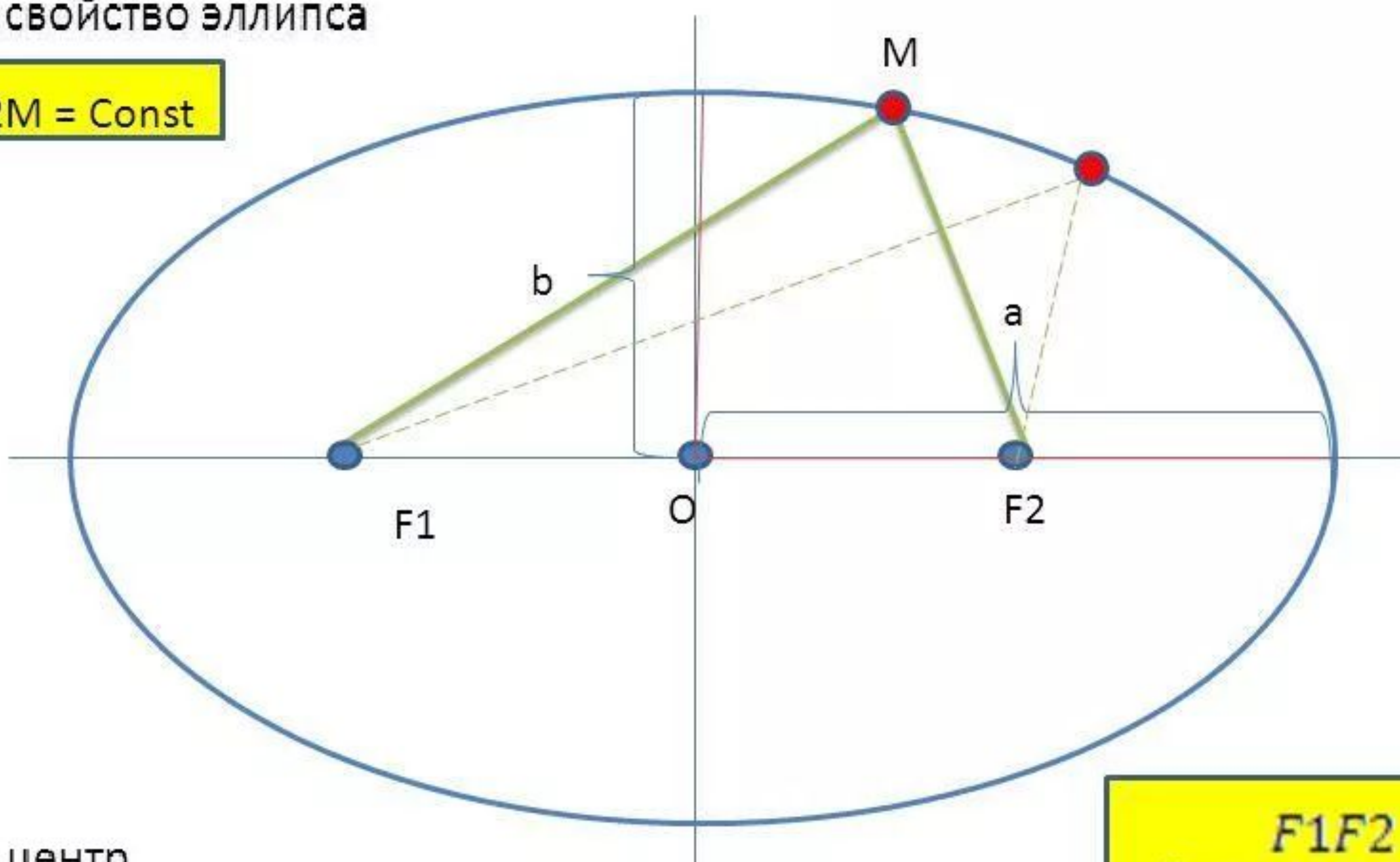
Динамика движения материальной точки по окружности. Тяготение.

Эллипс

Главное свойство эллипса

$F1M + F2M = Const$



O– центр

a – большая полуось

b – малая полуось

F1 и F2 – фокусы эллипса

$$\varepsilon = \frac{F1F2}{a}$$

эксцентриситет

Особая категория движения – это движение по окружности. Согласно второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}_{ц}$. Для сообщения центростремительного ускорения должна присутствовать сила, сообщающая телу это ускорение. Это может быть сила упругости нити, сила трения (при повороте автомобиля), сила упругости (при повороте поезда) и т.д. Особый вид движения по окружности – движение под действием силы тяготения.

