

# Решение нормальных систем ОДУ

Метод Эйлера для нормальных систем ОДУ.

Применительно к нормальным системам ОДУ рассмотрим метод Эйлера на примере задачи Коши для системы второго порядка:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), & (4.7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2' = f_2(x, y_1, y_2), & (4.8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, & (4.9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2(x_0) = y_{20}. & (4.10) \end{cases}$$

Выбирая шаг  $h$  численного интегрирования  $h = x_{i+1} - x_i$ , запишем алгоритм для каждого уравнения системы ОДУ (4.7), (4.8) ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$\begin{cases} y_{1i+1} = y_{1i} + h f_1(x_i, y_{1i}, y_{2i}) + O(h^2), y_{10} = y_1(x_0); & (4.11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{2i+1} = y_{2i} + h f_2(x_i, y_{1i}, y_{2i}) + O(h^2), y_{20} = y_2(x_0). & (4.12) \end{cases}$$

Выражения (4.11), (4.12) описывают алгоритм метода Эйлера численного решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ (4.7)–(4.10).

## Пояснение.

Интегрируя уравнение на отрезке  $h = x_{i+1} - x_i$ , получим

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx.$$

К интегралу в правой части этого выражения применим формулу прямоугольников:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + O(h^2), \quad y_0 = y(x_0), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Если задана задача Коши для ОДУ  $n$ -го порядка, то она сводится к задаче Коши для нормальных систем. Рассмотрим это на примере задачи Коши для  $n = 2$ .

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y' = z, & (4.13) \\ z' = f(x, y, z), & (4.14) \\ y(x_0) = y_0, & (4.15) \\ z(x_0) = y_1. & (4.16) \end{cases}$$

К задаче (4.13)–(4.16) можно применить алгоритм (4.11), (4.12), если обозначить  $f_1(x, y, z) \equiv z$ ,  $f_2(x, y, z) \equiv f(x, y, z)$ , причем неизвестными функциями в этой системе являются функции  $z(x)$ ,  $y(x)$ .

## Метод Эйлера–Коши для нормальных систем.

Рассмотрим метод применительно к задаче Коши для нормальных систем ОДУ 2-го порядка (4.7)–(4.10).

Каждый этап алгоритма используется сразу для всех неизвестных (в данном случае  $y_1, y_2$ ), при этом  $y_{10} = y_1(x_0)$ ,  $y_{20} = y_2(x_0)$ ,  $x_{i+1} = x_i + h$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}_{1i+1} = y_{1i} + h f_1(x_i, y_{1i}, y_{2i}), \end{array} \right. \quad (4.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}_{2i+1} = y_{2i} + h f_2(x_i, y_{1i}, y_{2i}), \end{array} \right. \quad (4.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{1i+1} = y_{1i} + \frac{h}{2} [f_1(x_i, y_{1i}, y_{2i}) + f_1(x_{i+1}, \tilde{y}_{1i+1}, \tilde{y}_{2i+1})], \end{array} \right. \quad (4.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{2i+1} = y_{2i} + \frac{h}{2} [f_2(x_i, y_{1i}, y_{2i}) + f_2(x_{i+1}, \tilde{y}_{1i+1}, \tilde{y}_{2i+1})]. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Выражения (4.20)–(4.23) — алгоритм метода Эйлера–Коши решения задачи Коши (4.7)–(4.10) для нормальной системы (4.7), (4.8) второго порядка.

**Метод Рунге–Кутта для нормальных систем ОДУ.** Метод Рунге–Кутта для нормальных систем рассмотрим на примере задачи Коши для нормальной системы ОДУ второго порядка (4.7)–(4.10):

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2), \\ y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}. \end{cases}$$

Будем обозначать частные приращения для искомой функции  $y_1(x)$  через  $k_i^1, k_i^2, k_i^3, k_i^4$ , а для искомой функции  $y_2(x)$  — через  $l_i^1, l_i^2, l_i^3, l_i^4$ . Поскольку правые части системы ОДУ  $f_1(x, y_1, y_2), f_2(x, y_1, y_2)$  зависят от всех искомым функций (в данном случае от  $y_1$  и  $y_2$ ), то *приращения для  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  на каждом этапе вычисляются одновременно.* Тогда метод Рунге–Кутта четвертого порядка точности для нормальной системы ОДУ второго порядка примет вид



$$\left\{ \begin{array}{l} y_{1i+1} = y_{1i} + \Delta y_{1i}, \\ y_{2i+1} = y_{2i} + \Delta y_{2i}, \\ \Delta y_{1i} = \frac{1}{6}(k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4), \\ \Delta y_{2i} = \frac{1}{6}(l_i^1 + 2l_i^2 + 2l_i^3 + l_i^4), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.33) \\ (4.34) \\ (4.35) \\ (4.36) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_i^1 = h f_1(x_i, y_{1i}, y_{2i}), \\ l_i^1 = h f_2(x_i, y_{1i}, y_{2i}), \\ k_i^2 = h f_1\left(x_{i+1/2}, y_{1i} + \frac{k_i^1}{2}, y_{2i} + \frac{l_i^1}{2}\right), \\ l_i^2 = h f_2\left(x_{i+1/2}, y_{1i} + \frac{k_i^1}{2}, y_{2i} + \frac{l_i^1}{2}\right), \\ k_i^3 = h f_1\left(x_{i+1/2}, y_{1i} + \frac{k_i^2}{2}, y_{2i} + \frac{l_i^2}{2}\right), \\ l_i^3 = h f_2\left(x_{i+1/2}, y_{1i} + \frac{k_i^2}{2}, y_{2i} + \frac{l_i^2}{2}\right), \\ k_i^4 = h f_1(x_{i+1}, y_{1i} + k_i^3, y_{2i} + l_i^3), \\ l_i^4 = h f_2(x_{i+1}, y_{1i} + k_i^3, y_{2i} + l_i^3), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.37) \\ (4.38) \\ (4.39) \\ (4.40) \\ (4.41) \\ (4.42) \\ (4.43) \\ (4.44) \end{array}$$

где  $x_{i+1/2} = x_i + h/2$ ,  $x_{i+1} = x_i + h$ .

Алгоритм (4.33)–(4.44) метода Рунге–Кутты для нормальных систем ОДУ 2-го порядка легко распространяется на нормальные системы 3-го, 4-го и т. д. порядков. Например, для нормальной системы 3-го порядка имеются три неизвестные функции  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$ , причем для каждой из них вводятся свои частные приращения, а именно:  $k_i^1, k_i^2, k_i^3, k_i^4$  для  $y_1(x)$ ;  $l_i^1, l_i^2, l_i^3, l_i^4$  для  $y_2(x)$ ;  $m_i^1, m_i^2, m_i^3, m_i^4$  для  $y_3(x)$ . Тогда в методе (4.33)–(4.44) к каждой паре формул добавляется еще одна для неизвестной  $y_3(x)$ .



## Выбор шага численного интегрирования задач Коши

При численном решении задач Коши для ОДУ и систем ОДУ шаг численного решения можно выбирать апостериорно и априорно. В обоих случаях первоначальное значение шага  $h$  задается.

При *апостериорном* выборе шага последний изменяется в процессе счета на основе получаемой информации о поведении решения и на основе заданной точности  $\varepsilon$ .

Пусть  $\varepsilon$  — заданная точность численного решения, и пусть  $h$  — первоначально выбранный шаг. Тогда алгоритм дальнейшего выбора шага следующий.

1. Выбранным методом на отрезке  $x \in [x_0, x_1]$ ,  $x_1 = x_0 + h$  решается задача Коши с шагом  $h$  с получением значения  $y_{x=h}^h$ .
2. Тем же методом с шагом  $h/2$  решается задача Коши с получением  $y_{x=h/2}^{h/2}$

3. Анализируется неравенство

$$\left| y_{x=h}^h - y_{x=h}^{h/2} \right| \leq \varepsilon. \quad (4.45)$$

Если неравенство (4.45) удовлетворяется, то значение шага численного интегрирования на следующем шаге увеличивается вдвое по сравнению с первоначально выбранным шагом, т.е. становится равным  $2h$ , и алгоритм повторяется начиная с п. 1.

