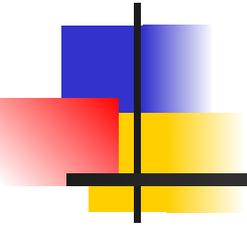
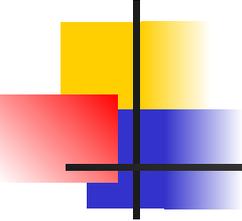


# ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКИ



- 
- 
- Квантовая статистика –раздел физики, исследующий поведение многих частиц, подчиняющихся квантовым законам.

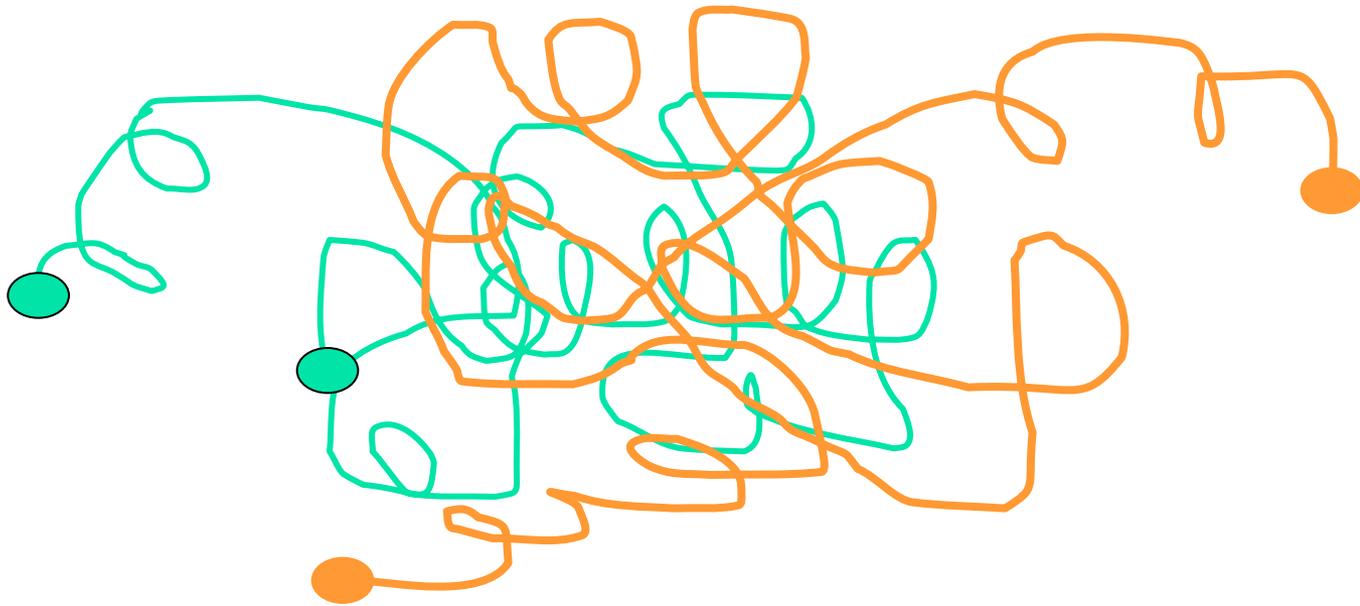


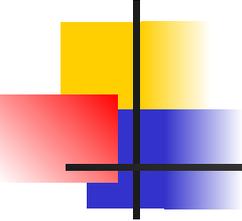
# ПРИНЦИП НЕРАЗЛИЧИМОСТИ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ

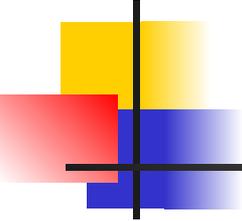
---

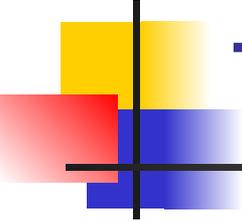
- Будем рассматривать многоэлектронные системы
- Если частицы имеют одинаковые физические характеристики ( масса, заряд, спин, квантовые числа) , то они наз. **ТОЖДЕСТВЕННЫМИ**

- В классической механике можно всегда отследить поведение частицы – ее траектория известна
- 



- 
- 
- В квантовой механике понятия траектории нет
  - Можно говорить только о вероятности обнаружения частицы в данной точке пространства

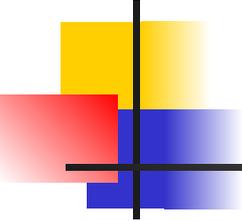
- 
- 
- Если волновые функции двух частиц перекрываются, то решить вопрос, какая из двух частиц находится в данной области – невозможно.
  - В квантовой механике частицы теряют свою индивидуальность и становятся неразличимыми.



