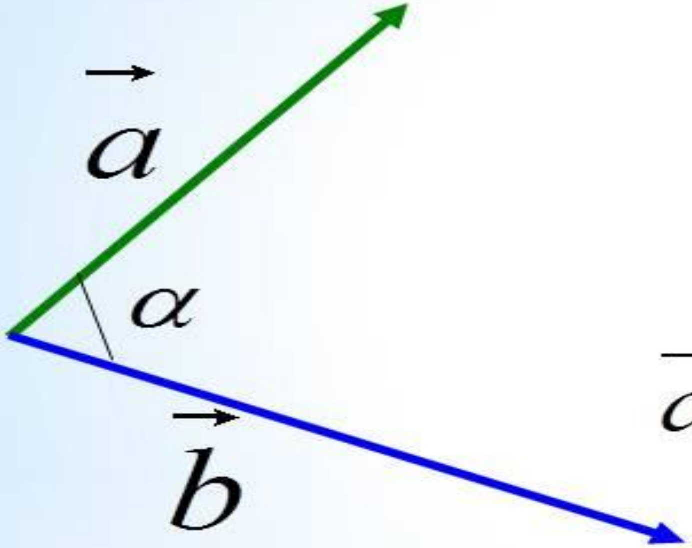
$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos\varphi,$$

φ — угол между векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.



$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Скалярное произведение векторов.



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

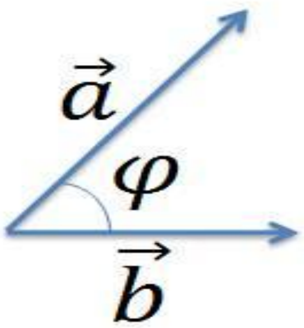
$$\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}\quad\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$$

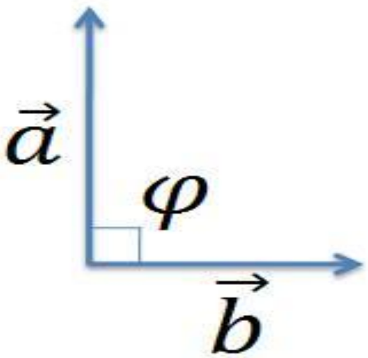
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

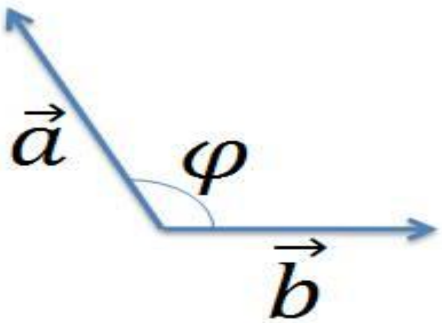
$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Скалярное умножение векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$







$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ $\qquad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\qquad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

Применение векторов

Задача.

Дано:

AODMPBTC –

прямоугольный параллелепипед

OA = 2, OD = 3, OB = 5, MK = 1.

Определить:

координаты векторов:

$\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{BC}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Решение:

$\vec{a}$: x = OA = 2; y = OD = 3; z = OB = 5

$\vec{a}\{2;\ 3;\ 5\}$

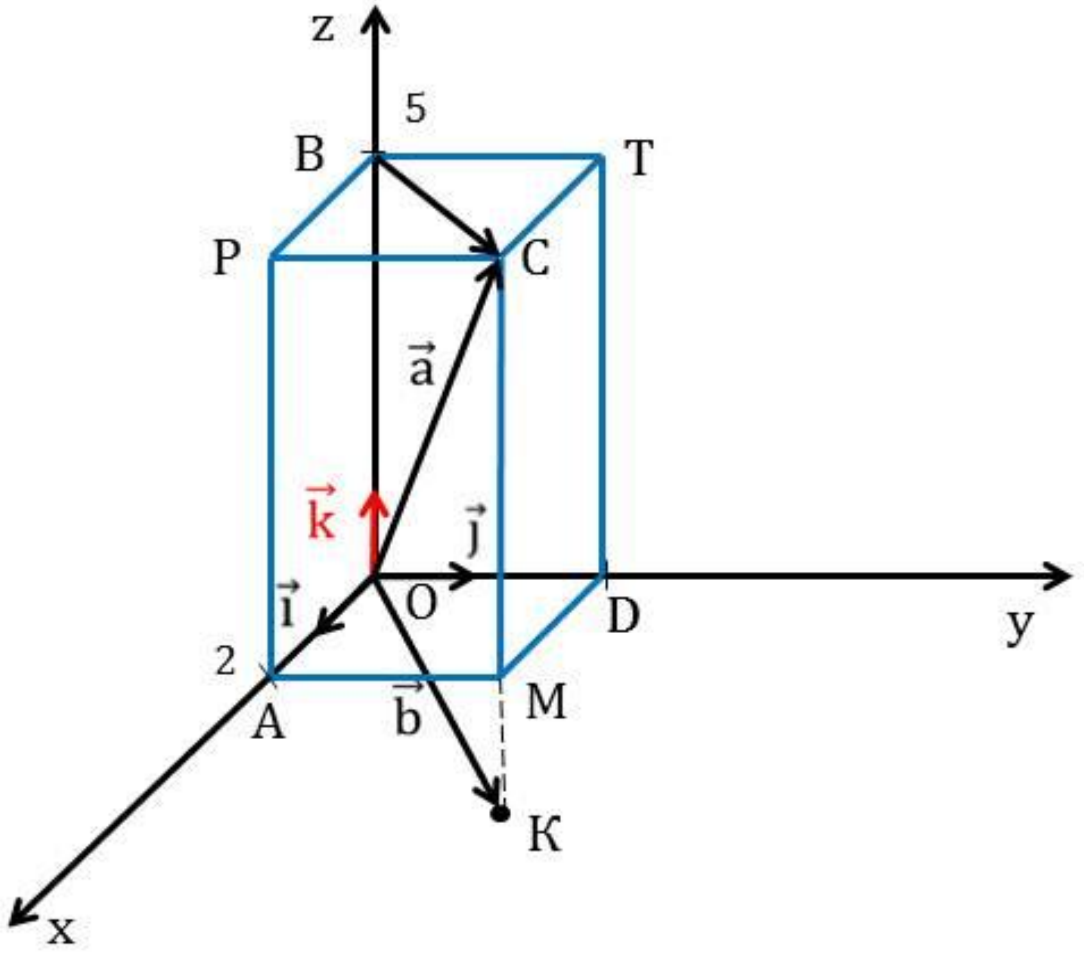
$\vec{b}$: z = MK = -1; x = OA = 2; y = OD = 3