4. Если неравенство (4.45) не выполняется, то счет ведется с шагом  $h/4$  начиная с отрезка  $x \in [x_0, x_0 + h/4]$  и после получения значения  $y_{x=h/2}^{h/4}$  анализируется неравенство

$$\left| y_{x=h/2}^{h/2} - y_{x=h/2}^{h/4} \right| \leq \varepsilon.$$

Если оно удовлетворяется, то дальнейший счет ведется с шагом  $h/2$  и т. д.

При *априорном* выборе шага расчет ведется с первоначально выбранным шагом  $h$  с получением функции  $[y(x_i)]_h$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , и с шагом  $h/2$  с получением функции  $[y(x_{2i})]_{h/2}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Затем анализируется неравенство

$$\max_i \left| [y(x_i)]_h - [y(x_{2i})]_{h/2} \right| \leq \varepsilon. \quad (4.46)$$

Если оно выполнено, то решение  $[y(x_i)]_{h/2}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , принимается за истинное, в противном случае расчет повторяется с шагом  $h/4$  и сравниваются по норме (4.46) функции  $[y(x_i)]_{h/2}$  и  $[y(x_{2i})]_{h/4}$  и т. д.

## Процедура Рунге оценки погрешности и уточнения численного решения задач Коши

У всех рассмотренных методов численного решения задачи Коши порядок погрешности относительно шага  $h$  на всем интервале решения на единицу ниже порядка погрешности на одном шаге  $h$ .

*Определение.* Порядком метода назовем показатель  $p$  степени  $h^p$  в главном члене погрешности метода.

В методе Эйлера главный член погрешности на шаге  $h$  пропорционален  $h^2$ , а на всем интервале пропорционален шагу  $h$ . Поэтому метод Эйлера — метод 1-го порядка. По той же причине метод Эйлера–Коши — метод 2-го порядка, метод Рунге–Кутта — метод 4-го порядка (здесь порядок метода в точности совпадает с порядком соответствующей квадратурной формулы численного интегрирования).



Пусть задача Коши решается методом  $p$ -го порядка с шагом  $h$  с получением численных значений  $y_h$  и главным членом погрешности  $\varphi(x)h^p$ , пропорциональным  $h^p$ . Тогда неизвестное точное решение  $y(x)$  можно представить в виде

$$y(x) = y_h + \varphi(x)h^p + O(h^{p+1}). \quad (4.47)$$

Аналогичное равенство с шагом  $h/2$  представим следующим образом:

$$y(x) = y_{h/2} + \varphi(x)(h/2)^p + O(h^{p+1}). \quad (4.48)$$

Определим  $\varphi(x) \left(\frac{h}{2}\right)^p$  вычитанием (4.47) из (4.48):

$$\varphi(x) \left(\frac{h}{2}\right)^p = \frac{y_{h/2} - y_h}{2^p - 1} \quad (4.49)$$



Выражение (4.49) дает апостериорную оценку погрешности численного решения. Подставляя (4.49) в (4.48), получим уже метод  $(p + 1)$ -порядка:

$$y(x) = y_{h/2} + \frac{y_{h/2} - y_h}{2^p - 1} + O(h^{p+1}), \quad (4.50)$$

так как главный член погрешности в алгоритме (4.50) пропорционален степени  $h^{p+1}$ .

Процедура (4.50) называется процедурой Рунге уточнения численного решения задачи Коши. Для ее применения задачу необходимо решать дважды с шагами  $h$  и  $h/2$ .

Процесс уточнения с применением формулы (4.50) можно применять и дальше, проводя расчеты с шагами  $h/4$ ,  $h/8$  и т. д., пока не выполнится условие

$$\max \left| y_{h/2^{k-1}} - y_{h/2^k} \right| \leq \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots$$

**Пример** Методами Эйлера, Эйлера–Коши и Рунге–Кутта с шагом  $h = 0,1$  численно проинтегрировать следующую задачу Коши для нормальной системы второго порядка до значения  $x = 0,2$  включительно (т. е. два шага):

$$\begin{cases} y_1' = x + 2y_1 + y_2, \\ y_2' = 2x + y_1 + 2y_2, \\ y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$$

Задача допускает аналитическое решение, которое имеет вид

$$y_1(x) = \frac{7}{6}e^{3x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{3},$$

$$y_2(x) = \frac{7}{6}e^{3x} + \frac{1}{2}e^x - x - \frac{2}{3};$$

$$y_1(0) = 1; \quad y_1(0,1) = 1,355583; \quad y_1(0,2) = 1,848438;$$

$$y_2(0) = 1; \quad y_2(0,1) = 1,36075; \quad y_2(0,2) = 1,86984.$$

## Метод Эйлера.

$$\begin{cases} y_{1i+1} = y_{1i} + h(x_i + 2y_{1i} + y_{2i}), \\ y_{2i+1} = y_{2i} + h(2x_i + y_{1i} + 2y_{2i}), \\ y_{10} = 1, y_{20} = 1; \end{cases}$$

$$\underline{i = 0; x_0 = 0; y_{10} = 1; y_{20} = 1 :}$$

$$y_{11} = y_{10} + h(x_0 + 2y_{10} + y_{20}) = 1 + 0,1(0 + 2 \cdot 1 + 1) = 1,3;$$

$$y_{21} = y_{20} + h(2x_0 + y_{10} + 2y_{20}) = 1 + 0,1(2 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 1) = 1,3;$$

$$\underline{i = 1; x_1 = 0,1; y_{11} = 1,3; y_{21} = 1,3 :}$$

$$\begin{aligned} y_{12} &= y_{11} + h \cdot (x_1 + 2y_{11} + y_{21}) = \\ &= 1,3 + 0,1(0,1 + 2 \cdot 1,3 + 1,3) = 1,7; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{22} &= y_{21} + h \cdot (2 \cdot x_1 + y_{11} + 2y_{21}) = \\ &= 1,3 + 0,1(2 \cdot 0,1 + 1,3 + 2 \cdot 1,3) = 1,71; \end{aligned}$$

*Метод Эйлера–Кوشу.*

$$\begin{cases} \tilde{y}_{1\ i+1} = y_{1i} + h (x_i + 2y_{1i} + y_{2i}), \\ \tilde{y}_{2\ i+1} = y_{2i} + h (2x_i + y_{1i} + 2y_{2i}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{1\ i+1} = y_{1i} + \frac{h}{2} [(x_i + 2y_{1i} + y_{2i}) + (x_{i+1} + 2\tilde{y}_{1\ i+1} + \tilde{y}_{2\ i+1})], \\ y_{2\ i+1} = y_{2i} + \frac{h}{2} [(2x_i + y_{1i} + 2y_{2i}) + (2x_{i+1} + \tilde{y}_{1\ i+1} + 2\tilde{y}_{2\ i+1})], \end{cases}$$

$$y_{10} = 1, \quad y_{20} = 1;$$

$$\underline{i = 0; x_0 = 0; x_1 = 0,1; y_{10} = 1; y_{20} = 1 :}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_{1\ 1} = y_{10} + h (x_0 + 2y_{10} + y_{20}) = 1 + 0,1 (0 + 2 \cdot 1 + 1) = 1,3; \\ \tilde{y}_{2\ 1} = y_{20} + h (2x_0 + y_{10} + 2y_{20}) = 1 + 0,1 (2 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 1) = 1,3; \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11} = y_{10} + \frac{h}{2} [(x_0 + 2y_{10} + y_{20}) + (x_1 + 2\tilde{y}_{11} + \tilde{y}_{21})] = \\ \quad = 1 + \frac{0,1}{2} [(0 + 2 \cdot 1 + 1) + (0,1 + 2 \cdot 1,3 + 1,3)] = 1,35; \\ y_{21} = y_{20} + \frac{h}{2} [(2x_0 + y_{10} + 2y_{20}) + (2x_1 + \tilde{y}_{11} + 2\tilde{y}_{21})] = \\ \quad = 1 + \frac{0,1}{2} [(2 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 1) + (2 \cdot 0,1 + 1,3 + 2 \cdot 1,3)] = 1,355; \end{array} \right.$$

