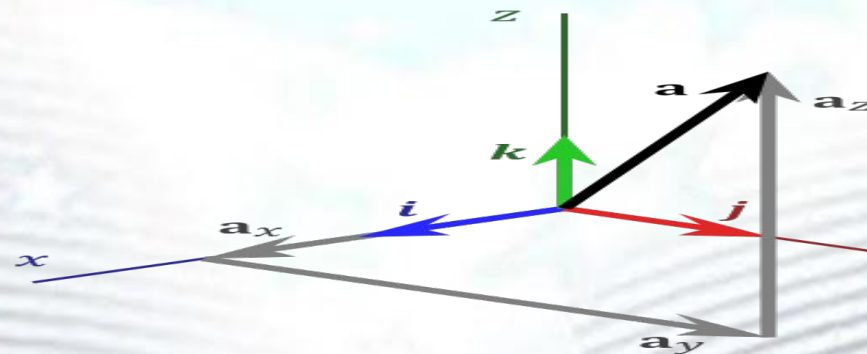


# Векторы в пространстве

М.Г.  
Мингазова  
Л.В.  
Мелюхина  
И.В.Рягузова

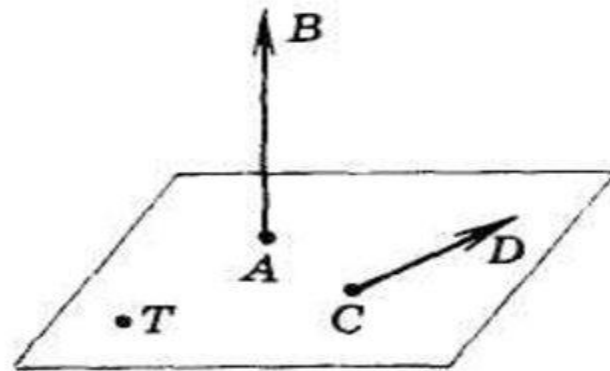


# Определение вектора.

Геометрически векторы изображаются направленными отрезками. **Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется вектором.**

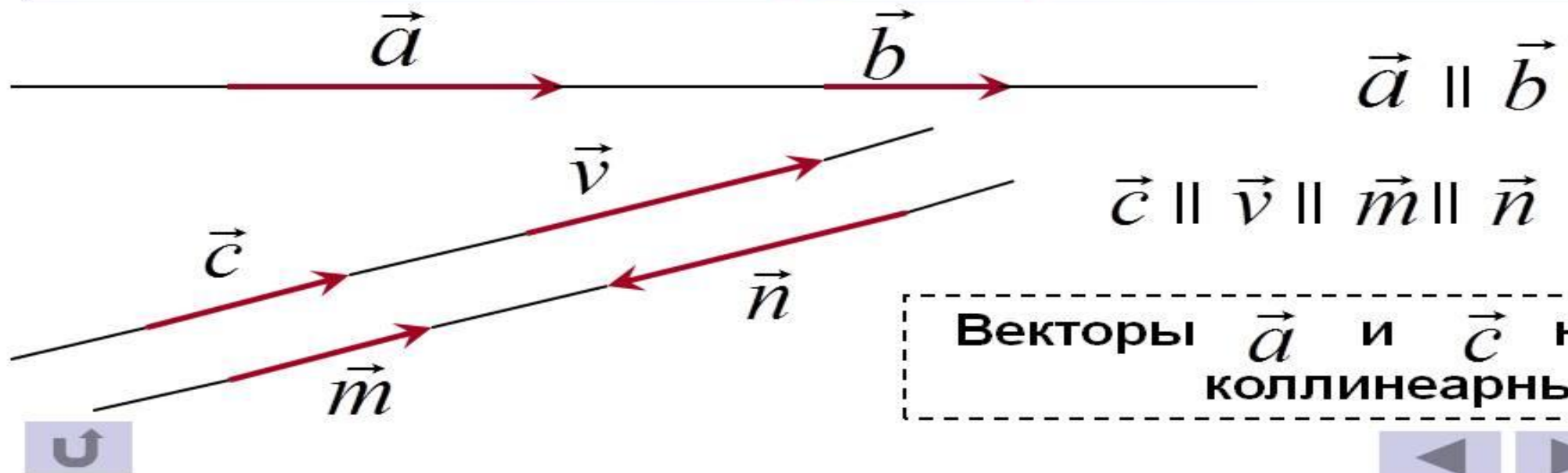
Вектор характеризуется следующими элементами:

1. начальной точкой (точкой приложения);
2. направлением;
3. длиной («модулем вектора»)



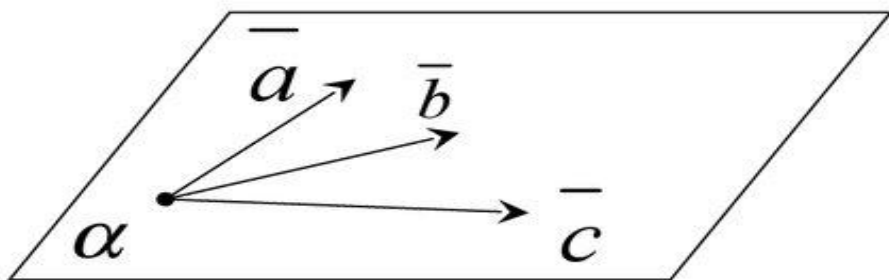
## Коллинеарные векторы

Ненулевые векторы наз. **коллинеарными**, если изображающие их направленные отрезки **параллельны или лежат на одной прямой**.

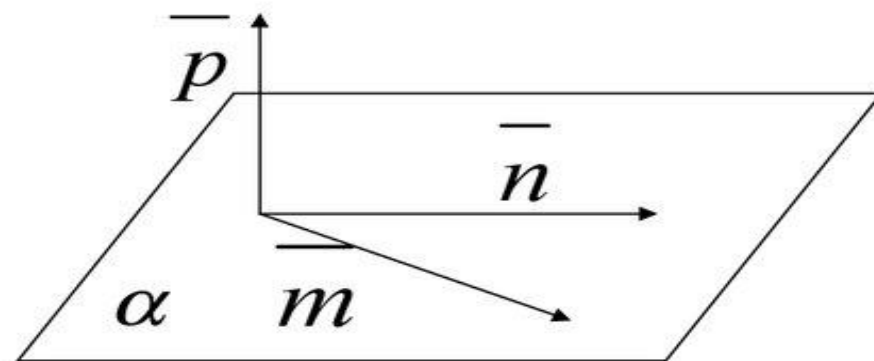


# Компланарные векторы

Три вектора называются компланарными, если они лежат в одной или параллельных плоскостях.

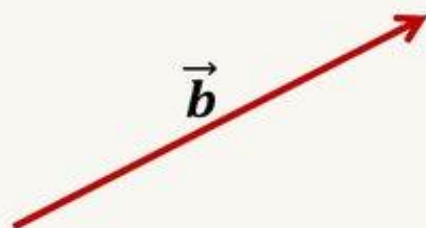
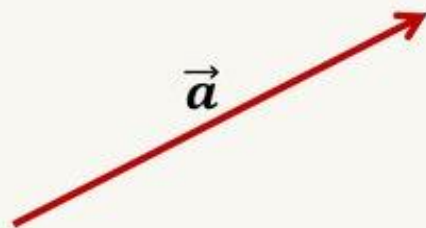


$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  – компланарны,



$\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$  – некопланарны.

## Равные векторы

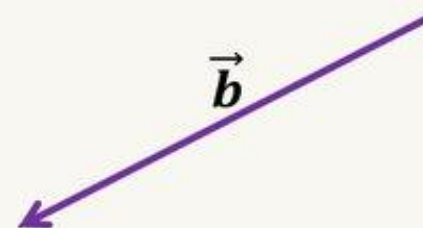
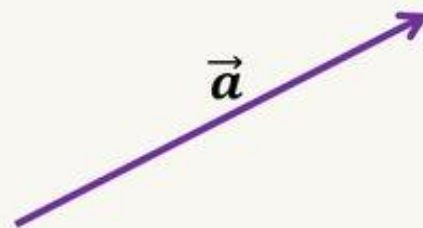


$$\vec{a} = \vec{b}$$

1.  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
2.  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

**Равными** называют  
сонаправленные векторы,  
длины которых равны.

## Противоположные векторы



$$\vec{a} = -\vec{b}$$

1.  $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$
2.  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

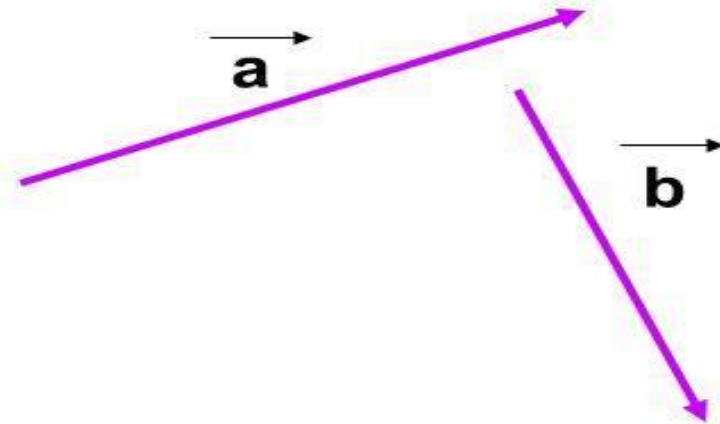
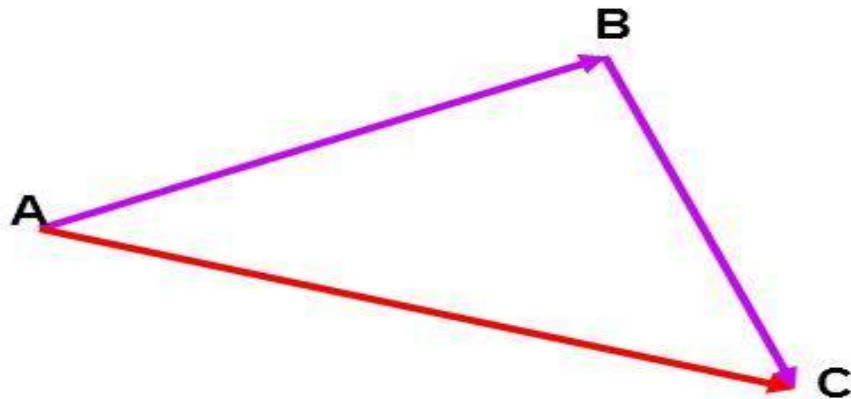
**Противоположными** называют  
противоположно направленные векторы,  
длины которых равны.