$\vec{b}\{2;\ 3;\ -1\}$

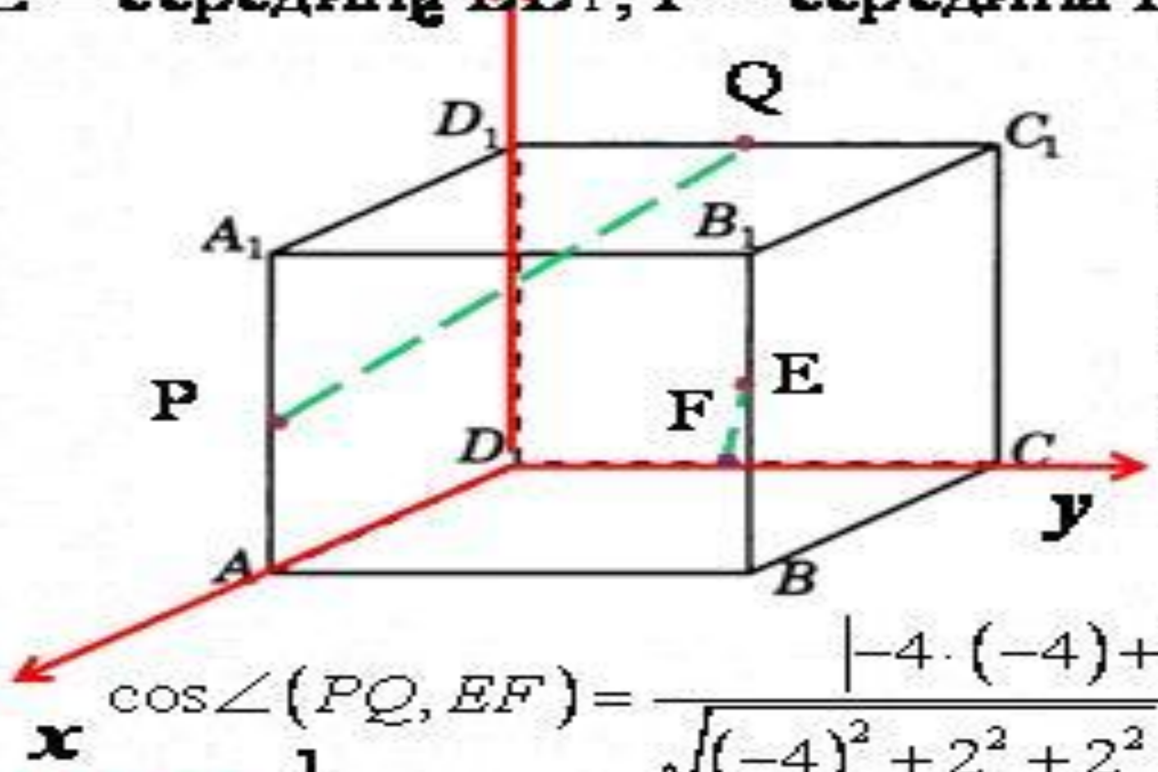
$\overrightarrow{BC}$: x = OA = 2; y = OD = 3; z = 0

$\overrightarrow{BC}\{2;\ 3;\ 0\}$

$\vec{i}\{1;\ 0;\ 0\}; \vec{j}\{0;\ 1;\ 0\}; \vec{к}\{0;\ 0;\ 1\}$



№ 2. Ребро куба равно 4. Найдите косинус угла между прямыми PQ и EF, P – середина AA_1, Q – середина C_1D_1, E – середина BB_1, F – середина DC.



P (4; 0; 2)

Q (0; 2; 4)

E (4; 4; 2)

F (0; 2; 0)

$\overrightarrow{PQ}\{-4;2;2\}$

$\overrightarrow{EF}\{-4;-2;-2\}$

$$\cos\angle(PQ,EF)=\frac{\left|-4\cdot(-4)+2\cdot(-2)+2\cdot(-2)\right|}{\sqrt{(-4)^2+2^2+2^2}\,\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

Задача 3.