$$\underline{i = 1; x_1 = 0,1; x_2 = 0,2; y_{11} = 1,35; y_{21} = 1,355 :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}_{12} = y_{11} + h (x_1 + 2y_{11} + y_{21}) = \\ \quad = 1,35 + 0,1 (0,1 + 2 \cdot 1,35 + 1,355) = 1,7655; \\ \tilde{y}_{22} = y_{21} + h (2x_1 + y_{11} + 2y_{21}) = \\ \quad = 1,355 + 0,1 (2 \cdot 0,1 + 1,35 + 2 \cdot 1,355) = 1,781; \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned}y_{12} &= y_{11} + \frac{h}{2} [(x_1 + 2y_{11} + y_{21}) + (x_2 + 2\tilde{y}_{12} + \tilde{y}_{22})] = \\ &= 1,35 + \frac{0,1}{2} [(0,1 + 2 \cdot 1,35 + 1,355) + \\ &\quad + (0,2 + 2 \cdot 1,7655 + 1,781)] = 1,8334;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{22} &= y_{21} + \frac{h}{2} [(2x_1 + y_{11} + 2y_{21}) + (2x_2 + \tilde{y}_{12} + 2\tilde{y}_{22})] = \\ &= 1,355 + \frac{0,1}{2} [(2 \cdot 0,1 + 1,35 + 2 \cdot 1,355) + \\ &\quad + (2 \cdot 0,2 + 1,7655 + 2 \cdot 1,781)] = 1,8544;\end{aligned}$$

## Метод Рунге–Кутты.

$$\begin{cases} y_{1i+1} = y_{1i} + \Delta y_{1i}, \\ y_{2i+1} = y_{2i} + \Delta y_{2i}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta y_{1i} = \frac{1}{6} (k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4), \\ \Delta y_{2i} = \frac{1}{6} (l_i^1 + 2l_i^2 + 2l_i^3 + l_i^4), \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_i^1 = h \cdot [x_i + 2y_{1i} + y_{2i}], \\ l_i^1 = h \cdot [2x_i + y_{1i} + 2y_{2i}], \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_i^2 = h \left[ \left( x_i + \frac{h}{2} \right) + 2 \left( y_{1i} + \frac{k_i^1}{2} \right) + \left( y_{2i} + \frac{l_i^1}{2} \right) \right], \\ l_i^2 = h \left[ 2 \left( x_i + \frac{h}{2} \right) + \left( y_{1i} + \frac{k_i^1}{2} \right) + 2 \left( y_{2i} + \frac{l_i^1}{2} \right) \right], \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_i^3 = h \left[ \left( x_i + \frac{h}{2} \right) + 2 \left( y_{1i} + \frac{k_i^2}{2} \right) + \left( y_{2i} + \frac{l_i^2}{2} \right) \right], \\ l_i^3 = h \left[ 2 \left( x_i + \frac{h}{2} \right) + \left( y_{1i} + \frac{k_i^2}{2} \right) + 2 \left( y_{2i} + \frac{l_i^2}{2} \right) \right], \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_i^4 = h \cdot \left[ (x_i + h) + 2 (y_{1i} + k_i^3) + (y_{2i} + l_i^3) \right], \\ l_i^4 = h \cdot \left[ 2 (x_i + h) + (y_{1i} + k_i^3) + 2 (y_{2i} + l_i^3) \right]; \end{cases}$$

$$i = 0; x_0 = 0; x_{0+1/2} = 0,05; x_1 = 0,1; y_{10} = 1; y_{20} = 1 :$$


---

$$\begin{cases} y_{11} = y_{10} + \Delta y_{10} = 1 + 0,35558 = 1,35558; \\ y_{21} = y_{20} + \Delta y_{20} = 1 + 0,36073 = 1,36073; \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta y_{10} = \frac{1}{6} (k_0^1 + 2k_0^2 + 2k_0^3 + k_0^4) = \\ \quad = \frac{1}{6} (0,3 + 2 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,3578 + 0,4179) = 0,35558; \\ \Delta y_{20} = \frac{1}{6} (l_0^1 + 2l_0^2 + 2l_0^3 + l_0^4) = \\ \quad = \frac{1}{6} (0,3 + 2 \cdot 0,355 + 2 \cdot 0,363 + 0,4284) = 0,36073; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0^1 = h \cdot [x_0 + 2y_{10} + y_{20}] = 0,1 (0 + 2 \cdot 1 + 1) = 0,3; \\ l_0^1 = h \cdot [2x_0 + y_{10} + 2y_{20}] = 0,1 (2 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 1) = 0,3; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0^2 = h \left[ \left( x_0 + \frac{h}{2} \right) + 2 \left( y_{10} + \frac{k_0^1}{2} \right) + \left( y_{20} + \frac{l_0^1}{2} \right) \right] = \\ \quad = 0,1 \left[ 0,05 + 2 \left( 1 + \frac{0,3}{2} \right) + \left( 1 + \frac{0,3}{2} \right) \right] = 0,35; \\ l_0^2 = h \left[ 2 \left( x_0 + \frac{h}{2} \right) + \left( y_{10} + \frac{k_0^1}{2} \right) + 2 \left( y_{20} + \frac{l_0^1}{2} \right) \right] = \\ \quad = 0,1 \left[ 2 \cdot 0,05 + \left( 1 + \frac{0,3}{2} \right) + 2 \left( 1 + \frac{0,3}{2} \right) \right] = 0,355; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0^3 = h \left[ \left( x_0 + \frac{h}{2} \right) + 2 \left( y_{10} + \frac{k_0^2}{2} \right) + \left( y_{20} + \frac{l_0^2}{2} \right) \right] = \\ \quad = 0,1 \left[ 0,05 + 2 \left( 1 + \frac{0,35}{2} \right) + \left( 1 + \frac{0,355}{2} \right) \right] = 0,3578; \\ l_0^3 = h \left[ 2 \left( x_0 + \frac{h}{2} \right) + \left( y_{10} + \frac{k_0^2}{2} \right) + 2 \left( y_{20} + \frac{l_0^2}{2} \right) \right] = \\ \quad = 0,1 \left[ 2 \cdot 0,05 + \left( 1 + \frac{0,35}{2} \right) + 2 \left( 1 + \frac{0,355}{2} \right) \right] = 0,363; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0^4 = h \cdot \left[ (x_0 + h) + 2 (y_{10} + k_0^3) + (y_{20} + l_0^3) \right] = \\ \quad = 0,1 [0,1 + 2 (1 + 0,3578) + (1 + 0,363)] = 0,4179; \\ l_0^4 = h \cdot \left[ 2 (x_0 + h) + (y_{10} + k_0^3) + 2 (y_{20} + l_0^3) \right] = \\ \quad = 0,1 [2 \cdot 0,1 + (1 + 0,3578) + 2 (1 + 0,363)] = 0,4284; \end{array} \right.$$