# Сложение и вычитание векторов

- **Сложение и вычитание векторов.**

## 1. Правило треугольника

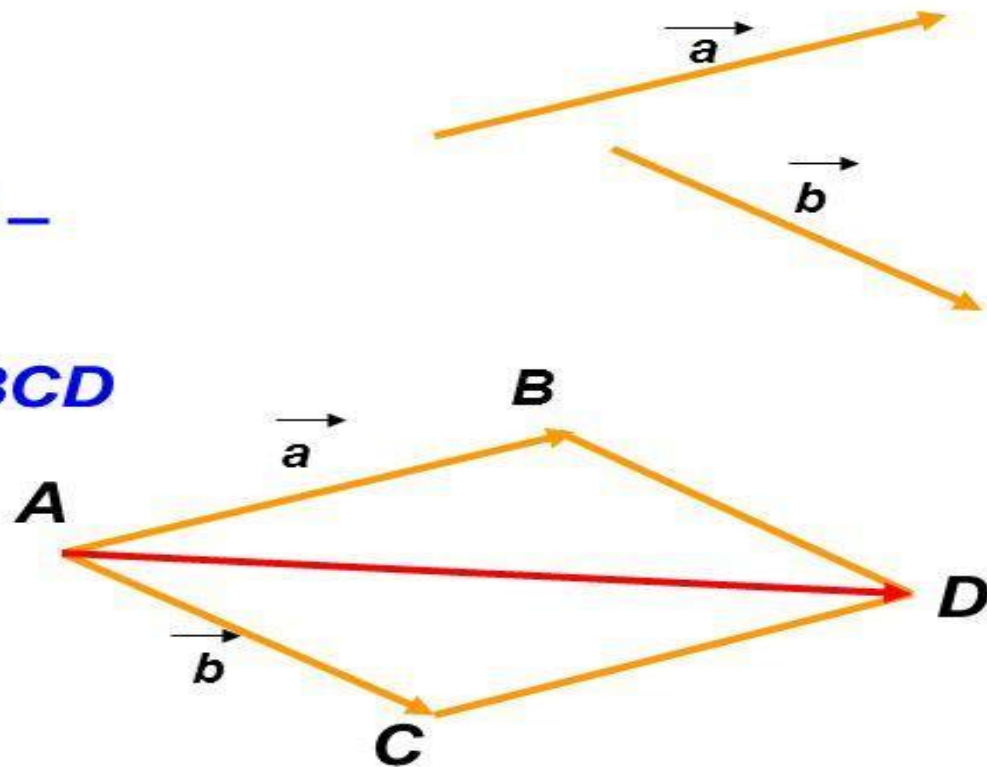
$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$



## 2. Правило параллелограмма

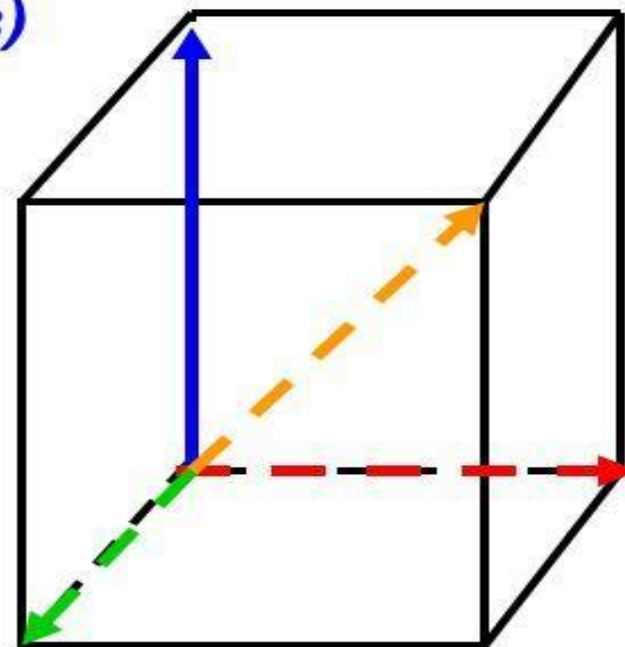
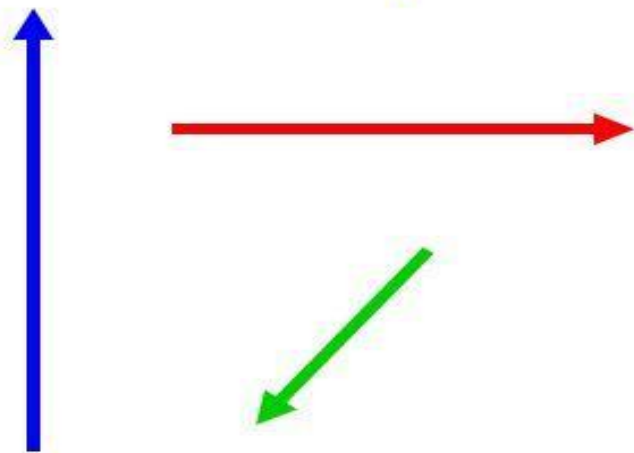
$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ , где  $AD$  –

диагональ  
параллелограмма  $ABCD$



**Правило параллелепипеда (для  
трех некопланарных векторов)**

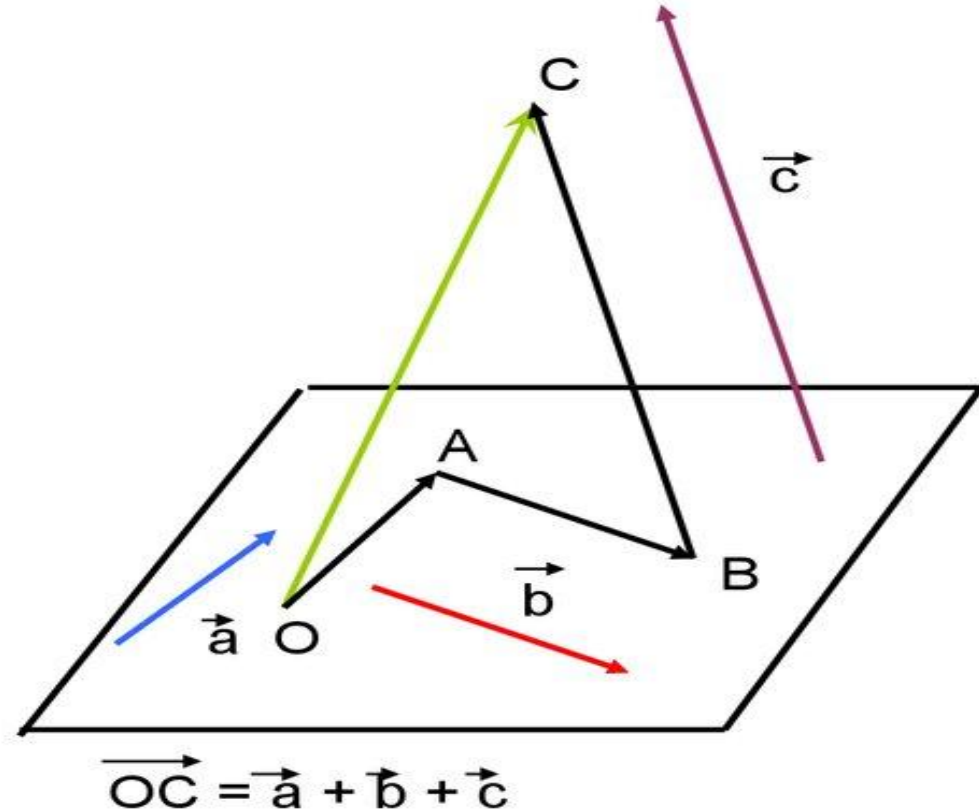
**$\vec{OB} + \vec{OA} + \vec{OD} = \vec{OC}$ , где  $OC$  –  
диагональ параллелепипеда**





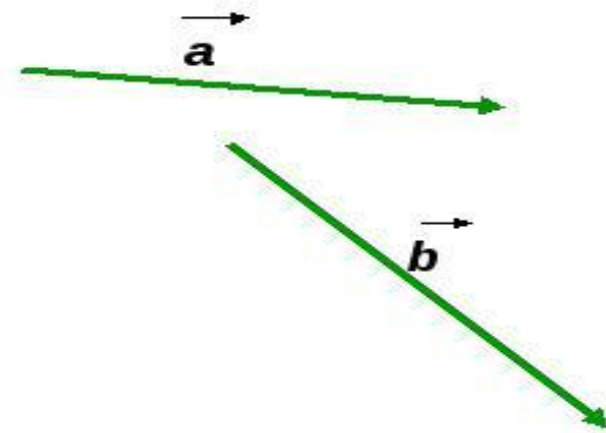
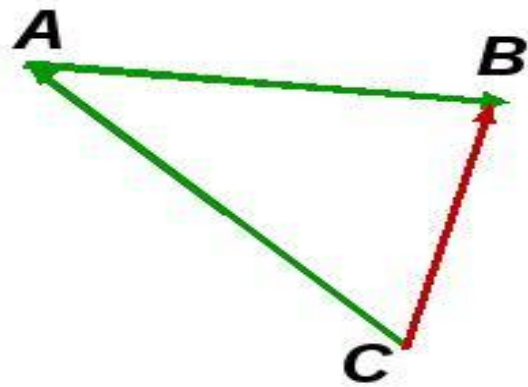
# Сложение нескольких векторов.