Дано:

OA = 4, OB = 9, OC = 2

Найти:

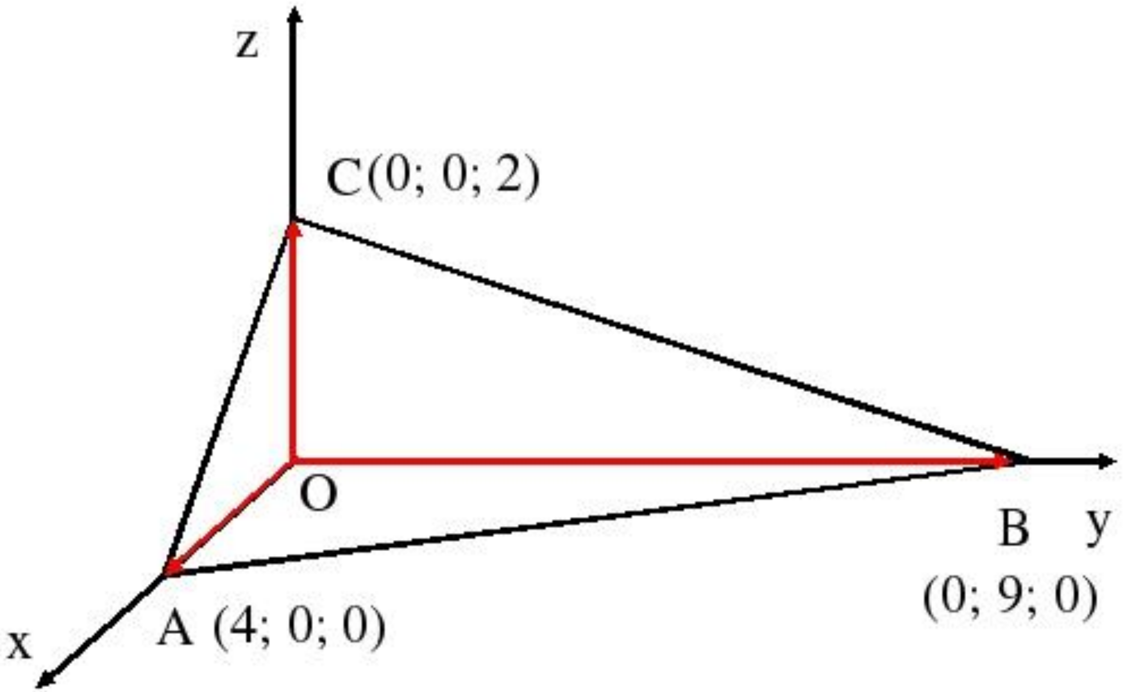
координаты $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}$

Решение:

$\overrightarrow{AC}\{0-4;\ 0-0; 2-0\} = \{-4; 0; 2\}$

$\overrightarrow{CB}\{0-0;\ 9-0; 0-2\} = \{0; 9; -2\}$

$\overrightarrow{AB}\{0-4;\ 9-0; 0-0\} = \{-4; 9; 0\}$



МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

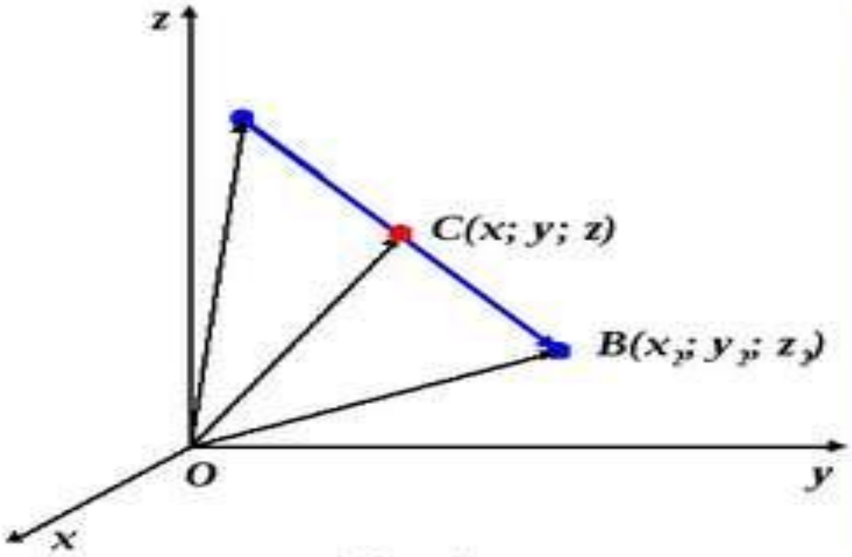


Рис. 4

Координаты вектора

$$\overrightarrow{OC}\{x; y; z\}, \overrightarrow{OA}\{x_1; y_1; z_1\}, \overrightarrow{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$$

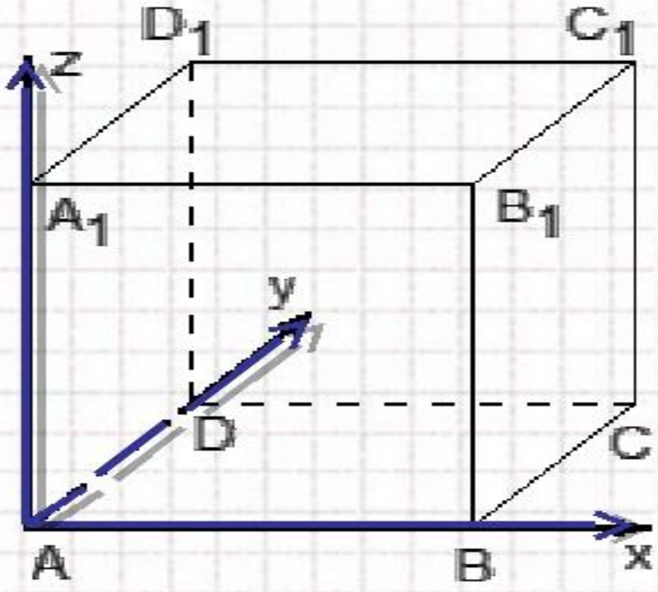
Координаты середины отрезка

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Координатный метод

В единичном кубе $A \ldots D_1$ найти расстояние от точки A до плоскости BC_1D.