$$\underline{i = 1}; \quad \underline{x_1 = 0,1};$$

$$\underline{x_{1+1/2} = 0,15}; \quad \underline{x_2 = 0,2}; \quad \underline{y_{11} = 1,35558}; \quad \underline{y_{21} = 1,36073} :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{12} = y_{11} + \Delta y_{11} = 1,35558 + 0,49283 = 1,8484; \\ y_{22} = y_{21} + \Delta y_{21} = 1,36073 + 0,5090 = 1,8698; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta y_{11} = \frac{1}{6} (k_1^1 + 2k_1^2 + 2k_1^3 + k_1^4) = \\ \quad = \frac{1}{6} (0,41719 + 2 \cdot 0,4853 + 2 \cdot 0,4958 + 0,57756) = \\ \quad = 0,49283; \\ \Delta y_{21} = \frac{1}{6} (l_1^1 + 2l_1^2 + 2l_1^3 + l_1^4) = \\ \quad = \frac{1}{6} (0,4277 + 2 \cdot 0,5013 + 2 \cdot 0,5121 + 0,5997) = 0,5090; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1^1 = h \cdot [x_1 + 2y_{11} + y_{21}] = \\ \quad = 0,1 (0,1 + 2 \cdot 1,35558 + 1,36073) = 0,41719; \\ l_1^1 = h \cdot [2x_1 + y_{11} + 2y_{21}] = \\ \quad = 0,1 (0,2 + 1,35558 + 2 \cdot 1,36073) = 0,4277; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1^2 = h \left[ \left( x_1 + \frac{h}{2} \right) + 2 \left( y_{11} + \frac{k_1^1}{2} \right) + \left( y_{21} + \frac{l_1^1}{2} \right) \right] = \\ \quad = 0,1 \left[ 0,15 + 2 \left( 1,35558 + \frac{0,41719}{2} \right) + \right. \\ \quad \quad \left. + \left( 1,36073 + \frac{0,4277}{2} \right) \right] = 0,4853; \\ l_1^2 = h \left[ 2 \left( x_1 + \frac{h}{2} \right) + \left( y_{11} + \frac{k_1^1}{2} \right) + 2 \left( y_{21} + \frac{l_1^1}{2} \right) \right] = \\ \quad = 0,1 \left[ 2 \cdot 0,15 + \left( 1,35558 + \frac{0,41719}{2} \right) + \right. \\ \quad \quad \left. + 2 \left( 1,36073 + \frac{0,4277}{2} \right) \right] = 0,5013; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 k_1^3 = h \left[ \left( x_1 + \frac{h}{2} \right) + 2 \left( y_{11} + \frac{k_1^2}{2} \right) + \left( y_{21} + \frac{l_1^2}{2} \right) \right] = \\
 = 0,1 \left[ 0,15 + 2 \left( 1,35558 + \frac{0,4853}{2} \right) + \right. \\
 \left. + \left( 1,36073 + \frac{0,5013}{2} \right) \right] = 0,4958; \\
 \\
 l_1^3 = h \left[ 2 \left( x_1 + \frac{h}{2} \right) + \left( y_{11} + \frac{k_1^2}{2} \right) + 2 \left( y_{21} + \frac{l_1^2}{2} \right) \right] = \\
 = 0,1 \left[ 2 \cdot 0,15 + \left( 1,35558 + \frac{0,4853}{2} \right) + \right. \\
 \left. + 2 \left( 1,36073 + \frac{0,5013}{2} \right) \right] = 0,5121;
 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1^4 = h \cdot [(x_1 + h) + 2(y_{11} + k_1^3) + (y_{21} + l_1^3)] = \\ \quad = 0,1 [0,2 + 2(1,35558 + 0,4958) + \\ \quad \quad + (1,36073 + 0,5121)] = 0,57756; \\ l_1^4 = h \cdot [2(x_1 + h) + (y_{11} + k_1^3) + 2(y_{21} + l_1^3)] = \\ \quad = 0,1 [2 \cdot 0,2 + (1,35558 + 0,4958) + \\ \quad \quad + 2(1,36073 + 0,5121)] = 0,5997. \end{array} \right.$$

Таким образом, метод Эйлера для заданной системы ОДУ (решение которой растет по экспоненте) дает погрешность уже в первой цифре после запятой, метод Эйлера–Коши — во второй, и только метод Рунге–Кутта выдерживает теоретическую точность, сохраняя верными четыре цифры после запятой.

## Обусловленность численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений

хорошо обусловленный численный метод приводит к несущественному отклонению получаемых приближенных решений от истинных. С позиций теории погрешностей (см. разд. 3.1) в этом случае говорят об устойчивости применяемого численного (приближенного) метода. В любом случае исследование устойчивости численных методов оказывается весьма полезным и позволяет, как будет показано, дать рекомендации по выбору величины шага при решении дифференциальных уравнений.

### Численная устойчивость явного метода Эйлера

Точное решение  $y_i^*$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием в  $i$ -м узле сетки независимой переменной с учетом необходимых требований для разложения в ряд Тейлора имеет вид :

$$y_{i+1}^* = y_i^* + hy_i^{*\prime} + \frac{h^2}{2!} y_i^{*\prime\prime} + \dots, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.5.33)$$

В качестве приближения точного решения используется формула явного метода Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.5.34)$$

С учетом общего выражения дифференциального уравнения для бесконечного ряда Тейлора может быть записано:

$$y_i^{*\prime} = f(x_i, y_i^*). \quad (3.5.35)$$

Для определения ошибки численного метода в сравнении с точным решением (3.5.33) вычитаем из (3.5.34) значение (3.5.35), пренебрегая членами разложения со второй и более высокого порядка производными и опуская  $x_i$ :

$$y_{i+1} - y_{i+1}^* = y_i - y_i^* + h[f(y_i) - f(y_i^*)], \quad (3.5.36)$$



обозначая ошибки:

$$\varepsilon_{i+1} = y_{i+1} - y_{i+1}^* \quad \text{и} \quad \varepsilon_i = y_i - y_i^* \quad (3.5.37)$$

и для простоты рассматривая модельное уравнение (3.5.35), устойчивое по Ляпунову (см. раздел «Обусловленность задачи решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Стационарные точки решения. Устойчивость решений дифференциальных уравнений по Ляпунову») вида (3.5.66):

$$y' = -ay \quad (a > 0), \quad (3.5.38)$$

где  $a$  — некоторый постоянный коэффициент, в соответствии с формулами (3.5.34) и (3.5.33) (с учётом того, что  $f(x, y) = -ay$ ) будет справедливо:

$$y_{i+1} = y_i + h(-ay_i) = (1 - ah)y_i; \quad (3.5.39)$$

и с учётом (3.5.33) и (3.5.36):

$$y_{i+1} - y_{i+1}^* = y_i - y_i^* + ha(y_i - y_i^*); \quad (3.5.40)$$

с учётом (3.5.37):

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i - ha\varepsilon_i = (1 - ha)\varepsilon_i. \quad (3.5.41)$$

Достаточное условие устойчивости численного метода следующее: ошибка каждого следующего шага решения  $\varepsilon_{i+1}$  меньше или равна ошибки предыдущего шага  $\varepsilon_i$ :

$$|1 - ha| \leq 1. \quad (3.5.42)$$

Раскрывая это неравенство:

$$-1 \leq (1 - ha) \leq 1$$

и учитывая, что  $a > 0$ , получаем:

$$ha \leq 2. \quad (3.5.43)$$

Таким образом, для определения величины шага в случае модельного уравнения (3.5.38) можно применять следующую формулу:

$$h \leq 2/a. \quad (3.5.44)$$

Отсюда следует, что при больших значениях коэффициента  $a$  величина шага решения дифференциального уравнения явным методом Эйлера должна быть весьма незначительной.

Аналогичные выводы справедливы и для других явных методов типа Эйлера и Рунге–Кутты, что сужает области их широкого применения.

### *Численная устойчивость неявного метода Эйлера*

Формула неявного метода Эйлера для приближения точного решения имеет вид (3.5.16):

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.5.45)$$

Или для выбранного модельного уравнения (3.5.38):

$$y_{i+1} = y_i + h(-ay_{i+1}).$$

Если преобразовать последнее уравнение к виду

$$y_{i+1}(1 + ah) = y_i \quad (3.5.46)$$

и вычесть из него выражение для точного решения (3.5.38) с учётом соотношений для ошибок (3.5.37), будет справедливо:

$$\epsilon_{i+1} = \frac{\epsilon_i}{1 + ha} \quad (3.5.47)$$

Отсюда вытекает следующее достаточное условие устойчивости неявного метода Эйлера (3.5.42):

$$|1 + ha| \geq 1. \quad (3.5.48)$$

Так как величина шага решения  $h > 0$  и величина коэффициента  $a > 0$  (3.5.38), для выбора величины шага в неявном методе Эйлера для выбранного модельного уравнения следует использовать неравенство:

$$ha \geq 0, \quad (3.5.49)$$

из которого следует, что при любом шаге решения  $h$  и для любых положительных коэффициентов  $a$  для модельного уравнения (3.5.38) неявный метод Эйлера будет численно устойчивым.