В 1609-1619 гг. великий немецкий ученый Иоганн Кеплер, изучая движение Марса, по наблюдениям своего учителя Тихо Браге сформулировал три закона движения планет:

1. Орбиты, по которым движутся планеты, представляют собой эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце.
2. Радиус – вектор планеты, проведенный из Солнца, очерчивает за одинаковые промежутки времени одинаковые площади (см. рис. 1).
3. Для всех планет отношение квадрата периода обращения к кубу большой полуоси эллиптической орбиты имеет одно и то же значение. $\frac{T^2}{a^3} = const$

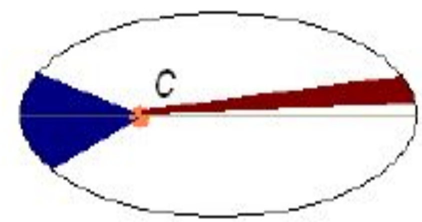


Рис. 1

Данные законы справедливы для описания движения любых тел (включая искусственные спутники) в поле тяготения.

На основании его работ великий английский физик Исаак Ньютон в 1687 г. сформулировал закон всемирного тяготения, которому было абсолютно ясно, что для подобного движения должна существовать сила, которая удерживает тела на орбите.

Две материальные точки притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ *(1)*

Можно показать, что подобная формулировка справедлива и для расчета силы притяжения между сферическими телами, как будто бы их масса была сосредоточена в их центрах.

Коэффициент пропорциональности G называется гравитационной постоянной. Ее значение зависит от выбора системы единиц. В СИ $G=6{,}673*10^{-11} Н*м^2/кг^2$. Экспериментально значение G получил в 1798 г. английский ученый Кавендиш. Суть его гениального опыта состоит в следующем :

На тонкой кварцевой нити 1 (рис. 2), на которой подвешен легкий стержень 2, жестко закреплено небольшое зеркальце 3. Луч света 4, падая на зеркальце, отражается от него, и попадает на шкалу 5. При повороте стержня луч света, перемещаясь по шкале, регистрирует угол закручивания нити. На концах стержня закреплены

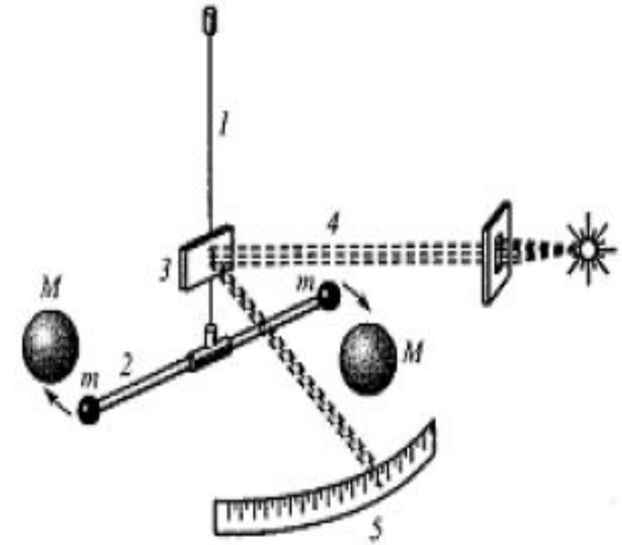


Рис 2

два свинцовых шара с массами m каждый. К ним подносят два симметрично расположенных шара массами М каждый. При этом стержень начинает поворачиваться до тех пор, пока сила упругости нити не уравновесит силу гравитационного притяжения шаров. Данный способ измерения позволяет измерять очень малые деформации нити, и вместе с тем малые силы, так как чувствительность прибора зависит от расстояния от зеркальца до шкалы, увеличивая его, повышается точность измерения углов.

Мы видим, что сила всемирного тяготения пропорциональна массам тел. Определить массу тела можно по силе притяжения к другому телу, например к Земле. Способ определение прост – взвешивание. Определенная таким образом масса называется гравитационной. Но масса определяется из второго закона Ньютона, и является мерой инертностью. Совпадение инертной и гравитационной масс многократно подтверждено опытом, хотя в классической механике их совпадение не имеет физического смысла и является случайным. В созданной Эйнштейном релятивисткой теории тяготения равенство гравитационной и инертной масс является принципиальным и положено в основу общей теории относительности.

Сила тяжести.