# ПРИНЦИП неразличимости тождественных частиц

---

- Невозможно экспериментально различить тождественные частицы

- 
- 
- Если обозначить волновую функцию системы 2 электронов

$$\psi(x_1, x_2)$$

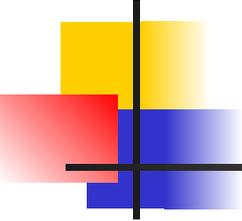
$x_i$

Совокупность пространственных и спиновых координат  $i$  частицы

$$\psi(x_2, x_1)$$

Частицы поменялись местами

- Из принципа неразличимости



---

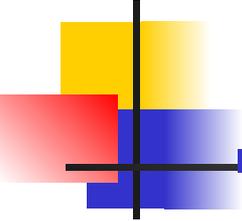
$$|\psi(x_1, x_2)|^2 = |\psi(x_2, x_1)|^2$$

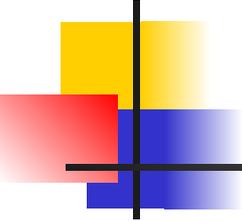
$$\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$$

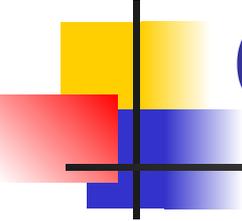
Симметричная волновая функция

$$\psi(x_1, x_2) = -\psi(x_2, x_1)$$

Антисимметричная волновая функция

- 
- Симметрия или антисимметрия определяется спином частиц
  - Частицы с полуцелым спином (электроны, протоны, нейтроны) описываются антисимметричными волновыми функциями и наз. **ФЕРМИОНАМИ**
  - Частицы с нулевым или целым спином ( мезоны, фотоны) описываются симметричными волновыми функциями и наз. **БОЗОНАМИ**

- 
- 
- Поведение фермионов описывается статистикой Ферми-Дирака
  - Поведение бозонов - статистикой Бозе -Эйнштейна



# Обобщенный принцип Паули

---

- Системы фермионов встречаются в природе только в состояниях, описываемых антисимметричными волновыми функциями.
- Количество бозонов, находящихся в одинаковом состоянии не ограничивается

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФЕРМИ-ДИРАКА

- Вероятность обнаружения электрона с энергией  $E$  при температуре  $T$

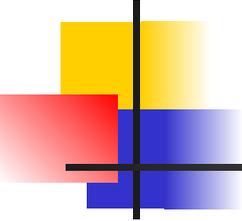
$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_F}{kT}}}$$

$E_F$  - Уровень Ферми (химический потенциал)