Аналогичные выводы будут справедливы и для других неявных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Поэтому в большинстве случаев, несмотря на трудоёмкость, неявные методы считаются более надёжными, чем явные методы.

## Обусловленность задачи решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Стационарные точки решения. Устойчивость решений дифференциальных уравнений по Ляпунову

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.5.50)$$

с начальными условиями

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \quad i = 1, \dots, n.$$

В результате ее решения могут быть получены функции со *стационарными точками решения*, так называемые решения устойчивые в «большом», когда после некоторого значения независимой переменной  $x$ , например  $x_s$ , величина искомой функции-решения становится константой, т.е.

$$y_i(x) = \text{const}^{(i)} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.5.51)$$

и, соответственно:

$$\frac{dy_i}{dx} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.5.52)$$

при всех  $x \geq x_s$ .



Таким образом, *устойчивые решения* дифференциальных уравнений (кривая 1 на рис. 3.28) представляют собой функции, состоящие из двух частей:

- *области стационарности* (I), в которой они не меняются и их значения равны соответствующим стационарным точкам решения;
- *области нестационарности* (II) (так называемые *области «переходного процесса»*), в которой значения функций изменяются с изменением величины независимой переменной  $x$ .

*Неустойчивые решения* (кривая 2 на рис. 3.28) не содержат стационарных точек решения и всегда изменяются с изменением независимой переменной  $x$ .

Очевидно, что больший интерес представляют *устойчивые решения* дифференциальных уравнений (решения, устойчивые «в большом»), которые с изменением независимой переменной  $x$  достигают *областей стационарности*. Эти области соответствуют областям нормальной эксплуатации большей части химико-технологических процессов в непрерывных режимах.

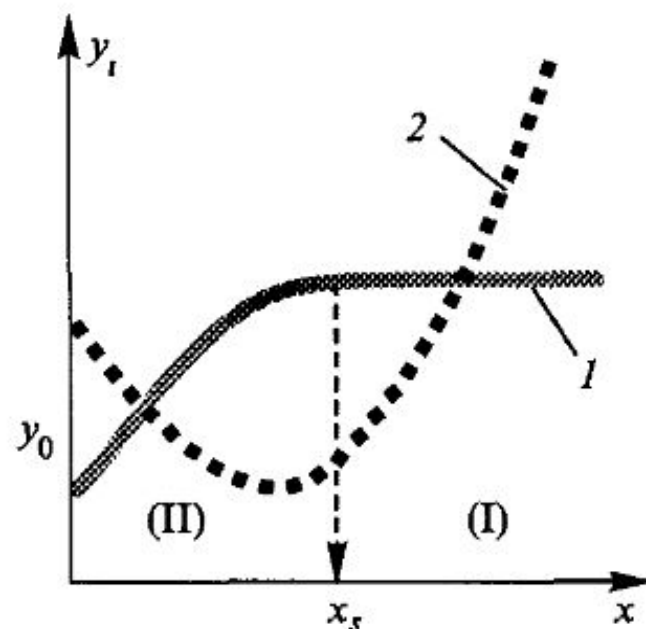


Рис. 3.28. Графическое изображение устойчивых и неустойчивых в «большом» решений обыкновенных дифференциальных уравнений



Поэтому анализ обусловленности задачи решения систем дифференциальных уравнений (устойчивости «в малом»), в большинстве случаев, выполняется для систем с устойчивыми «в большом» решениями и в двух областях решений – области стационарности (чаще всего) и области нестационарности (реже). По-существу, в этом случае речь идет о влиянии незначительных возмущений (поэтому говорят об устойчивости в «малом») на результаты решения задачи. Если результаты решения (искомые функции) *изменяются также незначительно*, то задача решения обыкновенного дифференциального уравнения считается *хорошо обусловленной*, в противном случае – *плохо обусловленной*.

*Хорошо обусловленные системы* называются *устойчивыми в смысле Ляпунова*. В этом случае каждое частное решение системы (3.5.4) может быть истолковано как координата движущейся материальной точки в  $n$ -мерном пространстве, зависящая от времени  $x$ .

В результате анализируемая СОДУ записывается в виде

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5.53)$$

Пусть функции  $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$  имеют непрерывные частные производные 1-го порядка. Обозначим через  $y_i = y_i(x, x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ ,  $i = 1, \dots, n$  решение данной системы с начальными условиями  $y_{i0}$  при  $x = x_0$ , т.е.

$$y_{i0} = y_i(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.5.54)$$

В результате можно привести строгое определение устойчивости в смысле Ляпунова: движение точки с координатами  $y_i = y_i(x, x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$  называется устойчивым в смысле Ляпунова, если для каждого  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $\delta > 0$ , что для всех  $|y_{i0} - \tilde{y}_{i0}| < \delta (i = 1, \dots, n)$  в промежутке  $x_0 \leq x < \infty$  будет справедливо неравенство:

$$|\tilde{y}_i(x, x_0, \tilde{y}_{10}, \dots, \tilde{y}_{n0}) - y_i(x, x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5.55)$$

Каждое движение, которое не является устойчивым, называется неустойчивым.

Решение  $y_i = y_i(x, x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$  называется *невозмущенным*, а  $\tilde{y}_i = \tilde{y}_i(x, x_0, \tilde{y}_1^{(0)}, \dots, \tilde{y}_n^{(0)})$  — *возмущенным* решением.

Геометрически устойчивость означает, что в каждый момент времени  $x \geq x_0$  точка траектории возмущенного движения (решения) лежит в достаточно малой окрестности соответствующей точки невозмущенного движения.

Для вывода условий устойчивости в смысле Ляпунова запишем для возмущенного решения ( $\tilde{y}$ ) равенство в векторном виде (для простоты выкладок умышленно опускаем переменные в скобках):

$$\dot{\tilde{y}} = \bar{y}^* + \Delta\bar{y}, \quad (3.5.56)$$

где  $\bar{y}^*$  — вектор невозмущенного решения,  $\Delta\bar{y}$  — вектор возмущения решения, физически обоснованный колебаниями, например, режимных параметров реальных процессов. Тогда для невозмущенного решения будет справедливо:

$$\frac{d\bar{y}^*}{dx} = \bar{f}(\bar{y}^*), \quad (3.5.57)$$

а для возмущенного:

$$\frac{d(\bar{y}^* + \Delta\bar{y})}{dx} = \bar{f}(\bar{y}^* + \Delta\bar{y}). \quad (3.5.58)$$

Раскладывая правую часть последней системы в ряд Тейлора и ограничиваясь членами с первыми производными, можно записать:

$$f_i(\bar{y}^* + \Delta\bar{y}) \approx f_i(\bar{y}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{y}^*) \Delta y_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.5.59)$$



или в виде матриц:

$$\begin{bmatrix} f_1(\bar{y}^* + \Delta\bar{y}) \\ \vdots \\ f_n(\bar{y}^* + \Delta\bar{y}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\bar{y}^*) \dots \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(\bar{y}^*) \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(\bar{y}^*) \dots \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\bar{y}^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(\bar{y}^*) \\ \vdots \\ f_n(\bar{y}^*) \end{bmatrix}, \quad (3.5.60)$$

или в векторно-матричной форме:

$$\bar{f}(\bar{y}^* + \Delta\bar{y}) \approx \bar{A}(\bar{y}^*)\Delta\bar{y} + \bar{f}(\bar{y}^*), \quad (3.5.61)$$

где  $\bar{A}(\bar{y}^*)$  – матрица частных производных с элементами:

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{y}^*), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.5.62)$$

Если невозмущенные значения функций неизвестны, то приходится рассчитывать производные при их возмущенных значениях.