- Сложение нескольких векторов в пространстве выполняется так же, как и на плоскости: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма — с третьим вектором и т. д. Из законов сложения векторов следует, что **сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.**



### 3. Разность векторов

$$\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$$

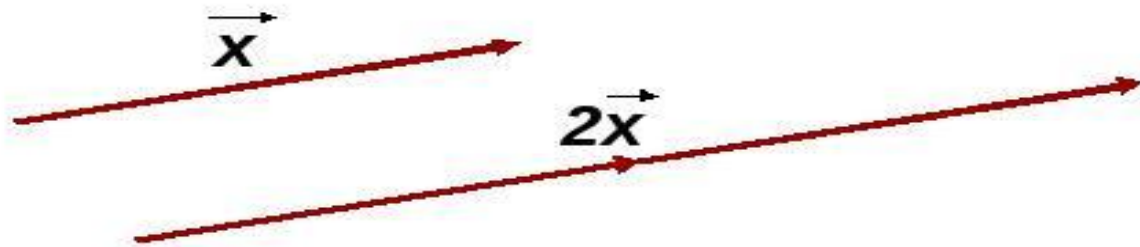


## Умножение вектора на число

$$\vec{b} = k \vec{a}, \text{ если } |\vec{b}| = |k| |\vec{a}|$$

если  $k > 0$ , то  $\vec{a} \parallel \vec{b}$

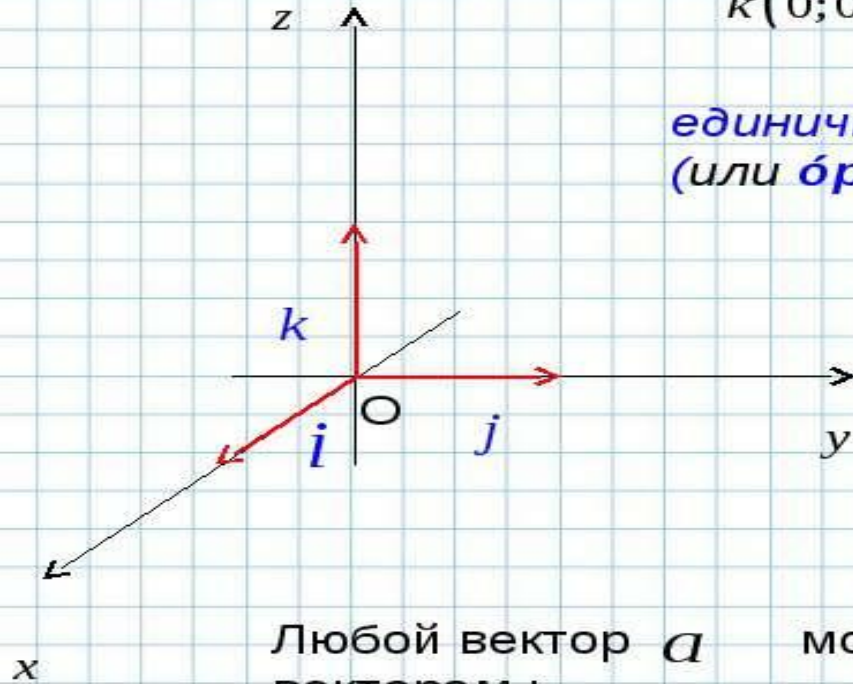
если  $k < 0$ , то  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$



## Координаты вектора.

В прямоугольной системе координат в пространстве векторы  $i(1;0;0)$ ,  $j(0;1;0)$   
 $k(0;0;1)$

называются  
*единичными координатными векторами*  
(или *битами*).

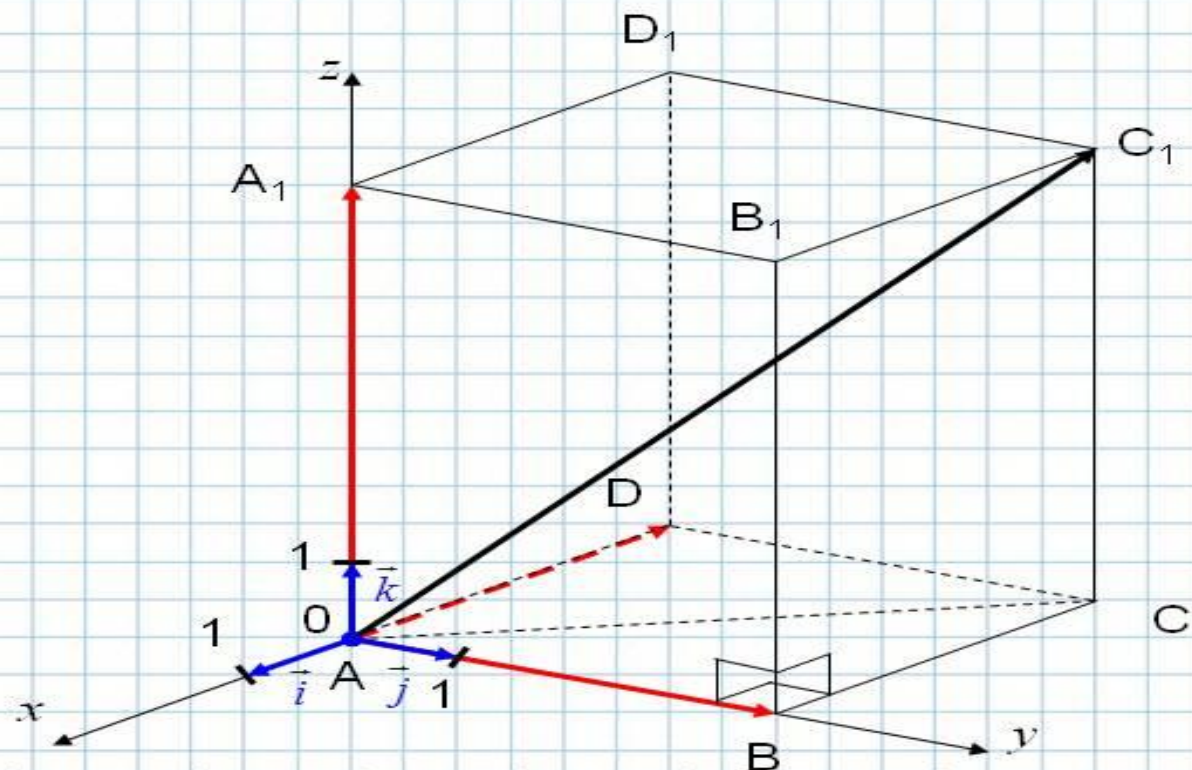


Любой вектор  $a$  можно разложить по координатным векторам :

$$a = xi + yj + zk$$

коэффициенты разложения  $x, y, z$  определяется единственным образом.

В прямоугольной системе координат в пространстве векторы  $\vec{i}(1;0;0)$ ,  $\vec{j}(0;1;0)$  и  $\vec{k}(0;0;1)$  называются *единичными координатными векторами* (или *ортами*). Т.к. эти векторы являются некопланарными, то любой вектор пространства можно разложить по ортам. При этом образуется прямоугольный параллелепипед, а коэффициенты разложения – координаты данного вектора.