Силой тяжести материальной точки называется сила $F_т$, равная векторной сумме между силой тяготения ($F_г$) и центробежной силой инерции ($F_и$), обусловленной участием материальной точки в суточном вращении Земли) (рис. 6).

$$F_{\Gamma} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$F_и = m\omega^2 R_з \cos\varphi$ (φ- географическая широта места, ω- угловая скорость суточного вращения Земли, $R_з$- ее радиус). В проекцию на нормаль к поверхности Земли:

$F_и = m\omega^2 R з \cos^2 \varphi$

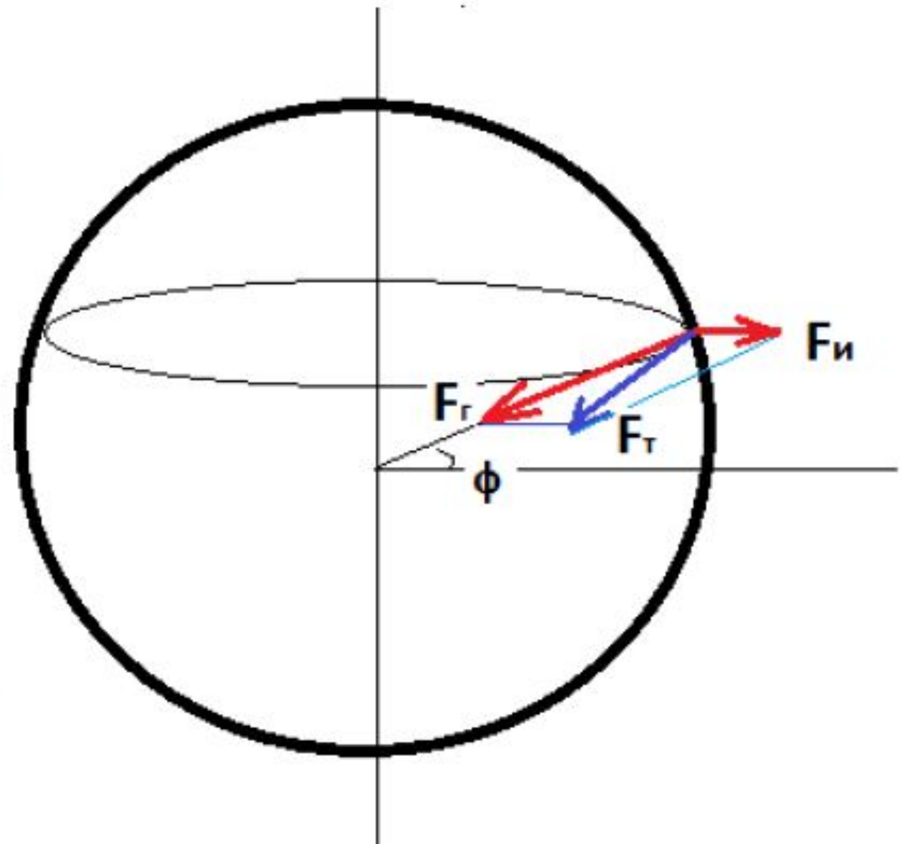


Рис. 6

Свободное падение.

Если тело движется вблизи поверхности Земли, только под действием силы тяжести, то такое движение называют *свободным падением*. Применим второй закон Ньютона F=ma , где F – сила всемирного тяготения масса тела, M – масса земли, $R_з$ – радиус Земли:

$F_T = mg$ Отсюда ускорение свободного падения $g = \dfrac{\vec{F}_Г + \vec{F}_и}{m}$

Приближенно можно считать, что $g = G\dfrac{M}{R^2_з}$ Ускорение свободного падения

неодинаково в различных точках Земли и лежит в пределах от $g \approx 9{,}78$ м/с^2 на экваторе до $g \approx 9{,}83$ м/с^2 на полюсах. Это объясняется вращение Земли (будем говорить на следующей лекции), сплюснотостью Земли возле полюсов, от плотности залегающих в этом месте пород (это используется геологами для поиска полезных ископаемых). Величина ее так же зависит от высоты над уровнем моря. На широте Москвы будем принимать значение $g=9{,}8$ м/с^2 или округлять до 10 м/с^2 при решении задач. Точка приложения силы тяжести тела, то есть точка приложения равнодействующей сил тяжести всех частиц тела, называется центром тяжести.