Решение:

Координаты точек $A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$; $C_1(1;1;1)$ и $D(0;1;0)$ подставим в общее уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$ и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 1 + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ a + b + c + d = 0; \\ b + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -d \\ b = -d \\ c = d \end{cases}$$

тогда $-dx - dy + dz + d = 0$, $\quad x + y - z - 1 = 0$,

следовательно $\rho(A; (BC_1D)) = \frac{|0 + 0 - 0 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Примеры решения задач ЕГЭ

С2 Дан ABCDA1B1C1D1 –прямоугольный параллелепипед AA1=3, AD=8, AB=6, точка E- середина ребра AB, точка F-середина ребраB1C1 . Найдите угол между прямой EF и плоскостью ADD1.

Решение: (векторно-координатный способ)

Введем прямоугольную систему координат

С началом в точке А, тогда угол между

векторами $\overrightarrow{AN}$ {0;4;3} и $\overrightarrow{AF1}$ {3;4;3} // EF и

будет искомым .

$$\text{Cos a} = \frac{i+9}{5\sqrt{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}} = \underline{\qquad}$$

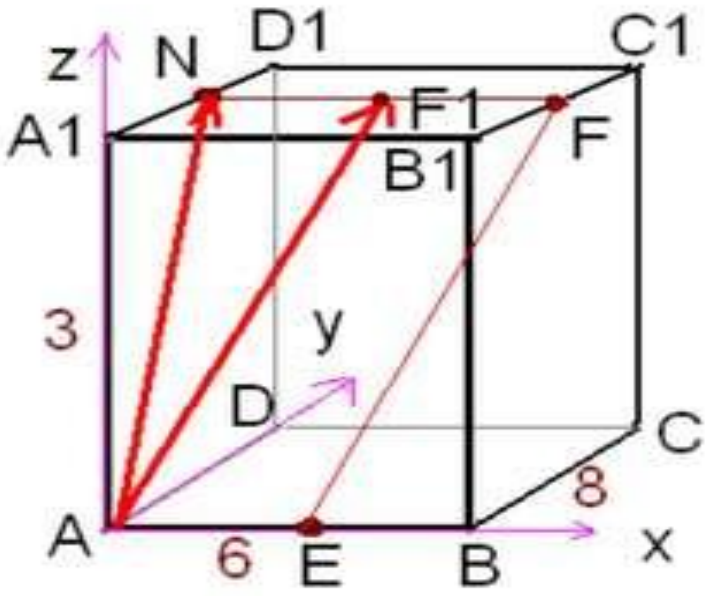
Косинус угла найден с помощью

формулы скалярного произведения двух

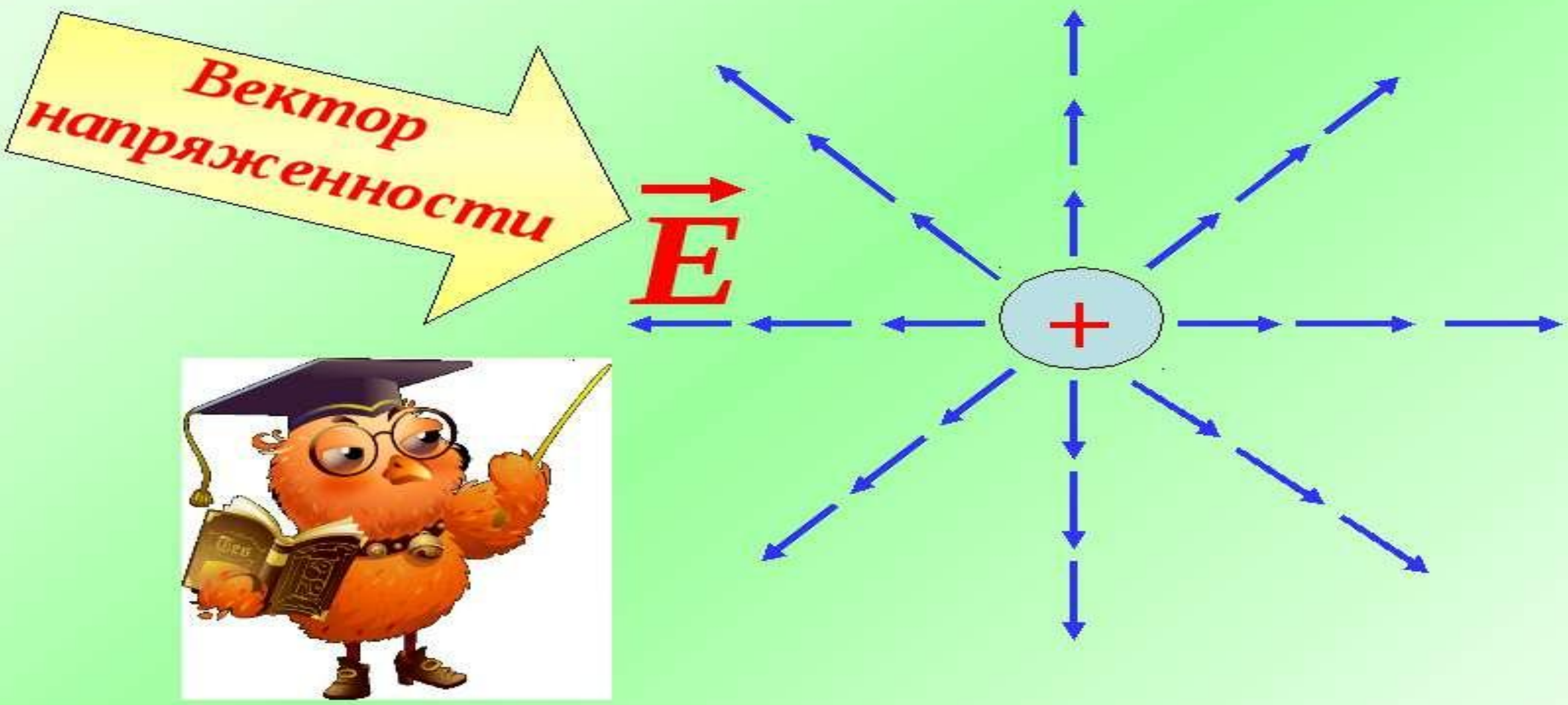
векторов.