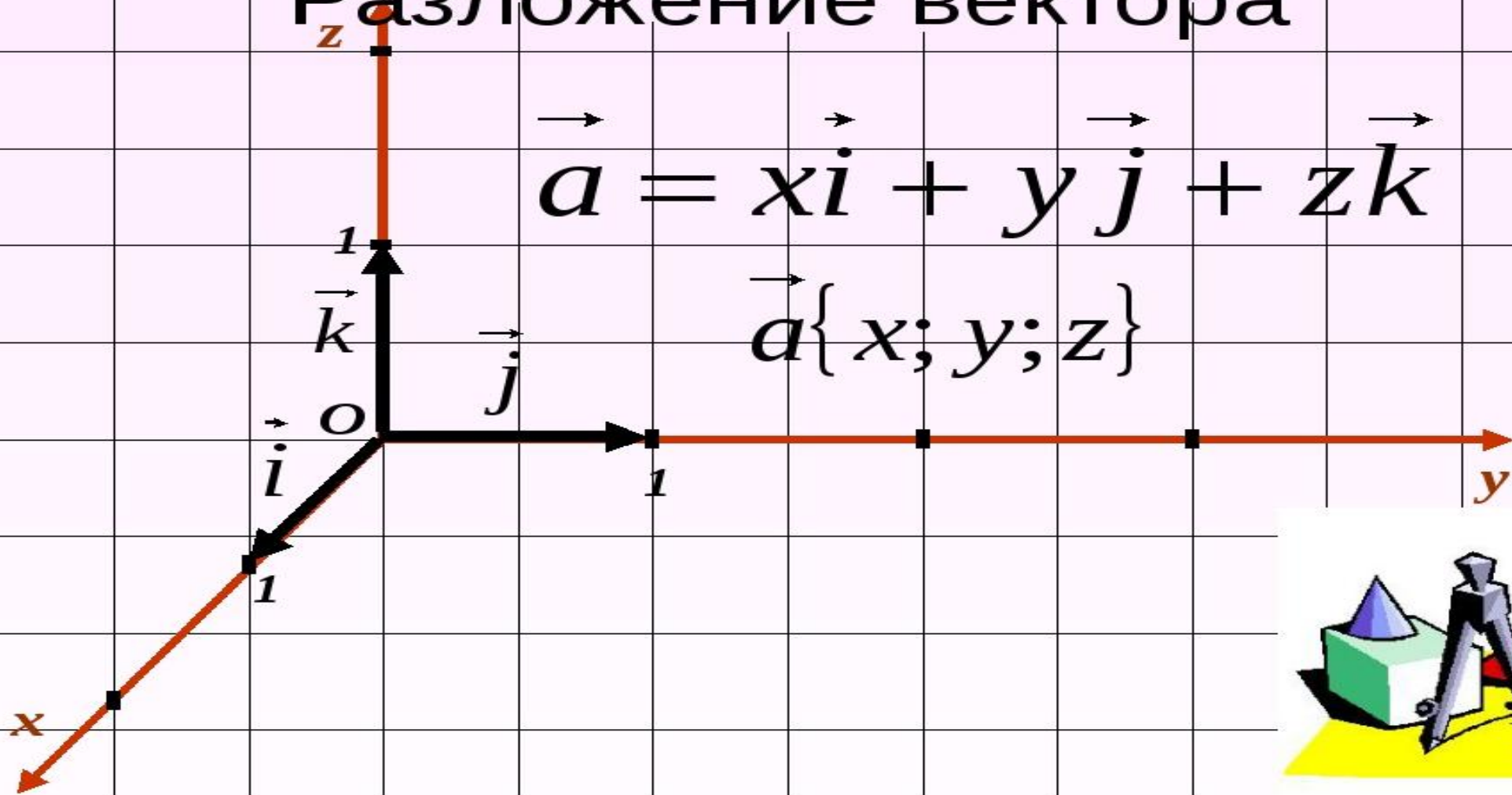
$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AC_1}(x; y; z)$$

В данном случае  $x=-3$ ;  $y=4$ ;  $z=6$ , т.е. координаты вектора  $\overrightarrow{AC_1}(-3; 4; 6)$ .

# Разложение вектора

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{a}\{x; y; z\}$$



## Действия над векторами, заданными своими координатами (проекциями).

Пусть  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$     ИЛИ     $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$   
 $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$     ИЛИ     $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$

- Сумма (разность):

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$$

- Умножение вектора на скаляр:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (a_x; a_y; a_z) = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$$

## Условие коллинеарности двух векторов

Векторы  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$   
**коллинеарны** тогда и только тогда, когда их  
соответствующие координаты  
пропорциональны, т.е. когда справедливо  
равенство

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$



## Компланарность векторов

- Три вектора  $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ ,  
 $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ ,  
 $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$ ,

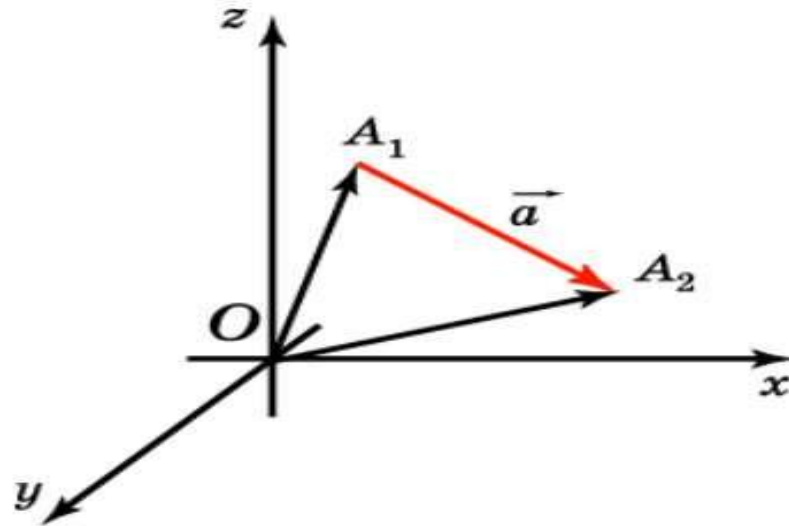
компланарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

## ДЛИНА ВЕКТОРА

Если вектор  $\vec{a}$  задан координатами начальной и конечной точек,  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ , то его длина выражается формулой

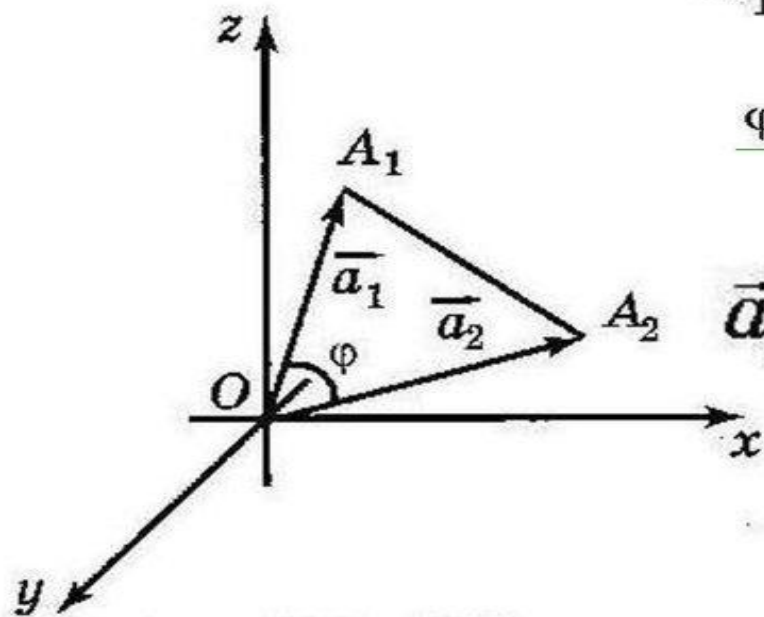
$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$



## Скалярное произведение векторов

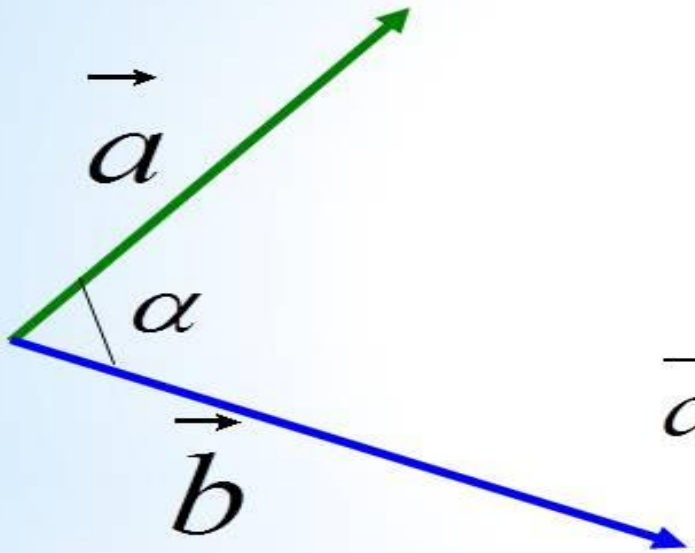
$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos \varphi,$$

$\varphi$  — угол между векторами  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ .



$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

## Скалярное произведение векторов.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

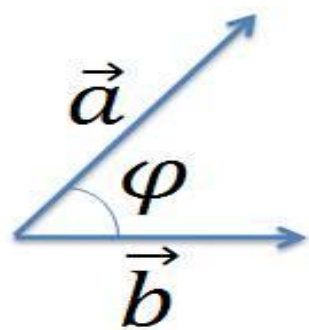
$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

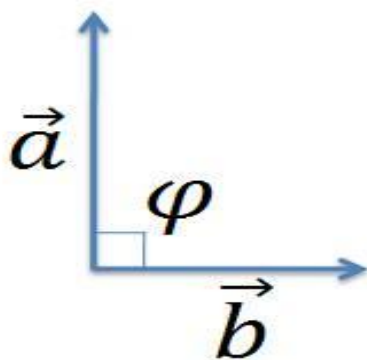
$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

## Скалярное умножение векторов

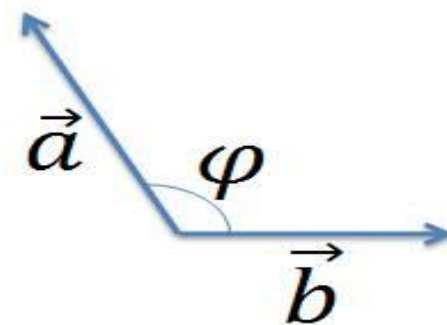
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$



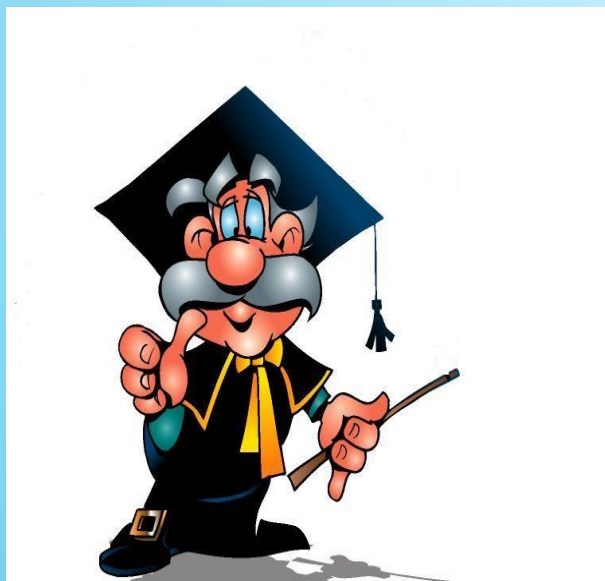
$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$



# Применение векторов



### Задача.

Дано:

AODMPBTC –

прямоугольный параллелепипед

$OA = 2$ ,  $OD = 3$ ,  $OB = 5$ ,  $MK = 1$ .

Определить:

координаты векторов:

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$

Решение:

$\vec{a}$ :  $x = OA = 2$ ;  $y = OD = 3$ ;  $z = OB = 5$

$\vec{a} \{2; 3; 5\}$

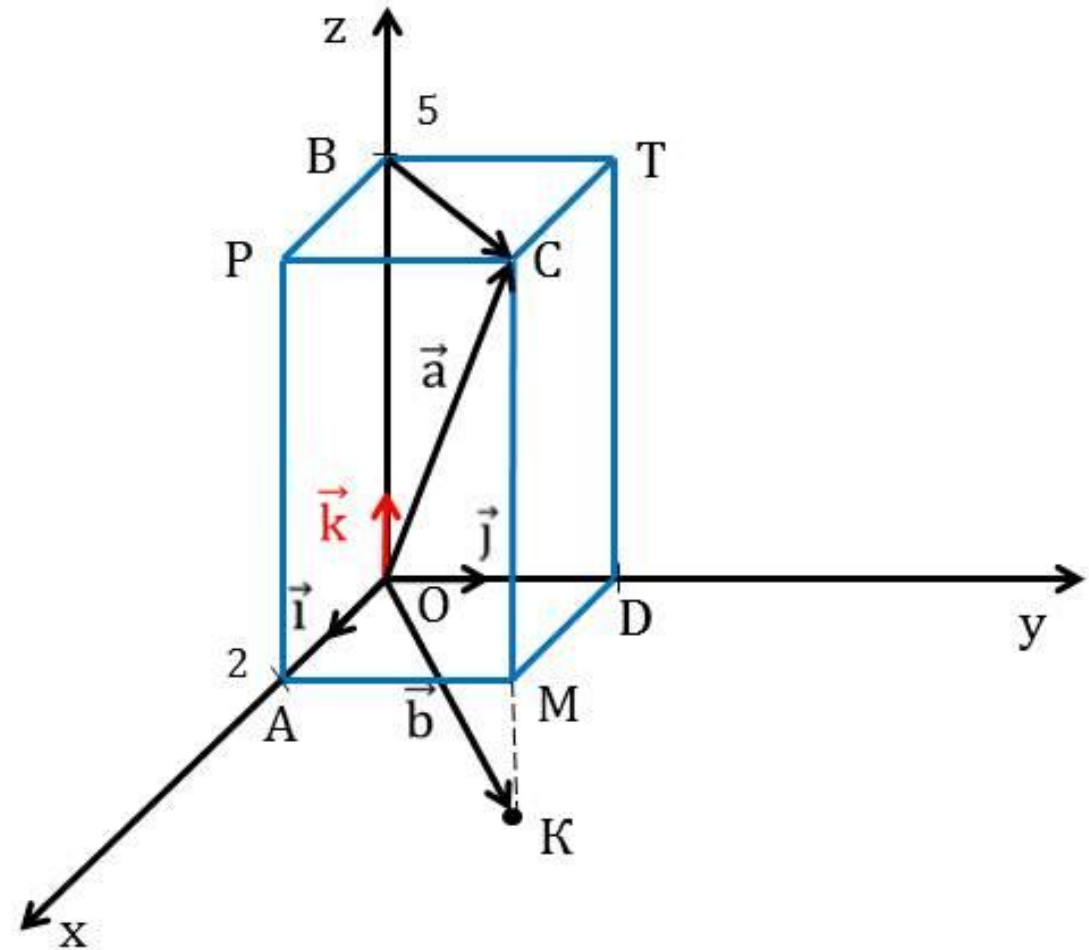
$\vec{b}$ :  $z = MK = -1$ ;  $x = OA = 2$ ;  $y = OD = 3$

$\vec{b} \{2; 3; -1\}$

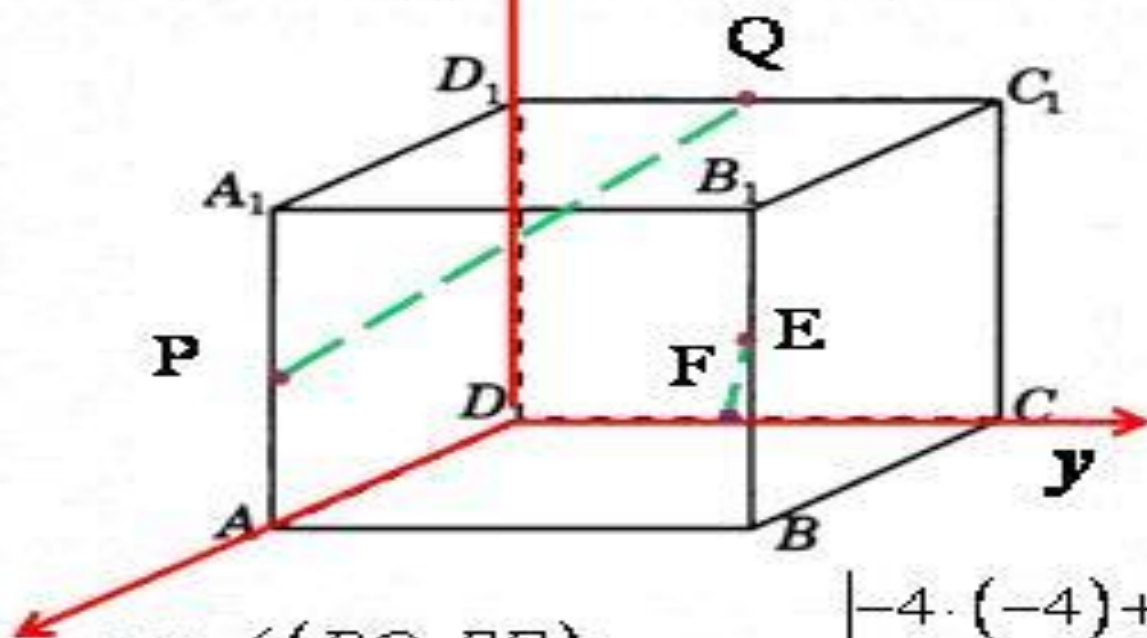
$\overrightarrow{BC}$ :  $x = OA = 2$ ;  $y = OD = 3$ ;  $z = 0$

$\overrightarrow{BC} \{2; 3; 0\}$

$\vec{i} \{1; 0; 0\}$ ;  $\vec{j} \{0; 1; 0\}$ ;  $\vec{k} \{0; 0; 1\}$



№ 2. Ребро куба равно 4. Найдите косинус угла между прямыми PQ и EF, P – середина AA<sub>1</sub>, Q – середина C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, E – середина BB<sub>1</sub>, F – середина DC.



$$P(4; 0; 2)$$

$$Q(0; 2; 4)$$

$$E(4; 4; 2)$$

$$F(0; 2; 0)$$

$$\overrightarrow{PQ} \{-4; 2; 2\}$$

$$\overrightarrow{EF} \{-4; -2; -2\}$$

$$\cos \angle (PQ, EF) = \frac{|-4 \cdot (-4) + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2)|}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 2^2} \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3}$$

**Ответ:**

$$\frac{1}{3}$$



### Задача 3.

Дано:

$$OA = 4, OB = 9, OC = 2$$

Найти:

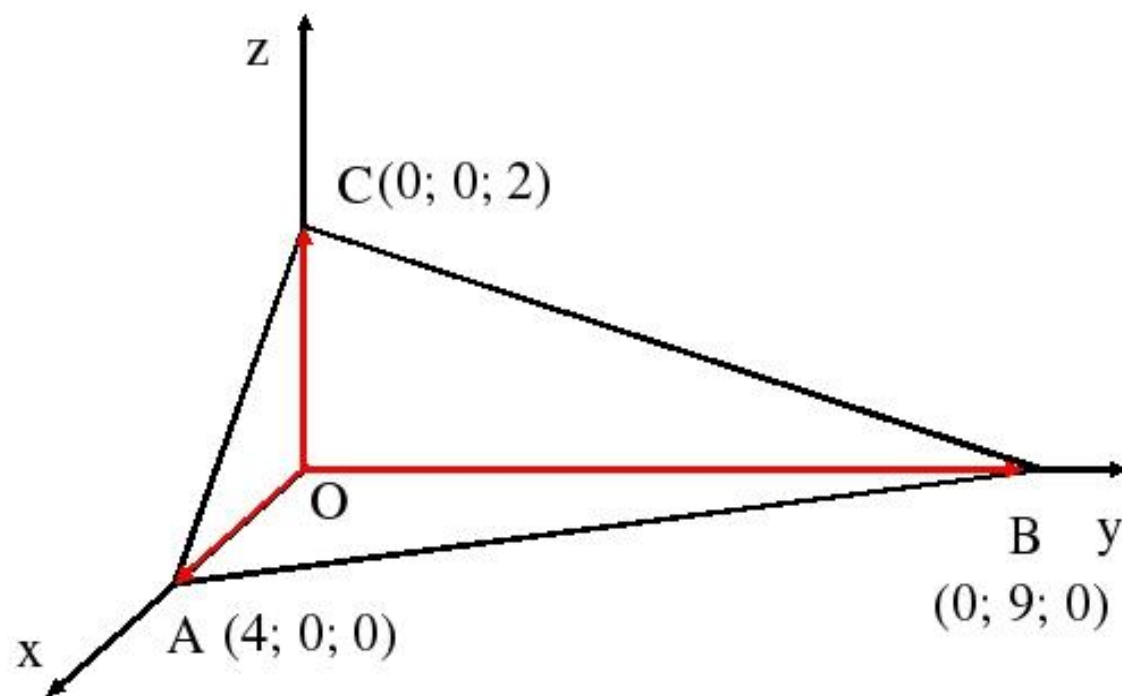
координаты  $\vec{AC}, \vec{CB}, \vec{AB}$

Решение:

$$\vec{AC} \{0 - 4; 0 - 0; 2 - 0\} = \{-4; 0; 2\}$$

$$\vec{CB} \{0 - 0; 9 - 0; 0 - 2\} = \{0; 9; -2\}$$

$$\vec{AB} \{0 - 4; 9 - 0; 0 - 0\} = \{-4; 9; 0\}$$



## МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

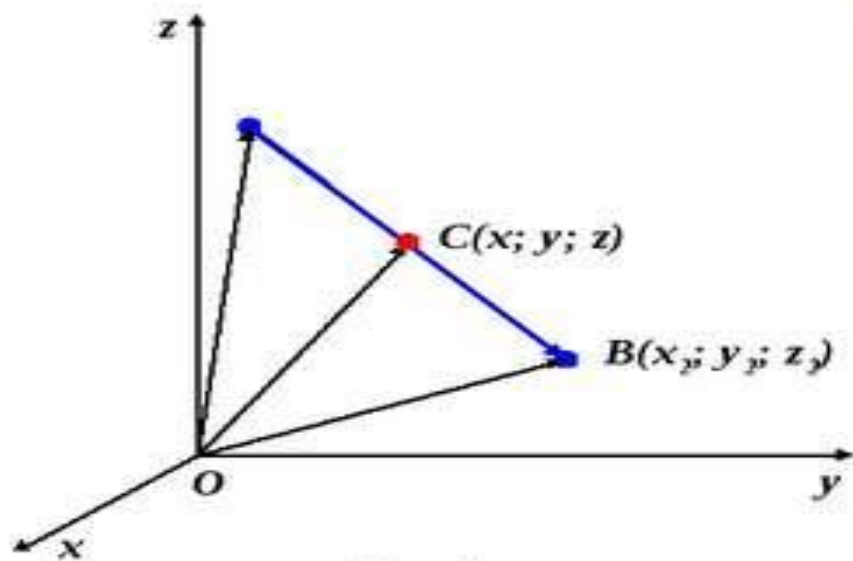


Рис. 4

### Координаты вектора

$$\vec{OC}\{x; y; z\}, \vec{OA}\{x_1; y_1; z_1\}, \vec{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

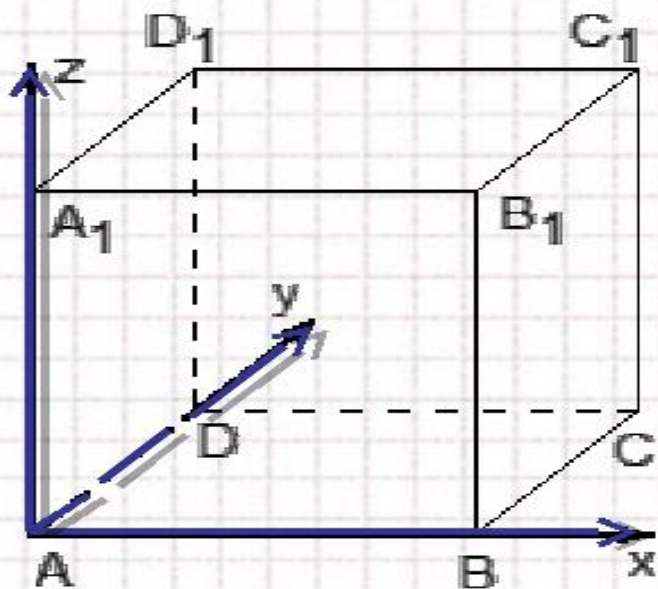
### Координаты середины отрезка

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

## Координатный метод

В единичном кубе  $A\dots D_1$  найти расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BC_1D$ .



Решение:

Координаты точек  $A(0;0;0)$ ;  $B(1;0;0)$ ;  $C_1(1;1;1)$  и  $D(0;1;0)$  подставим в общее уравнение плоскости  $ax + by + cz + d = 0$  и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 1 + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a + d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ b + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -d \\ b = -d \\ c = d \end{cases}$$

тогда  $-dx - dy + dz + d = 0$ ,  $x + y - z - 1 = 0$ ,

следовательно  $\rho(A; (BC_1D)) = \frac{|0 + 0 - 0 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

## Примеры решения задач ЕГЭ

**С2** Дан  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  –прямоугольный параллелепипед  $AA_1=3$ ,  $AD=8$ ,  $AB=6$ , точка  $E$ - середина ребра  $AB$ , точка  $F$ -середина ребра  $B_1 C_1$ . Найдите угол между прямой  $EF$  и плоскостью  $ADD_1$ .

Решение: ( векторно-координатный способ )

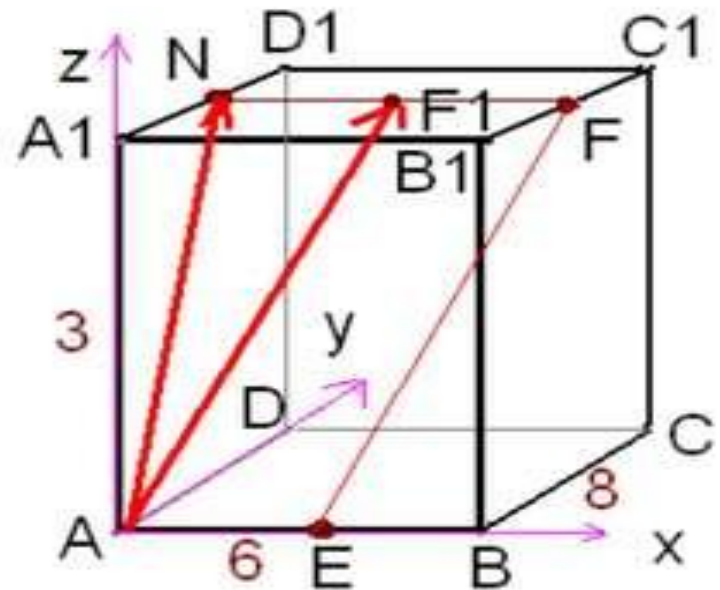
Введем прямоугольную систему координат

С началом в точке  $A$ , тогда угол между векторами  $AN \{0;4;3\}$  и  $AF_1 \{3;4;3\}$  //  $EF$  и будет искомым .

$$\cos \alpha = \frac{0+9}{5\sqrt{34}} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{9}{34}$$

Косинус угла найден с помощью формулы скалярного произведения двух векторов.