Экспериментально центр тяжести для плоского тела можно найти следующим способом: подвесим тел за любую точку и после установления равновесия проведем вертикальную линия через точку подвеса. Центр тяжести лежит на этой линии, так в силу условия равновесия сумма всех сил, а это натяжение нити и сила тяжести, равна 0. То есть $m\vec{g} = -\vec{N}$ Линии действия сил лежат на одной прямой, которая проходит через центр тяжести. Повторяя опыт, изменяя точку подвеса, проводим вторую линию, точка их пересечения и будет центром тяжести.

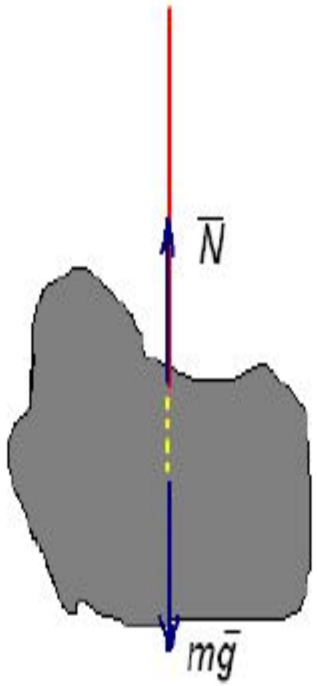


Рис 3

Вес тела.

Сила, с которой тело вследствие притяжения к Земле действует на опору или растягивает подвес, называется весом тела.

Вес тела приложен не к самому телу а к опоре или подвесу! То есть вес является частным случаем силы упругости. Если тело и опора неподвижны относительно Земли или движутся без ускорения, то вес равен силе тяжести. Рассмотрим случай движения с ускорением. Пуст тело находится в лифте, движущемся с ускорением **а** вниз (рис 4). Напишем второй закон Ньютона в проекции на ось Y: $mg - N = ma$ Так как по третьему закону Ньютона $\vec{N} = -\vec{P}$, то можно выразить величину веса тела P=m(g-a). Мы видим, что вес тела в данном случае меньше силы тяжести и при $\vec{a} = \vec{g}$ вес равен 0 (невесомость). Аналогично легко показать, при движении ускорением, направленном вверх P=m(g+a). Такие перегрузки испытывают, например космонавты при старте ракеты. Интересно отметить, что для того, чтобы вес изменялся не обязательно движение должно быть вдоль одной прямой. Эффект уменьшения или увеличения веса можно наблюдать и при движении по окружности.

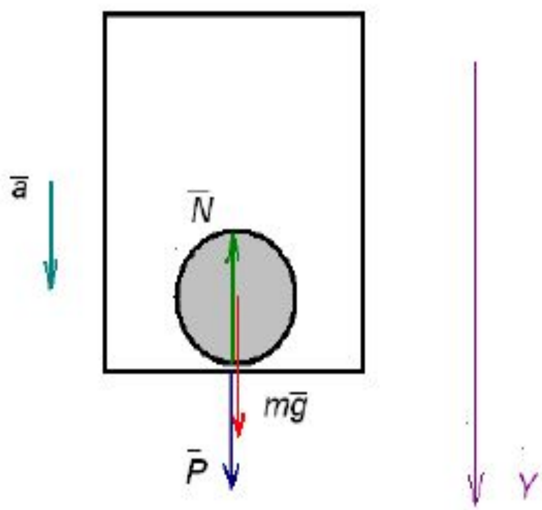


Рис .4

Первая космическая скорость.

Скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно стало искусственным спутником планеты, называют первой космической скоростью.

По второму закону Ньютона $ma = G\frac{Mm}{(R+H)^2}$, где R+H - радиус орбиты спутника (H – высота над поверхности Земли). Так $a=V^2/(R+H)$, то $V = \sqrt{G\frac{M}{R+H}}$ скорость зависит от радиуса орбиты. Рассчитаем значение первой космической скорости вблизи поверхности Земли (H=0). $\frac{v^2}{R} = G\frac{M}{R^2}$; $\frac{v^2}{R} = g$; $v_1 = \sqrt{Rg}$; $R = 6{,}4\cdot 10^5$ *м; отсюда* $v \approx 8 км/с$

Однако реально движения на малых высотах невозможно из-за сильного сопротивления воздуха. Высота над Землей должна превышать 200 км. При движении по орбите космонавты испытывают состояние невесомости, так движение происходит с центростремительным ускорением равным g (для данной высоты).

Пример решения задачи на законы Кеплера.