Подставляя *линеаризованную правую часть* (3.5.61) в (3.5.58) с учетом (3.5.57) вводим:

$$\frac{d\bar{y}^*}{dx} + \frac{d(\Delta\bar{y})}{dx} = \bar{A}(\bar{y}^*)\Delta\bar{y} + \bar{f}(\bar{y}^*) \quad (3.5.63)$$

и, как результат, получаем однородное дифференциальное уравнение, решаемое относительно  $\Delta\bar{y}$ , следующего вида:

$$\frac{d(\Delta\bar{y})}{dx} \approx \bar{A}\Delta\bar{y}, \quad (3.5.64)$$

(зависимость элементов матрицы  $\bar{A}$  от  $\bar{y}^*$  (3.5.62) для простоты выкладок опущена).

Условием устойчивости в смысле Ляпунова является стремление всех элементов вектора  $\Delta \bar{y}$  к нулю, т.е. с использованием понятия нормы вектора должно быть справедливо:

$$\|\Delta \bar{y}\| \leq \varepsilon. \quad (3.5.65)$$

Система (3.5.64) имеет аналитическое решение. Однако, прежде чем его привести рассмотрим аналогию: вместо вектора  $\Delta \bar{y}$  рассмотрим  $\Delta y$ , а вместо матрицы  $\bar{A}$  — число  $\lambda$ :

$$\frac{d(\Delta y)}{dx} = \lambda \Delta y. \quad (3.5.66)$$

Общее решение (3.5.64) имеет вид:

$$\Delta y = C e^{\lambda x}, \quad (3.5.67)$$

где  $C$  — произвольная постоянная, а  $\lambda$  — некоторое число.

Из последнего равенства следует, что для того чтобы уравнение было устойчивым в смысле Ляпунова, вещественная часть  $\lambda$ , т.е.  $\operatorname{Re}(\lambda)$ , должна быть меньше 0:

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0. \quad (3.5.68)$$

Решение системы уравнений (3.5.64), по аналогии с (3.5.67), может быть записано:

$$\Delta \bar{y} = \bar{C} e^{\lambda x}, \quad (3.5.69)$$

и для обеспечения устойчивости в смысле Ляпунова для всех  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  по аналогии с (3.5.68) необходимо выполнение условий:

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad (3.5.70)$$

т.е. вещественные части всех  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) должны быть меньше нуля.

Для определения значений  $\bar{\lambda}$  подставим выражение для решения (3.5.69) в исходное дифференциальное уравнение (3.5.64):

$$\lambda \bar{C} e^{\lambda x} = \bar{A} \bar{C} e^{\lambda x}, \quad (3.5.71)$$

в результате чего получается однородная система линейных алгебраических уравнений (см. разд. 3.2.1):

$$(\bar{A} - \lambda \bar{E}) \bar{C} = \bar{0}. \quad (3.5.72)$$

Ее решениями являются *собственные векторы матрицы  $\bar{A}$*  — векторы  $\bar{C}$ , число которых не ограничено.

Для получения бесчисленного множества нетривиальных решений  $\bar{C}$  необходимо выполнение условия, в соответствии с которым определитель матрицы  $(\bar{A} - \lambda \bar{E})$  должен быть равен нулю (3.2.19):

$$|\bar{A} - \lambda \bar{E}| = 0. \quad (3.5.73)$$

Это условие рассматривается как уравнение для определения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  и называется *характеристическим уравнением матрицы  $\bar{A}$* , а определяемые конкретные величины (элементы вектора  $\bar{\lambda}$ ) называется *собственными значениями* или *собственными числами* матрицы  $\bar{A}$ .



## Пояснение.

характеристическое уравнение

можно переписать в виде равенства нулю характеристического многочлена  $P(\lambda)$ :

$$P(\lambda) \equiv \det(\overline{A} - \lambda \overline{E}) \equiv \left| \overline{A} - \lambda \overline{E} \right| = (-\lambda)^n + b_1(-\lambda)^{n-1} + \dots + b_{n-1}(-\lambda) + b_n = 0, \quad (3.2.20)$$

где  $b_1, \dots, b_n$  — известные коэффициенты получающегося характеристического многочлена.

Следует отметить, что левая часть характеристического уравнения представляет собой многочлен (полином) степени  $n$  (3.2.20). Определение всех его корней, среди которых могут быть кратные и комплексные корни, часто непростою задача.

Поэтому был *предложен критерий Рауса–Гурвица*, который путем анализа коэффициентов упоминаемого многочлена позволяет установить, будут ли все вещественные части собственных чисел  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) отрицательными.

Для использования критерия Рауса–Гурвица характеристическое уравнение представляется в следующем виде:

$$b_n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0 = 0, \quad (3.5.74)$$

где  $b_0 > 0$  и условия отрицательной действительной части всех его корней (устойчивости в смысле Ляпунова) будут выполняться тогда и только тогда, когда станут положительными все определители вида:

$$D_1 = b_1; \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}; \quad D_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{vmatrix};$$

(3.5.75)

$$D_n = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2n-1} & b_{2n-2} & b_{2n-3} & b_{2n-4} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

### Определение условий устойчивости в смысле Ляпунова для двух обыкновенных дифференциальных уравнений

Запишем выведенную выше систему (3.5.64) дифференциальных уравнений для возмущений  $(\Delta y_1, \Delta y_2)$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{d(\Delta y_1)}{dx} \\ \frac{d(\Delta y_2)}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} \quad (3.5.76)$$

и в соответствии с (3.5.69) будем искать решения в виде:

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= C_1 e^{\lambda x}; \\ \Delta y_2 &= C_2 e^{\lambda x}. \end{aligned} \quad (3.5.77)$$

Подстановка этих решений в исходные уравнения приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \lambda C_1 e^{\lambda x} &= a_{11} C_1 e^{\lambda x} + a_{12} C_2 e^{\lambda x}; \\ \lambda C_2 e^{\lambda x} &= a_{21} C_1 e^{\lambda x} + a_{22} C_2 e^{\lambda x}, \end{aligned} \quad (3.5.78)$$

в результате чего получается однородная система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)C_1 + a_{12}C_2 &= 0; \\ a_{21}C_1 + (a_{22} - \lambda)C_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.5.79)$$

которая может быть записана в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5.80)$$

Для получения нетривиальных решений этой системы – собственных векторов матрицы  $\bar{A}$  необходимо, чтобы определитель матрицы ее коэффициентов был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.5.81)$$

Полученное уравнение называется *характеристическим уравнением* и решается относительно неизвестных  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , в результате чего устанавливается отрицательность или не отрицательность действительных частей корней  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , т.е. определяется выполнение условия устойчивости СОДУ в смысле Ляпунова (3.5.70).

Получим выражение для определителя (3.5.81):

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0 \quad (3.5.82)$$

и запишем характеристическое уравнение (3.5.82) в виде квадратного уравнения

$$\lambda^2 + \underbrace{[-(a_{11} + a_{22})]}_{2p} \lambda + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_q = 0. \quad (3.5.83)$$

С учетом принятых обозначений  $p$  и  $q$  решение квадратного уравнения можно представить в виде:

$$\lambda_1 = -p + \sqrt{p^2 - q}; \quad \lambda_2 = -p - \sqrt{p^2 - q}. \quad (3.5.84)$$

С учетом принятых обозначений  $p$  и  $q$  и сравнивая с (3.5.83), для полученных решений будет справедливо:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \equiv \lambda^2 + \underbrace{[-(\lambda_1 + \lambda_2)]}_{2p} \lambda + \underbrace{\lambda_1 \lambda_2}_q = 0. \quad (3.5.85)$$



Условие отрицательности вещественных частей корней  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  может быть установлена путем сравнения уравнений (3.5.83) и (3.5.85).

Рассмотрим три случая:

- 1) если  $q < 0$  и  $p < 0$ , то  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются вещественными числами и имеют разные знаки;
- 2) если  $q > 0$  и  $p < 0$ , то  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются или вещественными положительными числами, или комплексными числами с положительными вещественными частями;
- 3) если  $q > 0$  и  $p > 0$ , то  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются или вещественными отрицательными числами, или комплексными числами с отрицательными вещественными частями (что соответствует условию устойчивости в смысле Ляпунова).