Преимущество метода в этом случае

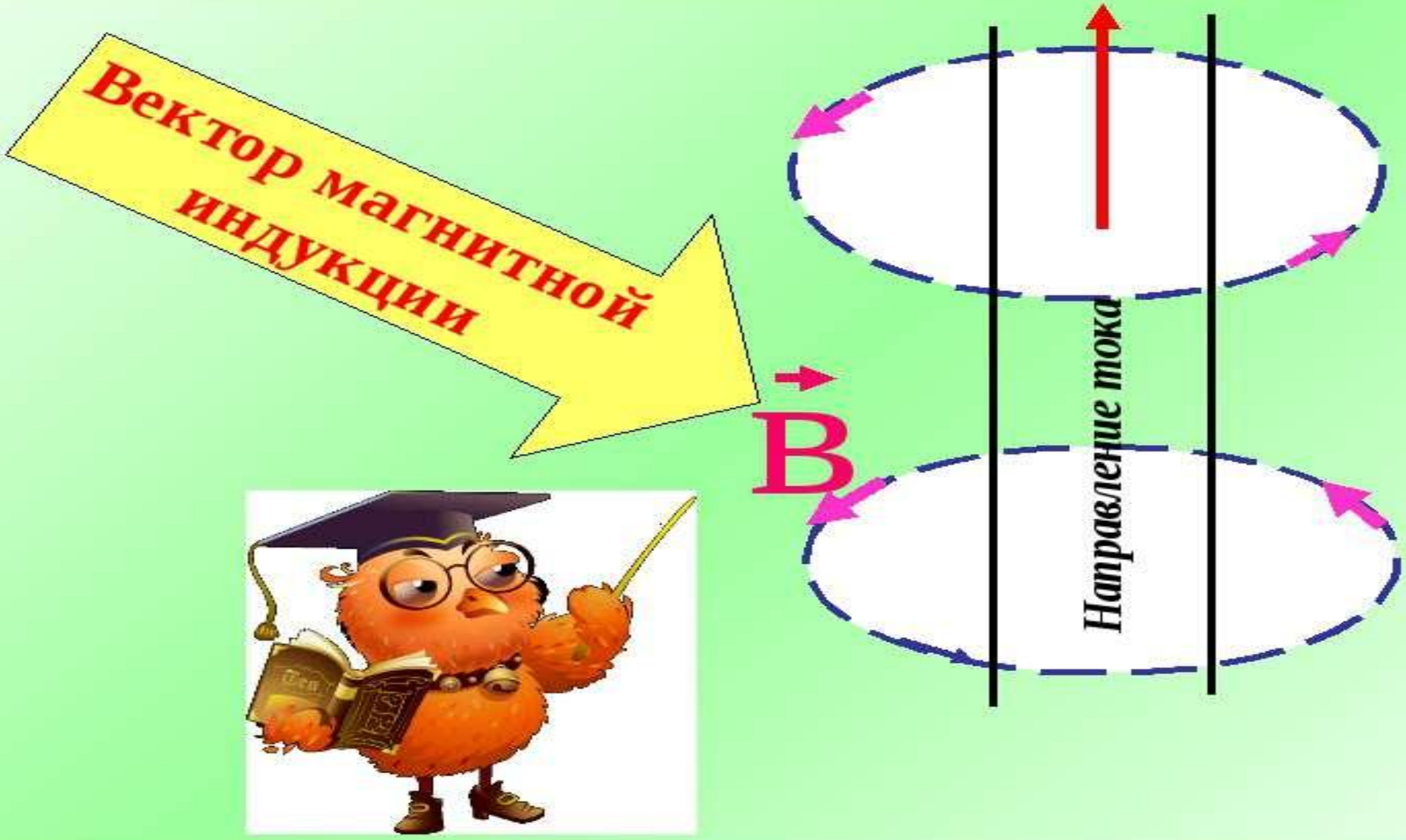
очевидно.