Определить период обращения спутника по эллиптической орбите, апогей которой равен трем радиусам Земли, а перигей равен радиусу Земли. Найти отношение скоростей в апогее и перигее.

Решение:

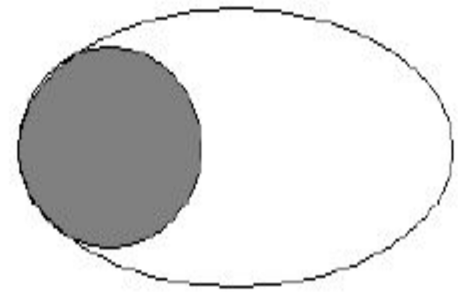


Рис 5

Для ответа на первый вопрос применим третий закон Кеплера: $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$ T_1-период обращения по данной орбите, $a_1 = 2R_З$ – большая полуось данной орбите.

Для сравнения можно взять параметры T_2 и a_2 для любой произвольной орбиты, удобно для орбиты равной радиусу Земли, тогда $a_2 = R_З$,

$T_2 = \frac{2\pi R_З}{v_1} = \frac{2\pi R_З}{\sqrt{R_{З_{з}} g}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_З}{g}}$ подставляя в исходную формулу получим $T_1 = 4\pi\sqrt{\frac{2R_З}{g}}$.

Для ответа на второй вопрос используем второй закон Кеплера: площадь сектора, очерчиваемый спутником вблизи апогея за малый промежуток времени t равен $3R_3 v_\alpha t$. За то же самое время в перигее спутник очертит площадь $R_3 v_\pi t$. Так как площади равны, то $$\frac{v_\alpha}{v_\pi} = \frac{R_\pi}{R_\alpha} = \frac{1}{3}$$

Тема: *Работа мощность энергия.*

Работа. Работой силы F на перемещении Δr называют скалярное произведение: $\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\alpha$, где α угол между векторами силы и перемещения. Это соотношение можно переписать так: $\Delta A = F_r\Delta r$, где F_r- проекция силы на направление перемещения. В общем случае сила может меняться по величине и направлению, в этом случае нужно представить движение тела, как сумму элементарных перемещений $\Delta\vec{r}$, вычислить элементарные работы на этих участках и просуммировать результаты, те есть вычислить интеграл: $A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 F_r dr$.

Работа может быть представлена графически (см. рис. 1). Из рисунка видно, что для вычисления работы на участке 1-2 необходимо вычислить площадь фигуры , ограниченной кривой F(r) и осью абсцисс, причем площадь над осью берется со знаком "+", а под осью со знаком "-", что соответствует отрицательной работе. Единица работы в системе СИ 1Дж=1Н м. Если на частицу действует несколько сил, то работа результирующей силы на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ, совершаемой каждой силой на том же перемещении.

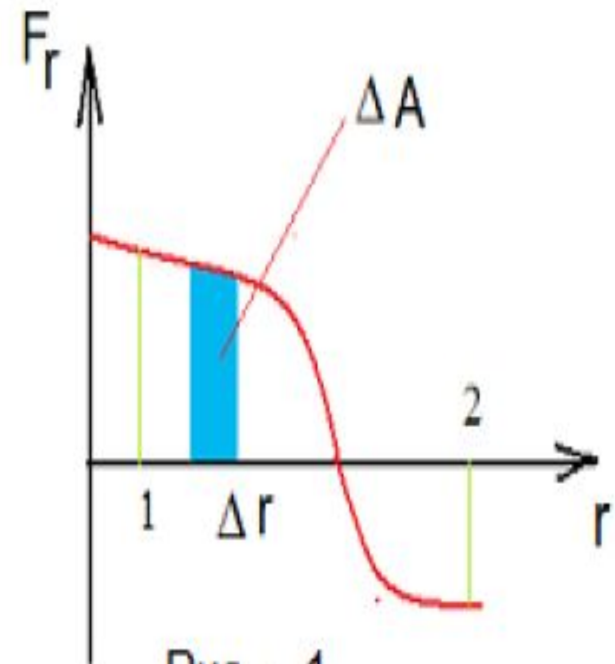


Рис. 1.

