

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Филатова Юлия Александровна  
преподаватель

ГБПОУ ВО «Лискинский аграрно-технологический техникум»

# Цели урока:

- повторить формулы корней простейших тригонометрических уравнений;
- повторить приемы решения тригонометрических уравнений.

# Актуализация знаний

- Когда уравнение  $\sin t=a$  не имеет решения?
- Когда уравнение  $\cos t=a$  не имеет решения?
- Для решения простейших тригонометрических уравнений вида:  $\sin t=a$ ,  $\cos t=a$ ,  $\operatorname{tg} t=a$  вспомнить формулы.

# Изучение нового материала

- Тригонометрическое уравнение - это уравнение, которое содержит переменную под знаком тригонометрических функций.
- Уравнения вида  $\sin x=a$ ,  $\cos x=a$ ,  $\operatorname{tg} x=a$ ,  $\operatorname{ctg} x=a$ , где  $x$  – переменная, называются простейшими тригонометрическими уравнениями.

# Методы решения тригонометрических уравнений

- Метод введения новой переменной
- Метод разложения на множители

# Метод введения новой переменной

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$$

Введем новую переменную:  $z = \sin x$ .

Тогда уравнение примет вид  $2z^2 - 5z + 2 = 0$ ,

откуда находим:  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = \frac{1}{2}$ .

Значит, либо  $\sin x = 2$ , либо  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

Первое уравнение не имеет корней,

а из второго находим:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

# Метод разложения на множители

$$\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\cos x + \frac{2}{5}\right) = 0.$$

Задача сводится к решению совокупности уравнений

$$\sin x = \frac{1}{3}; \quad \cos x = -\frac{2}{5}.$$

Из этих уравнений находим соответственно:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n;$$

$$x = \pm \arccos \left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi n.$$

# Закрепление изученного материала

Решить уравнение:  $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$

Решение.

Воспользуемся тем, что  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ .

Тогда заданное уравнение можно переписать в виде

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0.$$

После понятных преобразований получим:

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Введем новую переменную:  $z = \cos x$ .

Тогда уравнение примет вид  $2z^2 - z - 1 = 0$ ,

откуда находим:  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = -\frac{1}{2}$ .

Значит, либо  $\cos x = 1$ , либо  $\cos x = -\frac{1}{2}$ .

Из первого уравнения находим:  $x = 2\pi n$ ;

из второго уравнения находим:

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n;$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ:  $x = 2\pi n$ ;  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ .



# Закрепление изученного материала

Решить уравнение:  $2 \sin \frac{x}{2} \cos 5x - \cos 5x = 0$

Решение.

$$\text{Имеем: } \cos 5x (2 \sin \frac{x}{2} - 1) = 0.$$

Значит, приходим к совокупности уравнений

$$\cos 5x = 0;$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Из первого уравнения находим: } 5x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}.$$

$$\text{Из второго уравнения находим: } \frac{x}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

# Обучающая самостоятельная работа

- Решить уравнение  $(1 + \operatorname{tg} x)(1 - \sin 2x) = 1 - \operatorname{tg} x$
- Решение данного уравнения:

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой  $y = \operatorname{tg} x$

и получим уравнение:  $(1 + y)\left(1 - \frac{2y}{1 + y^2}\right) = 1 - y$

или  $(1 + y)(1 - y)^2 = (1 - y)(1 + y^2)$ .

Перенесем все члены уравнения в левую часть и разложим ее на множители:

$(1 - y)((1 + y)(1 - y) - (1 + y^2)) = 0$  или  $(1 - y)y^2 = 0$ .

Корни этого уравнения  $y_1 = 1$  и  $y_2 = 0$ .

Вернемся к старой переменной и получим простейшие уравнения:

а)  $\operatorname{tg} x = 1$ , его решения  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;

б)  $\operatorname{tg} x = 0$ , его решения  $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Перейдем к следующему способу решения тригонометрических уравнений.

# Обучающая самостоятельная работа

- Решить уравнение  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$
- Решение данного уравнения:

Сгруппируем члены уравнения  $(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0$

и преобразуем сумму синусов в произведение:  $2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$

Вынесем общий множитель в левой части за скобки

и разложим ее на множители  $\sin 2x(2\cos x + 1) = 0$ .

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю.

Получаем простейшие уравнения:

а)  $\sin 2x = 0$ , его решения  $2x = \pi n$  и  $x = \frac{\pi}{2}n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ;

б)  $2\cos x + 1 = 0$  или  $\cos x = -\frac{1}{2}$ , его решения

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

# Домашнее задание

Решить тригонометрическое уравнение:

$$\cos x \cdot \cos 5x = \cos 3x \cdot \cos 7x$$

# Итоги урока

- Что нового вы узнали сегодня на уроке?
- Какие уравнения называются тригонометрическими?
- Какие методы решения тригонометрических уравнений вы изучили?