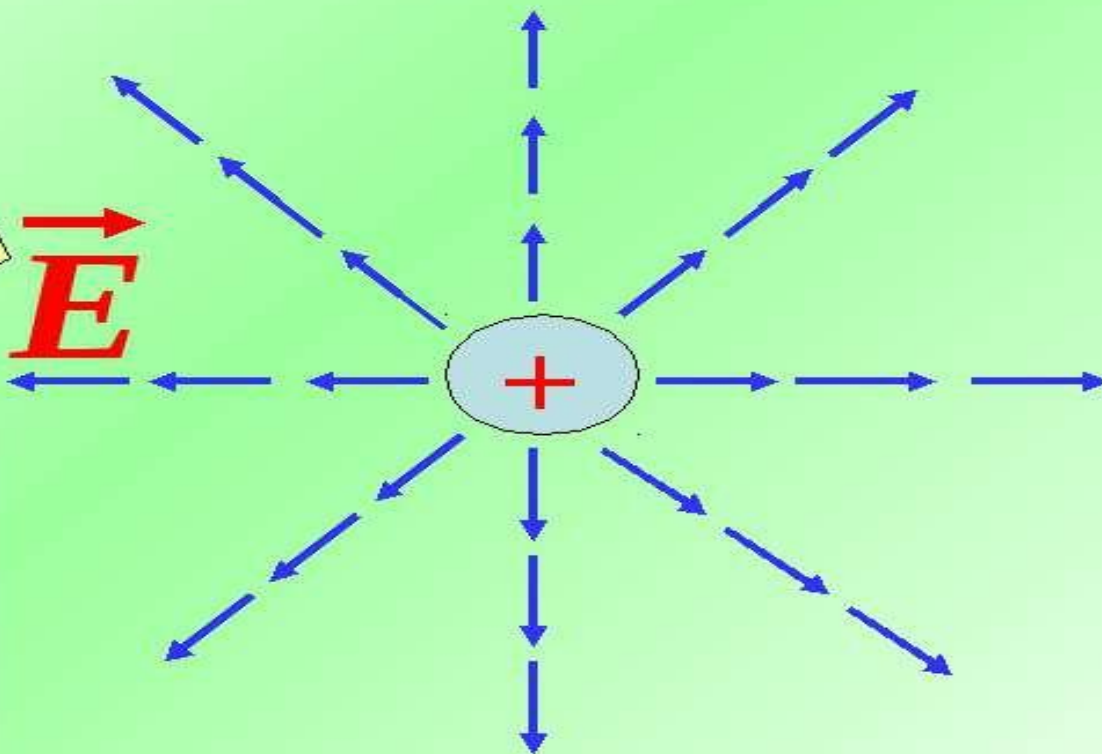
Преимущество метода в этом случае очевидно.



# Электрическое поле

Вектор  
напряженности

$\vec{E}$

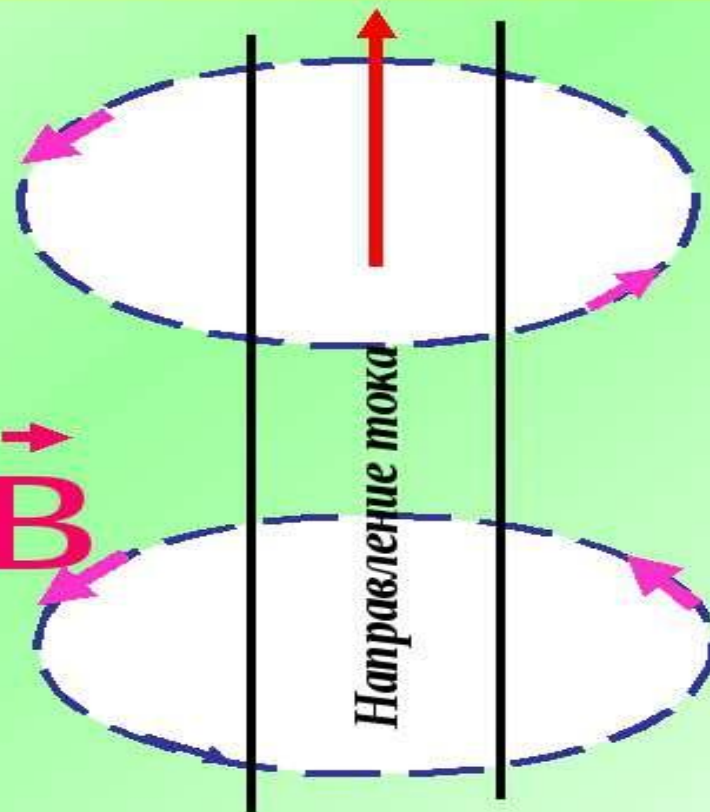


# Магнитное поле

Вектор магнитной  
индукции

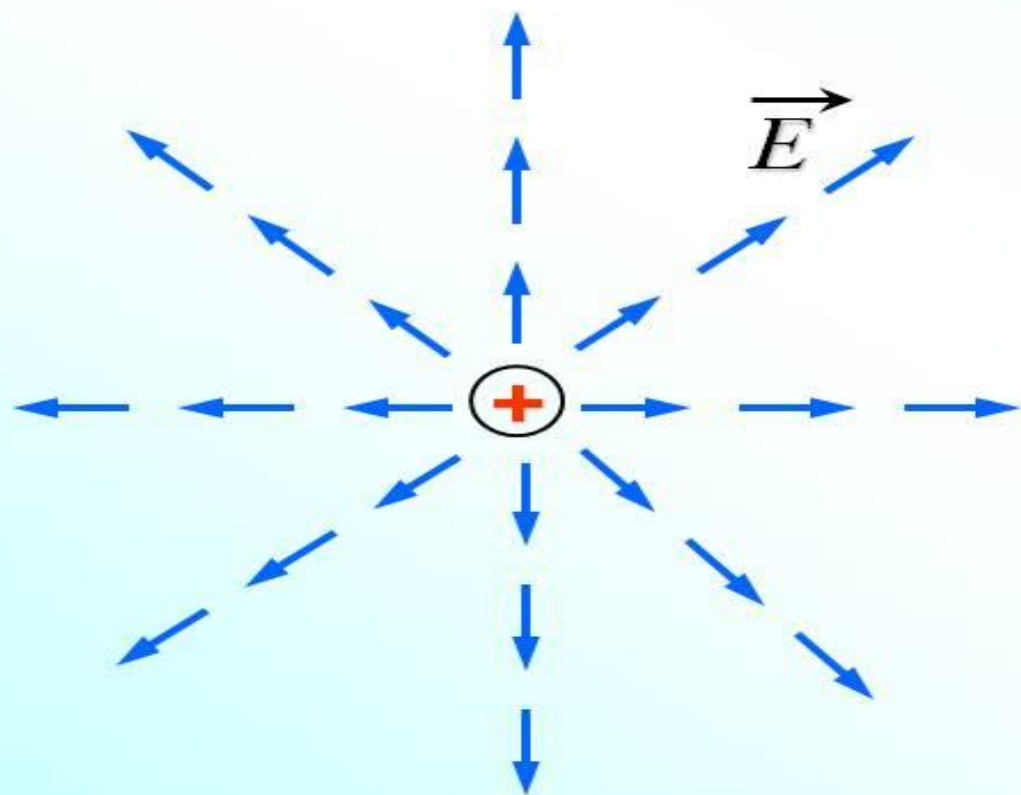


$\vec{B}$



Направление тока

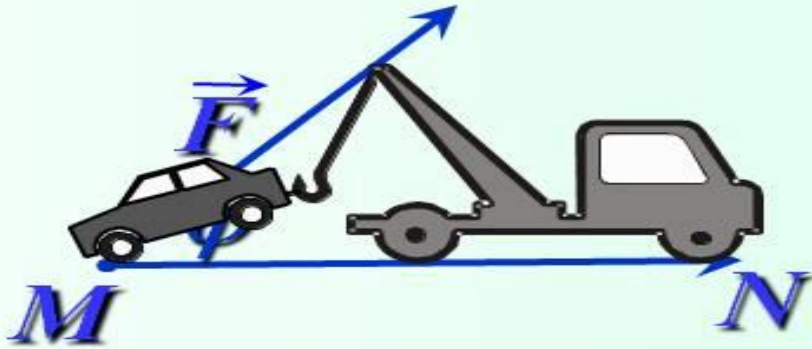
Многие физические величины, например сила перемещение, скорость, являются векторными величинами. При изучении электрических и магнитных явлений появляются новые примеры векторных величин.



Электрическое поле, создаваемое в пространстве зарядами, характеризуется в каждой точке пространства вектором напряженности электрического поля.

На рисунке изображены векторы напряженности электрического поля положительного точечного заряда.

## Скалярное произведение в физике



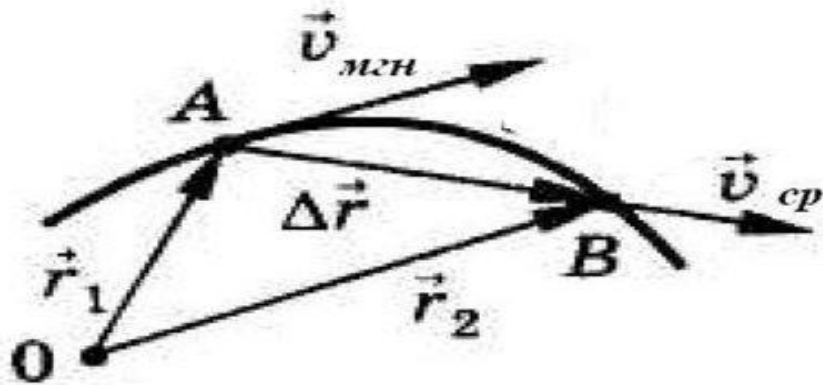
Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа  $A$  постоянной силы  $\vec{F}$  при перемещении тела из точки  $M$  в точку  $N$  равна произведению силы  $\vec{F}$  и перемещения  $\vec{MN}$  на косинус угла между ними.