Таким образом, как следует из уравнения (3.5.83) для двух обыкновенных дифференциальных уравнений, система будет устойчива в смысле Ляпунова, если для ее коэффициентов будут выполняться два неравенства:

$$\begin{aligned} -(a_{11} + a_{22}) &> 0; \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &> 0. \end{aligned} \tag{3.5.86}$$

Отметим, что коэффициенты в этих неравенствах для произвольных правых частей дифференциальных уравнений (3.5.76) определяются как частные производные (3.5.60) по искомым функциям ( $y_1$  и  $y_2$ ), и их величины зависят от значений функций-решений, при которых производные рассчитывались.

Можно легко проверить, что полученные условия устойчивости в смысле Ляпунова для двух обыкновенных дифференциальных уравнений полностью соответствуют условиям Рауса–Гурвица (3.5.75).



## Жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Сущность явления жесткости для систем дифференциальных уравнений состоит в том, что *существуют решения* (искомые функции), которые *меняются медленно* и которые *нужно определять*; однако одновременно существуют и *очень быстро меняющиеся* (затухающие) *решения* (функции). *Наличие последних затрудняет получение медленно меняющихся решений численными методами.*

Сильно меняющиеся компоненты решения называются *жесткой компонентой* решения и их считают *переходной частью* решения. Медленно меняющиеся компоненты часто называются *непереходными* или *гладкими*. Термин «гладкие» используется в том смысле, что производные от этих компонент решения значительно меньше производных от переходных компонент решения.

Свойство жесткости является свойством системы дифференциальных уравнений и для неоднородных линейных систем вида:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{A}\bar{y}(x) + \bar{r}(x) \quad (3.5.87)$$

может быть установлено путем анализа собственных значений матрицы ее коэффициентов  $\bar{A}$ .

*Определение.* Асимптотически устойчивая система дифференциальных уравнений (3.5.87) с постоянной матрицей  $A(m \times m)$  называется жесткой, если выполняются следующие условия:

1)  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  (здесь  $\operatorname{Re} \lambda_k$  — действительная часть собственного значения  $\lambda_k$ );

2) велико отношение

$$S = \frac{\max_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k|}{\min_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k|}.$$

Число  $S$  называется числом жесткости системы (3.5.87). Однако величина  $S$ , начиная с которой система становится жесткой, не указывается, она определяется конкретной физической постановкой задачи.

Если матрица  $A$  зависит от  $x$ , то ее собственные числа являются функциями  $x$  —  $\lambda_k = \lambda_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . При каждом  $x$  можно определить число жесткости

$$S(x) = \frac{\max_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k(x)|}{\min_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k(x)|},$$

которое также зависит от  $x$ .

В этом случае система уравнений (3.5.87)

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{A}\bar{y}(x) + \bar{r}(x)$$

с матрицей, зависящей от  $x$ ,  $A(x)$ , называется жесткой на интервале  $(x_0, X]$ , если  $\operatorname{Re} \lambda_k(x) < 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , для всех  $x \in (x_0, X)$  и число  $\sup S(x)$  велико.

Таким образом, решение жесткой системы содержит как быстро, так и медленно убывающие составляющие. Начиная с некоторого  $x > x_0$ , решение системы почти полностью определяется медленно убывающей составляющей. Однако в случае явных схем быстро убывающая составляющая накладывает жесткие ограничения на условия устойчивости, что вынуждает брать шаг интегрирования слишком мелким.



Задачу можно назвать жесткой, если среди собственных значений матрицы  $\bar{A}$ :

- существуют  $\lambda_i$ , для которых  $\text{Re}(\lambda_i) \ll 0$ ;
- существуют  $\lambda_i$  умеренной величины, чьи абсолютные величины малы по сравнению с абсолютными величинами собственных значений, удовлетворяющих предыдущему условию;
- не существует  $\lambda_i$  с большой положительной вещественной частью;
- не существует  $\lambda_i$  с большой мнимой частью, для которых не выполняется условие  $\text{Re}(\lambda_i) \ll 0$ .

На практике, для определения жесткости СДУ обычно используется первое из перечисленных условий. Можно показать, что выполнение этого условия соответствует матрице коэффициентов системы  $\bar{A}$  (3.5.64) с сильно различающимися по модулю элементами (на 3 и более порядков).

На примере исследования кинетики последовательной реакции:



с кинетическими константами  $k_1 = 1000$  и  $k_2 = 1$  покажем, что применение явного метода Эйлера приводит к появлению жесткой компоненты решения и, соответственно, искажению («раскачке») гладкой компоненты решения.

На самом деле применяемый при решении жестких систем уравнений численный метод должен быть в состоянии подавить эти возмущения. Применение неявных методов, в частности, неявного метода Эйлера, позволяет успешно справиться с этой проблемой.

В соответствии с представленной кинетической схемой последовательной реакции и заданными значениями констант скоростей  $k_1$  и  $k_2$  СОДУ, которая описывает скорости образования (расходования) компонентов А (соответствует компоненте 1) и Р (соответствует компоненте 2), имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -k_1 y_1; \\ \frac{dy_2}{dx} = k_1 y_1 - k_2 y_2 \end{cases} \quad (3.5.89)$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= y_{10} \equiv 1; \\ y_2(x_0) &= y_{20} \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.5.90)$$

При этом  $y_1 = y_1(x)$  и  $y_2 = y_2(x)$  — искомые переменные (функции решений), соответствующие изменению концентраций компонентов А и Р, т.е.  $y_1 = [A]$  и  $y_2 = [P]$ .

Аналитическое решение этой системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = C^{-k_1 x}; \\ y_2 = \frac{k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 x} - e^{-k_2 x}). \end{cases} \quad (3.5.91)$$



Исследуемая система может быть представлена в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (3.5.92)$$

Собственные числа матрицы коэффициентов системы определяются из характеристического уравнения:

$$|\overline{A} - \lambda \overline{E}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k_1 - \lambda & 0 \\ k_1 & -k_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3.5.93)$$

откуда следует, что

$$(k_1 + \lambda)(k_2 + \lambda) = 0. \quad (3.5.94)$$

Результатом решения характеристического уравнения являются собственные числа:

$$\lambda_1 = -k_1 = -1000 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = -k_2 = -1, \quad (3.5.95)$$

т.е. для одного из собственных значение будет справедливо:

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) \ll 0. \quad (3.5.96)$$

Таким образом, выполняется первое из приведенных выше условий жесткости системы дифференциальных уравнений. Легко установить, что остальные три условия жесткости также справедливы для этого случая, и поэтому СОДУ (3.5.89) с коэффициентами  $k_1 = 1000$  и  $k_2 = 1$  можно считать жесткой.

### **Неприемлемость явного метода Эйлера для решения жесткой системы из-за возможной ее «раскачки» и отсутствия сходимости**

Явный метод Эйлера (3.5.15) для решения систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений может быть записан:

$$\begin{cases} \frac{\Delta y_1^{(k+1)}}{h} = f_1(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}) \equiv -k_1 y_1^{(k)}; \\ \frac{\Delta y_2^{(k+1)}}{h} = f_2(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}) \equiv k_1 y_1^{(k)} - k_2 y_2^{(k)}, \end{cases} \quad (3.5.97)$$

где  $k$  — номер шага решения;  $h$  — величина шага решения.