Работа силы упругости. Согласно закону Гука сила упругости равна F=-kx. Тогда работа силы упругости при растягивании пружины можно найти по графику на рисунке 2, где x_1 и x_2 – деформация пружины. Площадь трапеции

$$A = -\frac{1}{2}k(x_1 + x_2)(x_2 - x_1) = -(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2) \qquad (1)$$

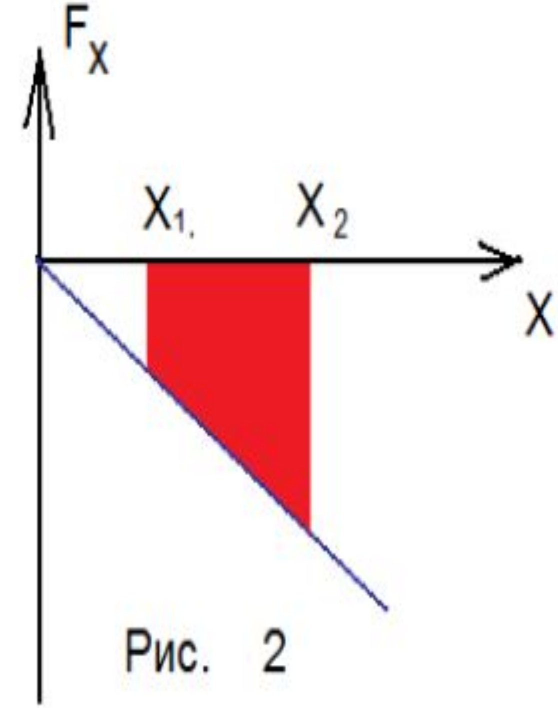


Рис. 2

Работа силы тяжести. Для однородной силы тяжести, то есть когда mg=const можно показать, что $A=-(mgy_2-mgy_1)$ (2).

Как видно, что работа сил упругости и тяжести не зависит от формы траектории, а зависит только от положения начальной и конечной точек. Такие силы называются потенциальными или консервативными.

Мощность. Величина, характеризующая скорость совершения работы называется мощностью. $N_{cp} = \frac{A}{t}$. Единица работы ватт 1Вт=1Дж/с.

Мгновенная мощность: $N = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$.

Кинетическая энергия материальной точки.

В соответствии со вторым законом Ньютона $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$. Элементарная работа силы :

$dA = \vec{F}d\vec{r} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = m\vec{v}d\vec{v} = d\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right)$ скалярная величина $K = \dfrac{mv^2}{2}$ называется кинетической энергией материальной точки. Соотношение $A = \Delta K$ называется теоремой об изменении кинетической энергии: ***изменение кинетической энергии точечного тела равна сумме работ всех действующих на него сил.*** Кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета, но ни в какой системе она не может быть отрицательной.

Кинетическая энергия системы материальных точек.

$K=\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$ по закону сложения скоростей $\vec{v}_i=\vec{v}_c+\vec{v}_i^{\,'}$, где $\vec{v}_c$ - центра масс системы, а $\vec{v}_i^{\,'}$ - скорость точки в системе центра масс.

$$K=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_c+\vec{v}_i^{\,'})^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i(v_c^2+2\vec{v}_c\vec{v}_i^{\,'}+v_i^{'2})=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_c^2+(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i^{\,'})\vec{v}_c+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^{'2}$$

Так как $\sum m_i=M$, а

$$\sum m_i\vec{v}_i^{\,'}=\sum m_i(\vec{v}_i-\vec{v}_c)=\sum m_i\vec{v}_i-(\sum m_i)\vec{v}_c=\sum\vec{p}_i-M\vec{v}_c=M\vec{v}_c-M\vec{v}_c=0$$

Таким образом $K=\frac{1}{2}Mv_c^2+\sum\frac{1}{2}m_i v_i^2$ (3)

Мы получили теорему Кёнига: *Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии, которую имела бы материальная точка, обладающая массой всей системы, и движущейся со скоростью ее центра масс, а также кинетической энергии той же системы в ее движении относительно поступательно движущейся системы отсчета, связанной с ее центром масс.*

Из теоремы Кенига следует, что кинетическая энергия абсолютно твердого тела равна сумме кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения относительно центра масс.

Потенциальная энергия.

Все силы могут быть разбиты на два класса: 1) если работу некоторой силы можно представить как разность скалярных функций U , зависящих только от координат $A_{12}=-\Delta U_{12}=-(U_2-U_1)$, то такую силу называют потенциальной, а функцию U потенциальной энергией тела. Как выше было показано, такими силами являются сила упругости (1) и сила тяжести (2) . Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести U=mgh, а потенциальная энергия деформированной пружины $U=\frac{kx^2}{2}$. 2) Все непотенциальные силы называются диссипативными. К их числу относятся, например, силы трения.