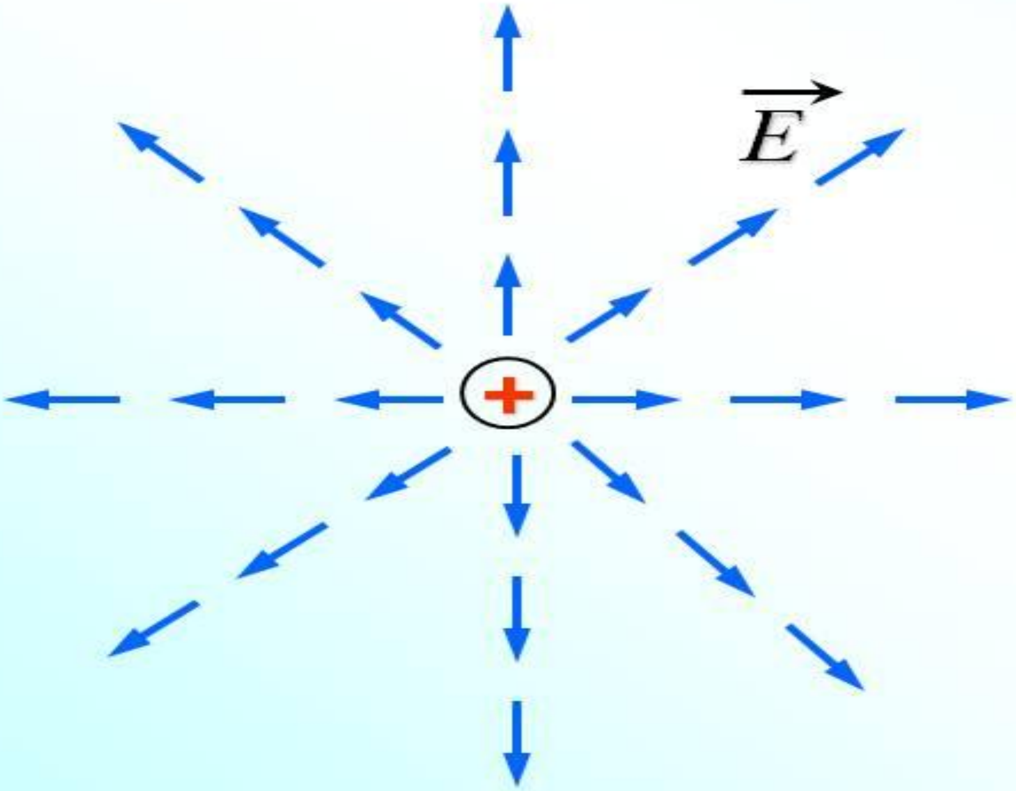
Электрическое поле



Магнитное поле



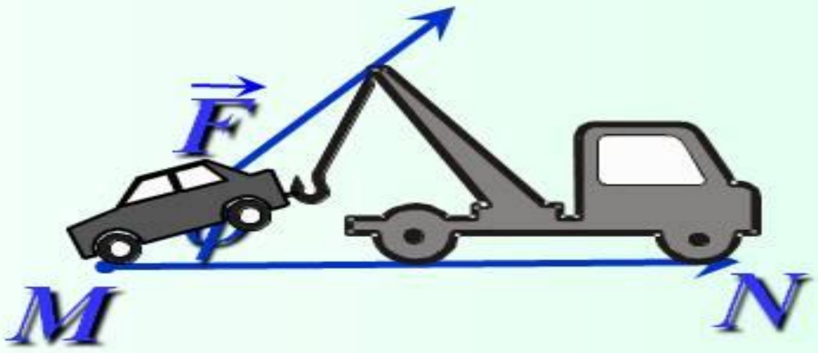
Многие физические величины, например сила перемещение, скорость, являются векторными величинами. При изучении электрических и магнитных явлений появляются новые примеры векторных величин.



Электрическое поле, создаваемое в пространстве зарядами, характеризуется в каждой точке пространства вектором напряженности электрического поля.

На рисунке изображены векторы напряженности электрического поля положительного точечного заряда.

Скалярное произведение в физике

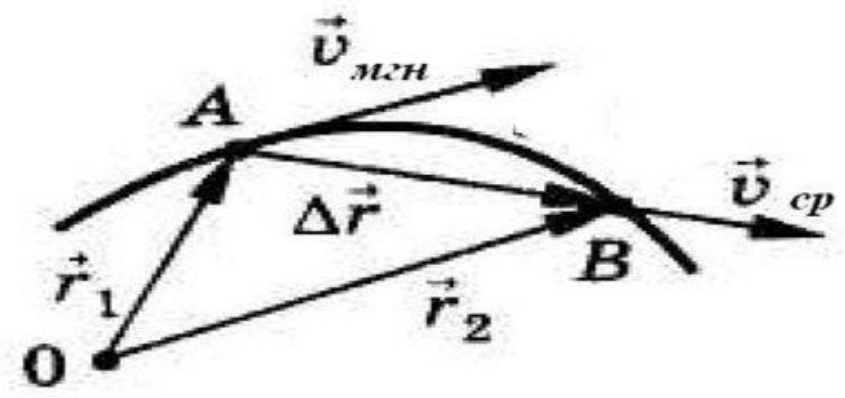


Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа $\mathbf{A}$ постоянной силы $\vec{\mathbf{F}}$ при перемещении тела из точки $\mathbf{M}$ в точку $\mathbf{N}$ равна произведению силы $\vec{\mathbf{F}}$ и перемещения $\overrightarrow{\mathbf{MN}}$ на косинус угла между ними.