С учетом значений кинетических коэффициентов ( $k_1 = 1000$  и  $k_2 = 1$ ) эти уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} y_1^{(k+1)} = y_1^{(k)} + h(-1000 y_1^{(k)}) = y_1^{(k)} [1 - 1000h]; \\ y_2^{(k+1)} = y_2^{(k)} + h(1000 y_1^{(k)} - y_2^{(k)}) = \underbrace{1000h y_1^{(k)}}_{\text{жесткая компонента}} + (1-h)y_2^{(k)}, \end{cases} \quad (3.5.98)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$

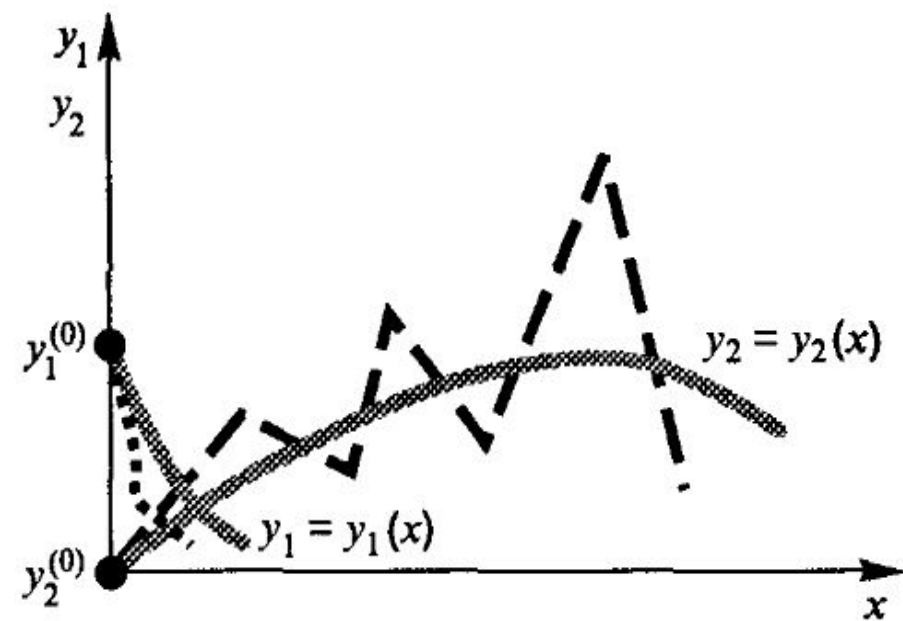


Рис. 3.29. Схематическое представление функций решения явным методом Эйлера для жесткой системы дифференциальных уравнений

На рис. 3.29 схематически представлены функции-решения [сплошные линии – точные решения (3.5.91), а пунктирные линии получены явным методом Эйлера (3.5.98)].

«Раскачка» решения, а затем и отсутствие сходимости численного явного метода Эйлера при получении приближенного решения  $y_2 = y_2(x)$  (пунктирная линия на рис. 3.29) обусловлены наличием ее жесткой компоненты во втором уравнении явного метода Эйлера. Эта жесткая компонента становится все «жестче» при переходе к каждому следующему шагу решения, так как в соответствии с первым уравнением (3.5.97)

$$y_1^{(k)} = y_{10}(1 - 1000h)^k, \quad (3.5.99)$$

а подстановка ее во второе уравнение приводит к следующему результату:

$$y_2^{(k+1)} = \underbrace{1000h(1 - 1000h)^k}_{\text{жесткая компонента}} y_{10} + (1 - h)y_2^{(k)}. \quad (3.5.100)$$

Из-за степенного выражения в жесткой компоненте приближенного решения явным методом Эйлера становится понятным отсутствие сходимости и его непригодность для решения жестких систем дифференциальных уравнений.



## *Приемлемость неявного метода Эйлера для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений*

При решении жесткой системы уравнений (3.5.89) неявным методом Эйлера можно записать соотношение (3.5.17):

$$\begin{cases} \frac{\Delta y_1^{(k+1)}}{h} = f_1(y_1^{(k+1)}, y_2^{(k+1)}) \equiv k_1 y_1^{(k+1)}; \\ \frac{\Delta y_2^{(k+1)}}{h} = f_2(y_1^{(k+1)}, y_2^{(k+1)}) \equiv k_1 y_1^{(k+1)} - k_2 y_2^{(k+1)}. \end{cases} \quad (3.5.101)$$

С учетом значений кинетических коэффициентов ( $k_1 = 1000$  и  $k_2 = 1$ ) эти уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} y_1^{(k+1)} = y_1^{(k)} + h(-1000 y_1^{(k+1)}); \\ y_2^{(k+1)} = y_2^{(k)} + h(1000 y_1^{(k+1)} - y_2^{(k+1)}), \end{cases} \quad (3.5.102)$$

путем преобразования которых получается:

$$\begin{cases} y_1^{(k+1)} = \frac{y_1^{(k)}}{(1 + 1000h)}; \\ y_2^{(k+1)} = \frac{y_2^{(k)}}{1+h} + \frac{1000h y_1^{(k+1)}}{1+h} = \frac{y_2^{(k)}}{1+h} + \frac{1000h y_1^{(k)}}{(1+h)(1+1000h)}. \end{cases} \quad (3.5.103)$$



Второе уравнение в системе (3.5.103) – представление приближенного решения  $y_2 = y_2(x)$  неявным методом Эйлера, может быть записано в следующем виде:

$$y_2^{(k+1)} = \frac{y_1^{(k)}}{(1+h)(1+\frac{0,001}{h})} + \frac{y_2^{(k)}}{1+h}. \quad (3.5.104)$$

Таким образом, это решение  $y_2 = y_2(x)$  уже не содержит жесткой компоненты [в отличие от явного метода Эйлера (3.5.98)], тем более что с учетом пошаговой реализации метода из первого уравнения (3.5.103) следует:

$$y_1^{(k)} = \frac{y_1^{(0)}}{(1+1000h)^k}, \quad (3.5.105)$$

и после подстановки в (3.5.104) уравнение для расчета приближения  $y_2^{(k+1)}$  на  $(k+1)$  шаге принимает вид:

$$y_2^{(k+1)} = \frac{y_1^{(0)}}{(1+h)(1+\frac{0,001}{h})(1+1000h)^k} + \frac{y_2^{(k)}}{1+h}. \quad (3.5.106)$$

Таким образом, неявный метод Эйлера при решении жестких систем дифференциальных уравнений из-за степенной функции в знаменателе первого слагаемого в (3.5.106) не допускает «раскачки» решения  $y_2 = y_2(x)$  в сравнении с явным методом Эйлера [см. (3.5.100) и рис. 3.29]. Этим объясняется его пригодность для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

## Задания

1. Методами Эйлера, модифицированным Эйлера и Рунге-Кутта 4 порядка с шагом  $h=0.1$  до  $x_{\text{кон}} = 1$  решить следующую задачу Коши для нормальной системы второго порядка:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 e^{-x^2} + xy_2 \\ y_2' = 3x - y_1 + 2y_2 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

Оценку жёсткости системы производить на каждом шаге  $h$ .

Вывести на один график результаты всех трёх методов методов.

2. Решить следующую задачу Коши для нормальной системы второго порядка методами явным Эйлера и неявным Эйлера с шагом  $h=0.1$  до  $x_{\text{кон}} = 3$ :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 e^{x^2} + xy_2 \\ y_2' = 3x - y_1 + 2y_2 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

Оценку жёсткости системы производить на каждом шаге  $h$ .

Вывести на один график результаты обоих методов.

# Литература

1. Т.Н.Гартман, Д.В. Клушин. Основы компьютерного моделирования химико-технологических процессов: Учебное пособие для вузов. - М.: ИКЦ «АКАДЕМКНИГА», 2006. - 415 с.
2. В.М. Вержбицкий. Основы численных методов: Учебник для вузов. - М.: Высш. шк., 2009. - 840 с.
3. Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. MATLAB 7: программирование, численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
4. В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников. Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. -400 с.
5. И.Б. Петров, А.И. Лобанов. Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 522 с.
6. К.Э.Плотников. Вычислительные методы. Теория и практика в среде MATLAB. - М.: «Горячая линия-Телеком», 2009. – 496 с.
7. Е.Р. Алексеев, О. В.Чеснокова. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. - М.: НТ Пресс, 2006. – 496 с.
8. В. Г. Потемкин. Система инженерных и научных расчётов MATLAB. Справочное пособие. – В 2-х т. - М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. – 670 с.
9. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы. - М., 2002. - 632 с.