-Уровень Ферми – максимальная энергия, которую может иметь электрон при  $T=0$

$k$  - постоянная Больцмана

- При  $T=0$

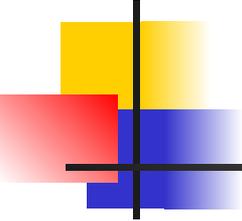

$$E > E_F$$

---

$$e^{\frac{E-E_F}{kT}} = e^{\frac{E-E_F}{0}} = e^{\infty} = \infty$$

$$f(E) = \frac{1}{1+0} = 0$$

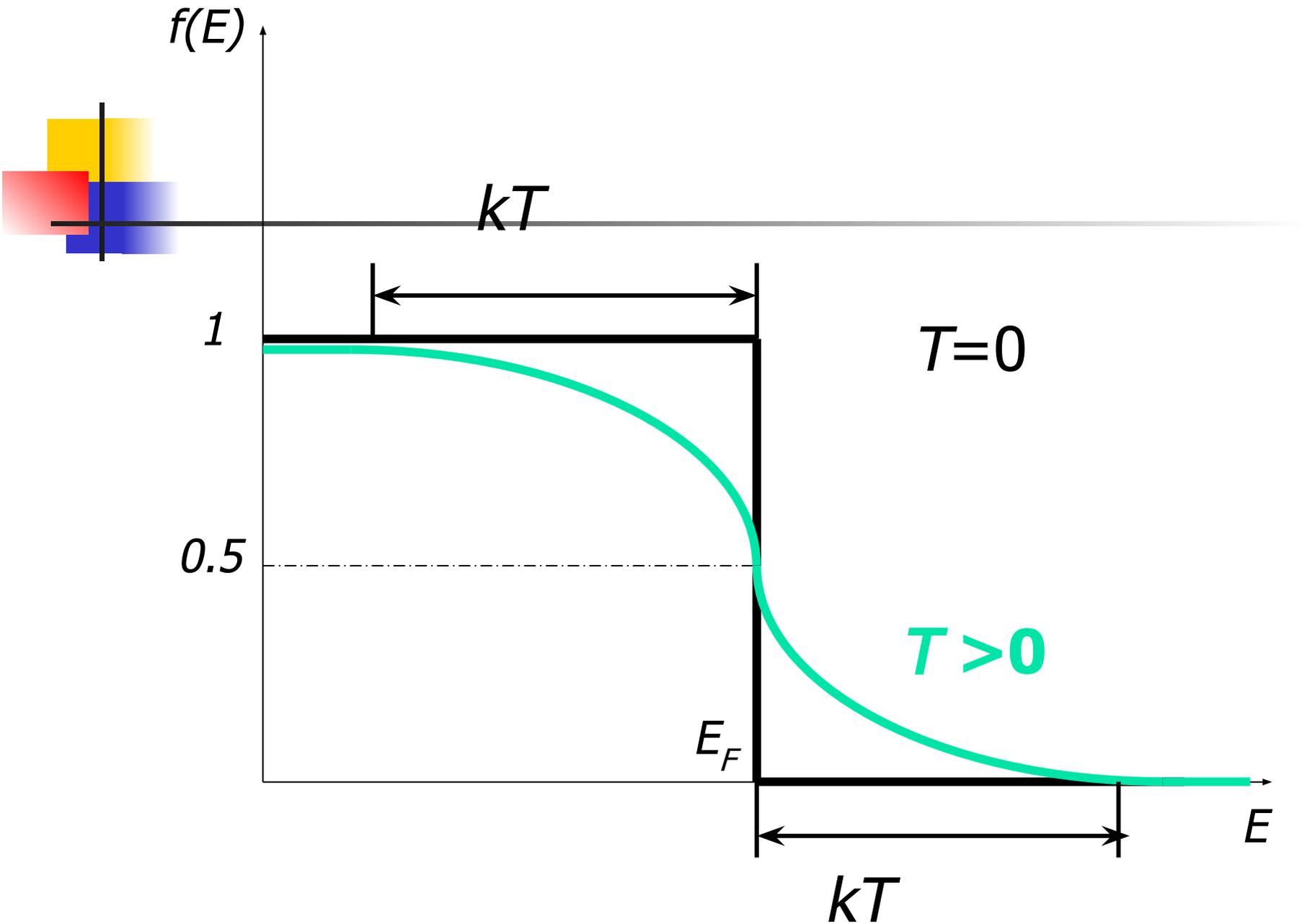
- При  $T=0$

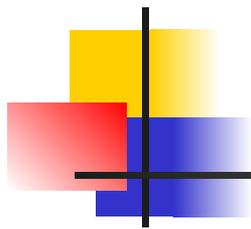

$$E < E_F$$

---

$$e^{\frac{E-E_F}{0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

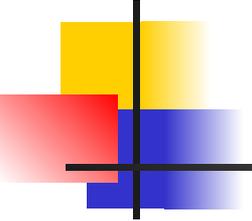
$$f(E) = \frac{1}{1+0} = 1$$





$$f(E = E_F) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E_F - E_F}{kT}}}$$

$$= \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

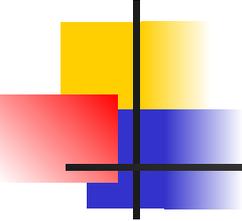
- 
- 1) Электроны заполняют нижние уровни в соответствии с принципом Паули
- 

- 2) При  $T=0$  максимально возможная энергия электрона – это энергия Ферми

3) *при*  $E \gg E_F$  ,  $e^{\frac{E-E_F}{kT}} \gg 1$

$$f(E) = e^{-\frac{E}{kT}}$$

Распределение  
Больцмана

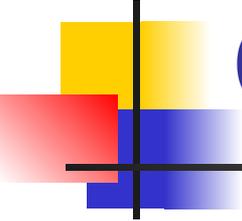

$$kT \ll E_F$$

---

Электронный газ называется вырожденным  
и подчиняется статистике Ферми-Дирака

$$kT \gg E_F$$

Электронный газ называется невырожденным  
и подчиняется статистике Больцмана

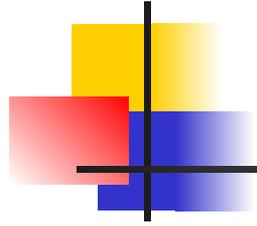


# Статистика Бозе-Эйнштейна

---

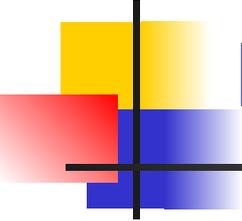
$$f_B(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_B}{kT}} - 1}$$