$$\mathbf{A} = |\vec{\mathbf{F}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{MN}}| \cos\varphi$$

$$\mathbf{A} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{MN}}$$

Средняя скорость

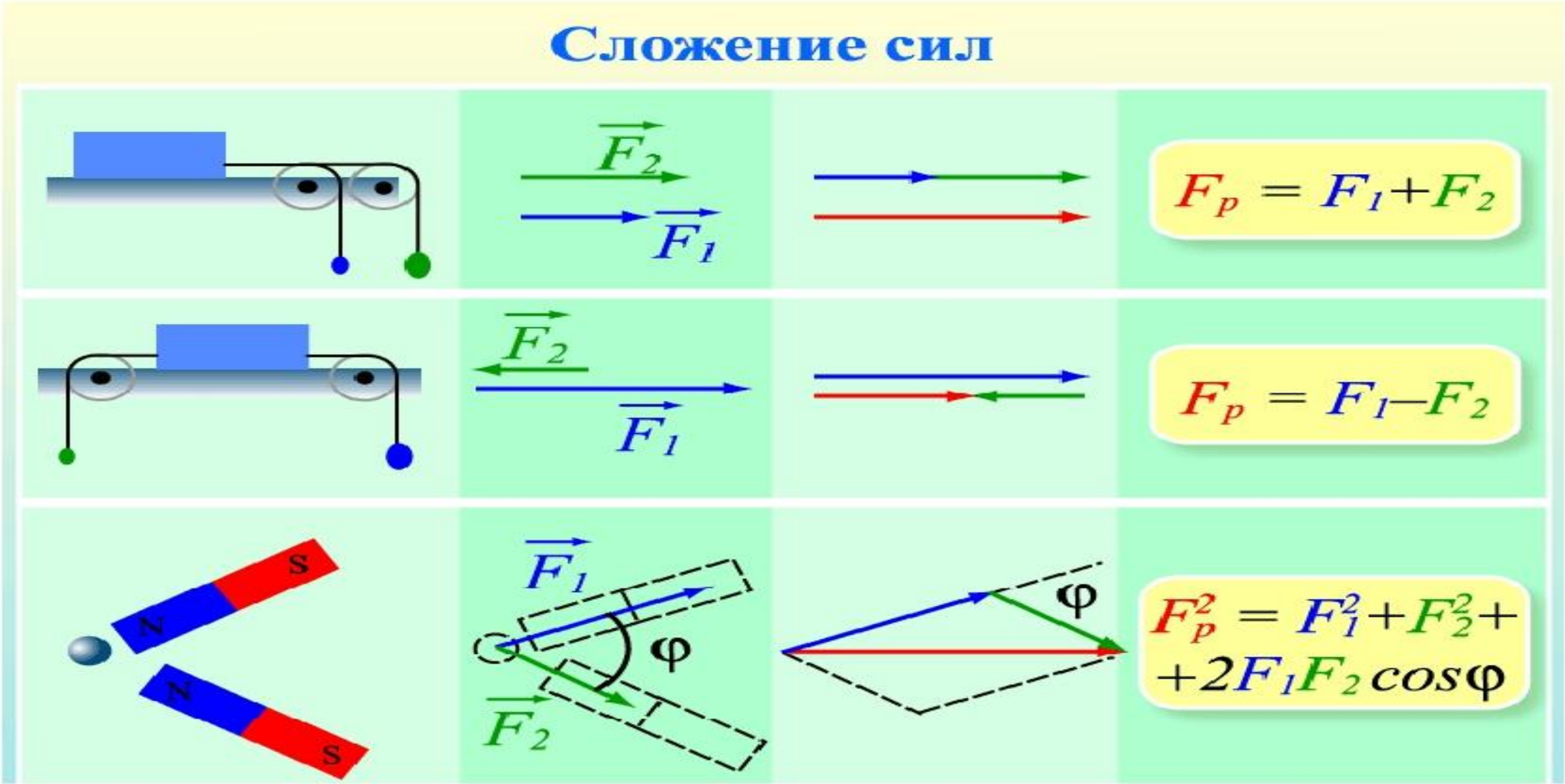


- ***Скорость*** – векторная величина, характеризующая быстроту изменения положения материальной точки в пространстве с течением времени.
- ***Средней линейной скоростью*** называется векторная величина, равная отношению перемещения к промежутку времени, за которое это перемещение произошло.

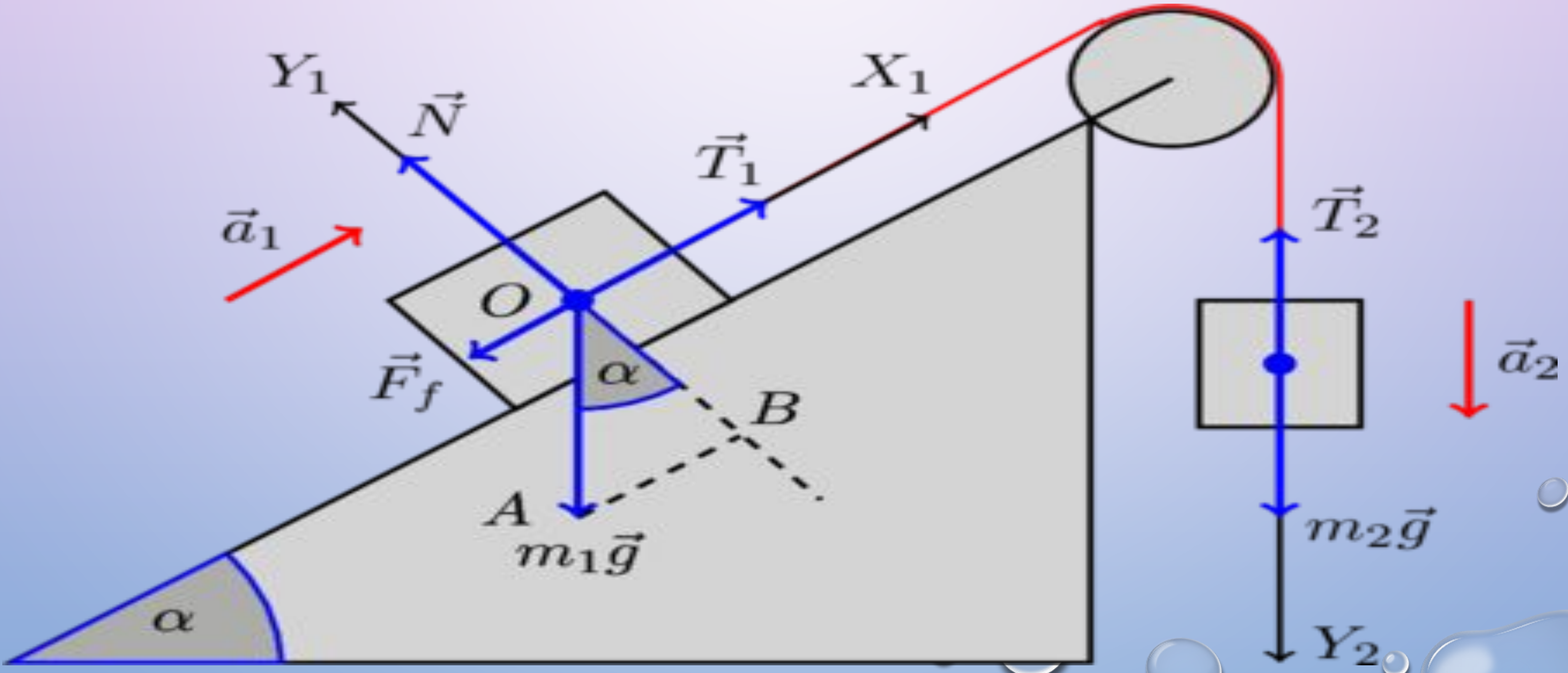
$$\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad [\vec{v}] = [\text{м/с}]$$