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{MN}| \cos \varphi$$

$$A = \vec{F} \cdot \vec{MN}$$



# Средняя скорость



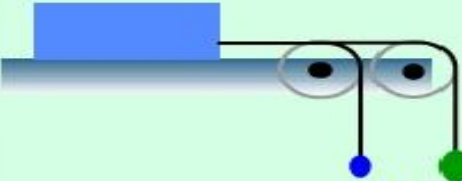
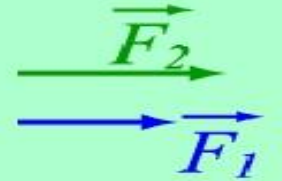


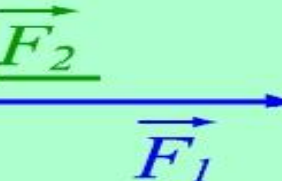

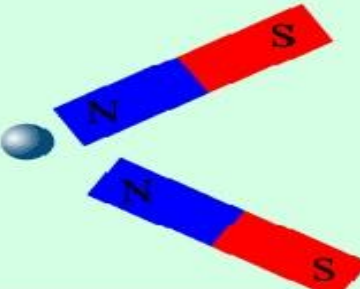
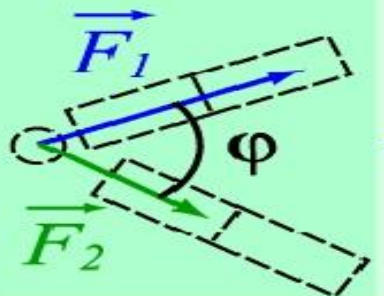
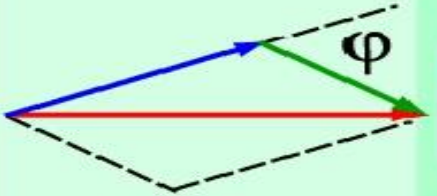
- **Скорость** – векторная величина, характеризующая быстроту изменения положения материальной точки в пространстве с течением времени.
- **Средней линейной скоростью** называется векторная величина, равная отношению перемещения к промежутку времени, за которое это перемещение произошло.

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad [\vec{v}] = [\text{м/с}]$$

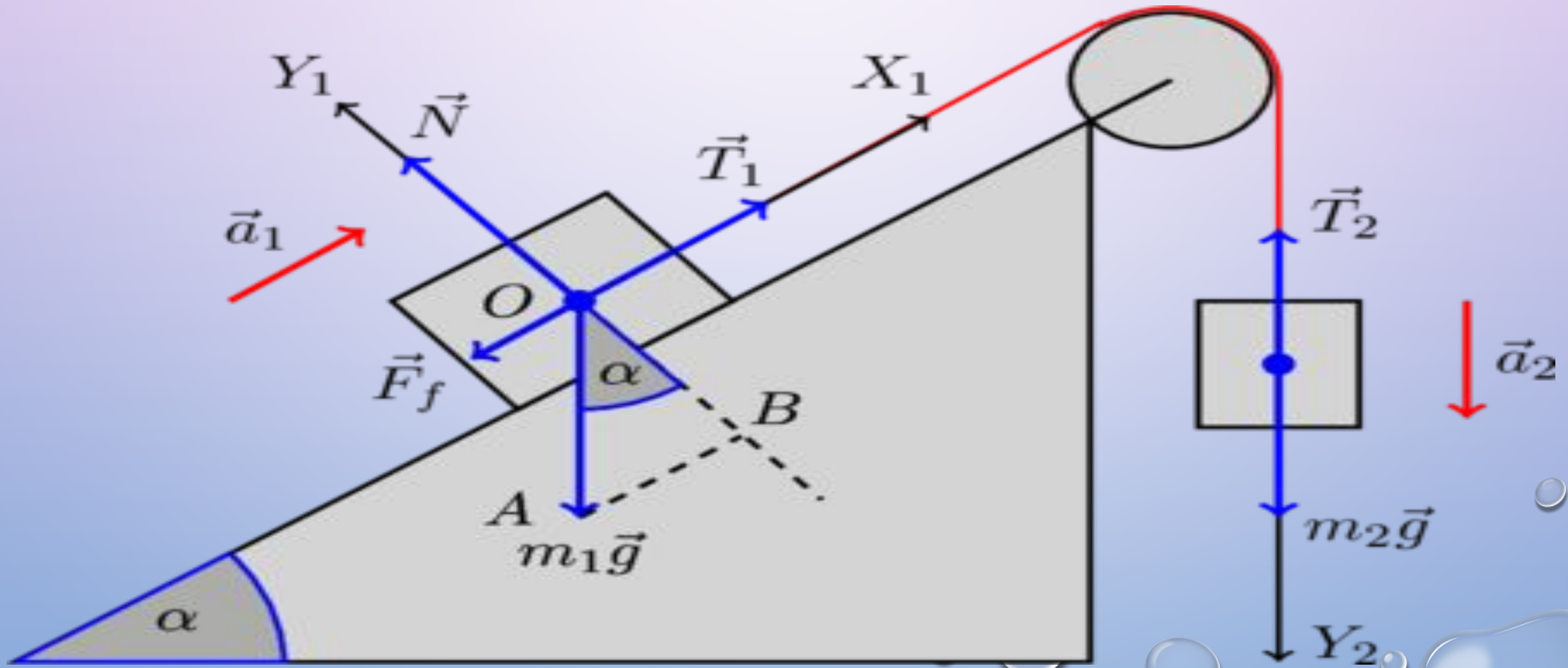
- Направление средней скорости совпадает с направлением радиус – вектора.

# РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ ДВУХ СИЛ

## Сложение сил

			$F_p = F_1 + F_2$
			$F_p = F_1 - F_2$
			$F_p^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi$

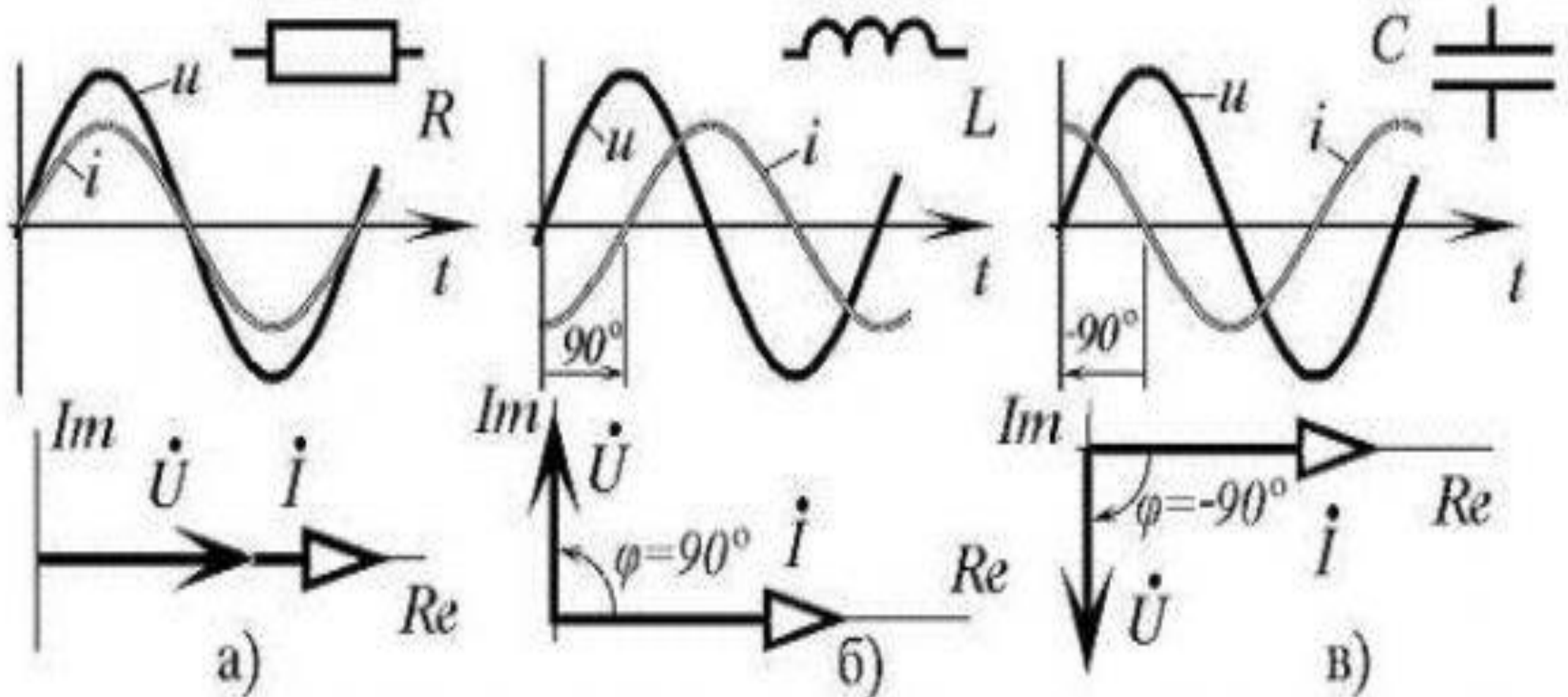
# ПОКАЗАТЬ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА БРУСОК



## ***Вектор в басне!***



# ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ RLC ЦЕПОЧКЕ



Спасибо за внимание