Отметим, что потенциальная энергия зависит от выбора системы отсчета. Более того, измерить можно только изменение потенциальной энергии. Следует иметь ввиду, что формула U=mgh имеет ограниченное применение. Действительно ускорение свободного падения, а следовательно и сила тяжести изменяется с высотой и в том случае, когда этими изменениями нельзя пренебречь мы должны использовать формула для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух материальных точек, находящихся на расстоянии r друг от друга:

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r} \qquad (4)$$

Вывод формулы: $A=-(U_r-U_{беск})$; $U_{беск}=0$;

$$A=\int_{\infty}^{r} G\frac{Mmdr}{r^2}=G\frac{Mm}{r};U=-A=-G\frac{Mm}{r}$$

Закон сохранения механической энергии.

Полной механической энергией тела (системы) называют сумму потенциальной и кинетической энергий тела (системы) $W=K+U$

Закон сохранения энергии вытекает из однородности времени, то есть законы движения не зависят от выбора начала отсчета времени. Если потенциальные силы стационарны, то есть потенциальная энергия есть функция только координат $U(r)$. При этом кинетическая энергия есть функция скорости или импульсов частиц $K(p)$. Продифференцируем энергию по времени: $\frac{dW}{dt}=\sum_i\left(\frac{dU}{dr}\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt}+\frac{dK}{dp}\cdot\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right)=\sum_i\left(-\frac{A_{nomi}}{dr}\cdot\vec{v}_i+\vec{v}_i\vec{F}_i\right)$

Так как $F_{непот}=F-F_{пот}$, то приходим к выражению:

$$\frac{dW}{dt}=\sum_i \vec{F}_{непот\,i}\vec{v}_i;\ или\_dW=\sum_i A_{непот} \qquad (5)$$

Данное выражение носит название *Закона изменения полной механической энергии системы (тела)*: ***Изменение полной механической энергии системы за некоторый промежуток времени равна алгебраической сумме работ непотенциальных (диссипативных) сил за данный промежуток времени.***

При отсутствии таких сил (или если они не совершают работу), то можно говорить, что полная механическая энергия системы сохраняется, то есть выполняется закон сохранения механической энергии:

При движении консервативной системы ее механическая энергия не изменяется; механическая система называется консервативной, если все действующие на нее неконсервативные силы работы не совершают, а все внешние потенциальные силы стационарны.

Пример: Легкая пружина жесткостью k стоит вертикально на столе. С высоты H на нее падает шарик массой m. Определить максимальную скорость, какую будет иметь шарик.

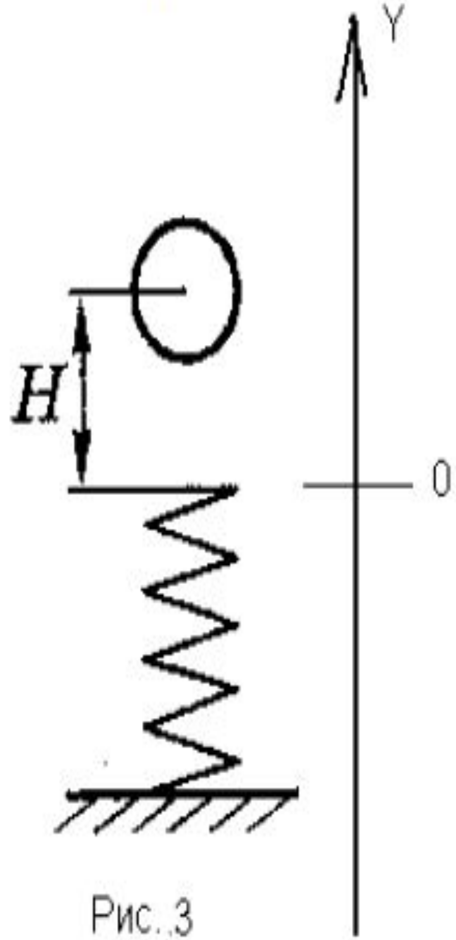


Рис..3

Выберем систему координат, связав начало отчета с положением недеформированной пружины. Система консервативна, можно применить закон сохранения полной механической энергии. Полная механическая энергия системы после касания шарика равна: W=K+U, причем

$U = mgx + \frac{kx^2}{2}$, с другой стороны W=mgH

Кинетическая энергия, а следовательно скорость максимальна, если потенциальная энергия минимальна. Найдем минимум функции U(x).