- Направление средней скорости совпадает с направлением радиус – вектора.

РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ ДВУХ СИЛ

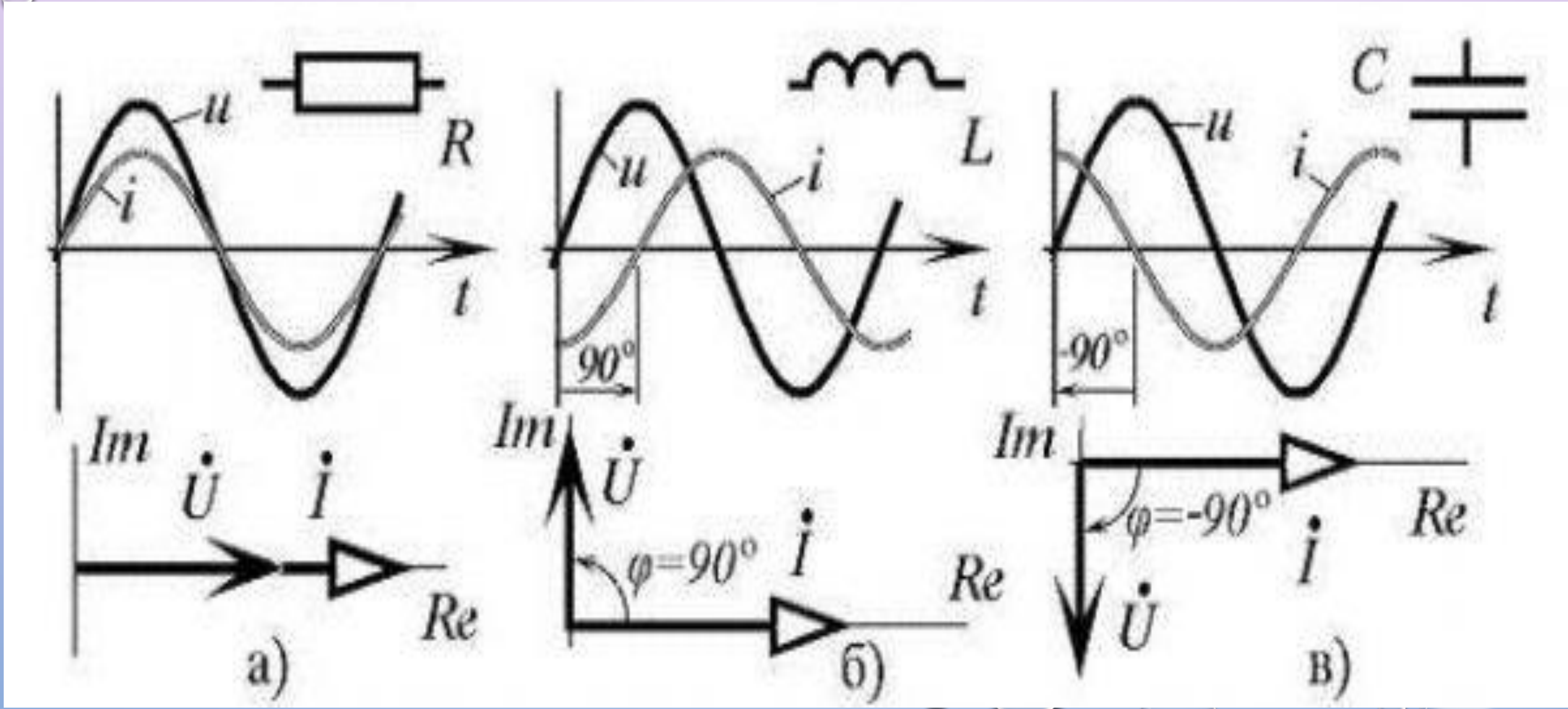


ПОКАЗАТЬ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА БРУСОК



Вектор в басне!

ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ RLC ЦЕПОЧКЕ



Спасибо за внимание