$U(x)' = mg + kx \Rightarrow x = -\dfrac{mg}{k}$. Подставляя это значение в уравнение ЗСЭ:

$$mgH = \frac{kx^2}{2} + mgx + \frac{mv^2}{2} \; получим: v_{\max} = \sqrt{2gH + \frac{mg^2}{k}}$$

Вторая космическая скорость.

Второй космической скоростью называется скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно преодолела притяжение Земли и стало спутником Солнца.

Получим значение второй космической скорости для запуска ракеты с поверхности Земли. По закону всемирного тяготения: $F = G\dfrac{Mm}{R^2}$. F→0 если R→∞. Следовательно, на бесконечности полная механическая энергия тела должна быть неотрицательной. По закону сохранения механической энергии $\dfrac{mv^2}{2} - G\dfrac{Mm}{r} \geq 0$. Минимальная скорость:

$v = \sqrt{2G\dfrac{M}{R_з}}$ или $v = v_I\sqrt{2}$

V_{II}= 11,2 км/с

Центральное поле сил.

Если какое-то тело создает вокруг себя поле, представляющее собой особый вид материи, способное действовать на расстоянии на другие тела и при этом направлении силы, действующее на частицу в любой точке пространства проходит через неподвижный центр, а модуль силы зависит от расстояния до этого центра, то такое поле называется центральным. Примером центральных полей являются электрическое поле, гравитационное поле.

Силы, действующие на частицу в центральном поле, также консервативны.

Доказательство: элементарная работа на пути $dA=F(r)dS\cos\alpha$. Так как $dS\cos\alpha=dr$ – приращение радиуса вектора r от силового центра O (см. рис .4)

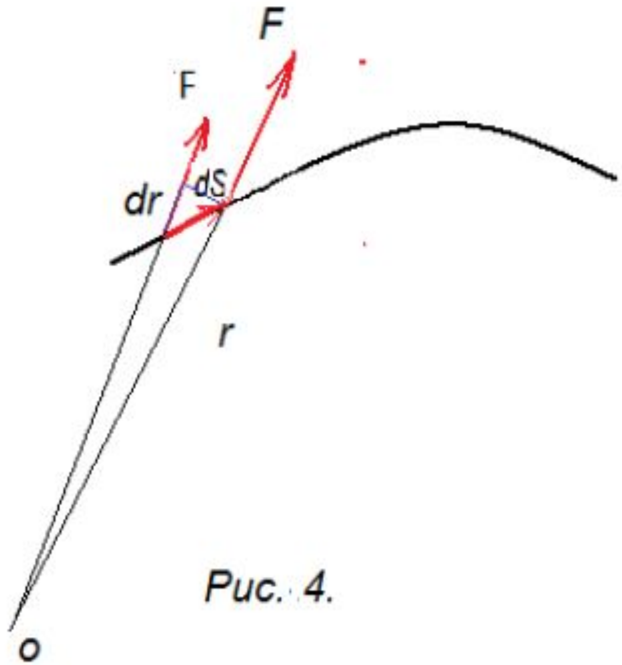


Рис. 4.

Суммарная работа на всем пути будет равна

$A=\int_{r1}^{r2}F(r)dr$ В этом выражении присутствует сила, как функция расстояния и приращение радиуса вектор, которое равно разности расстояний от центра (точки O), то есть работа не зависит от траектории.

Третья космическая скорость

Скорость относительно Земли, которую необходимо сообщить ракете, чтобы она навсегда покинуло пределы Солнечной системы, называется третьей космической скоростью. Она минимальна, если это направление совпадает с направлением орбитального движения Земли вокруг Солнца, и максимальна, когда эти направления противоположны. Орбитальная скорость Земли равна:

$$v_3 = \sqrt{\frac{GM_C}{R_{3C}}} \approx 30 \text{ км/с.}$$

Здесь M_C – масса Солнца, R_{3C} - радиус орбиты Земли. Для полета в бесконечность с орбиты Земли нужна вторая «солнечная» космическая скорость:

$$v_{2C} = \sqrt{\frac{2GM_C}{R_{3C}}} = \sqrt{2}v_3 = 42.1 \text{ км/с.}$$

Дополнительно к скорости Земли ракете нужно сообщить скорость, равную 42 – 30 = 12 км/с. Ракета при старте с Земли должна набрать скорость

$$v = \sqrt{(11.2)^2 + (12)^2} = 16.4 \text{ км/с.}$$