$E_B$  – химический потенциал  
системы бозонов



---

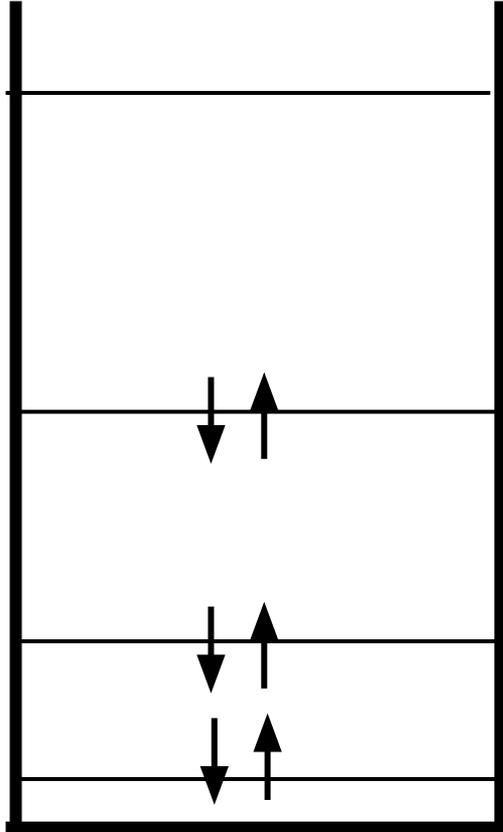
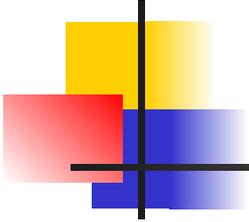
# ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



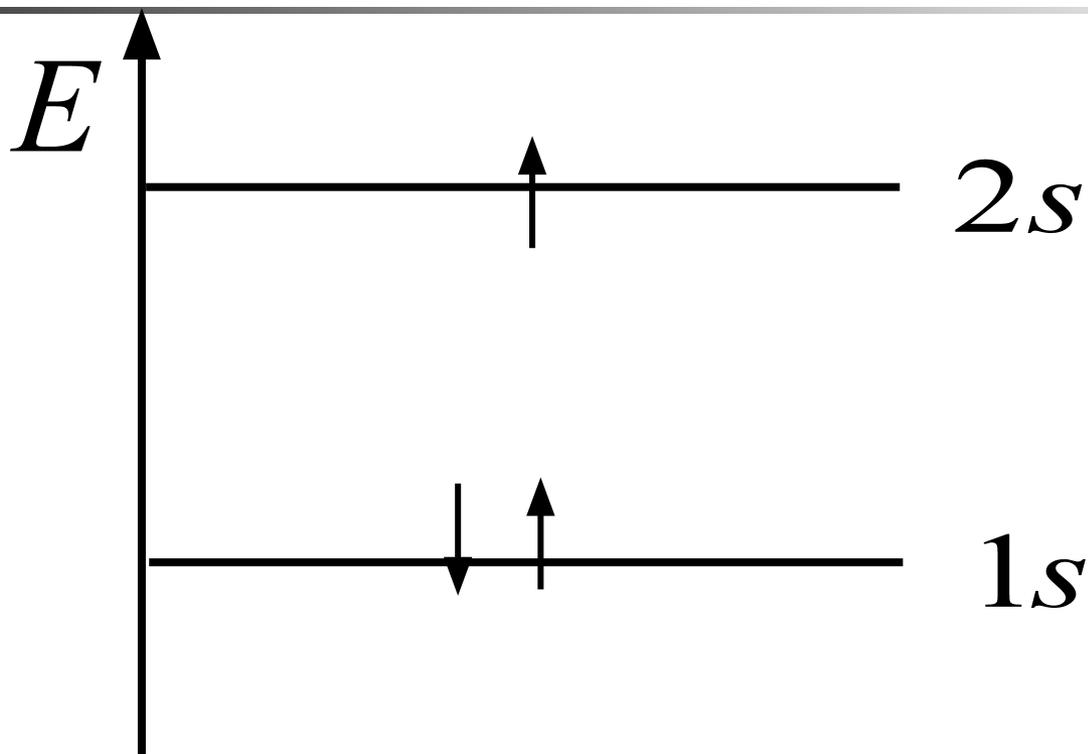
# Металлы, диэлектрики, полупроводники

---

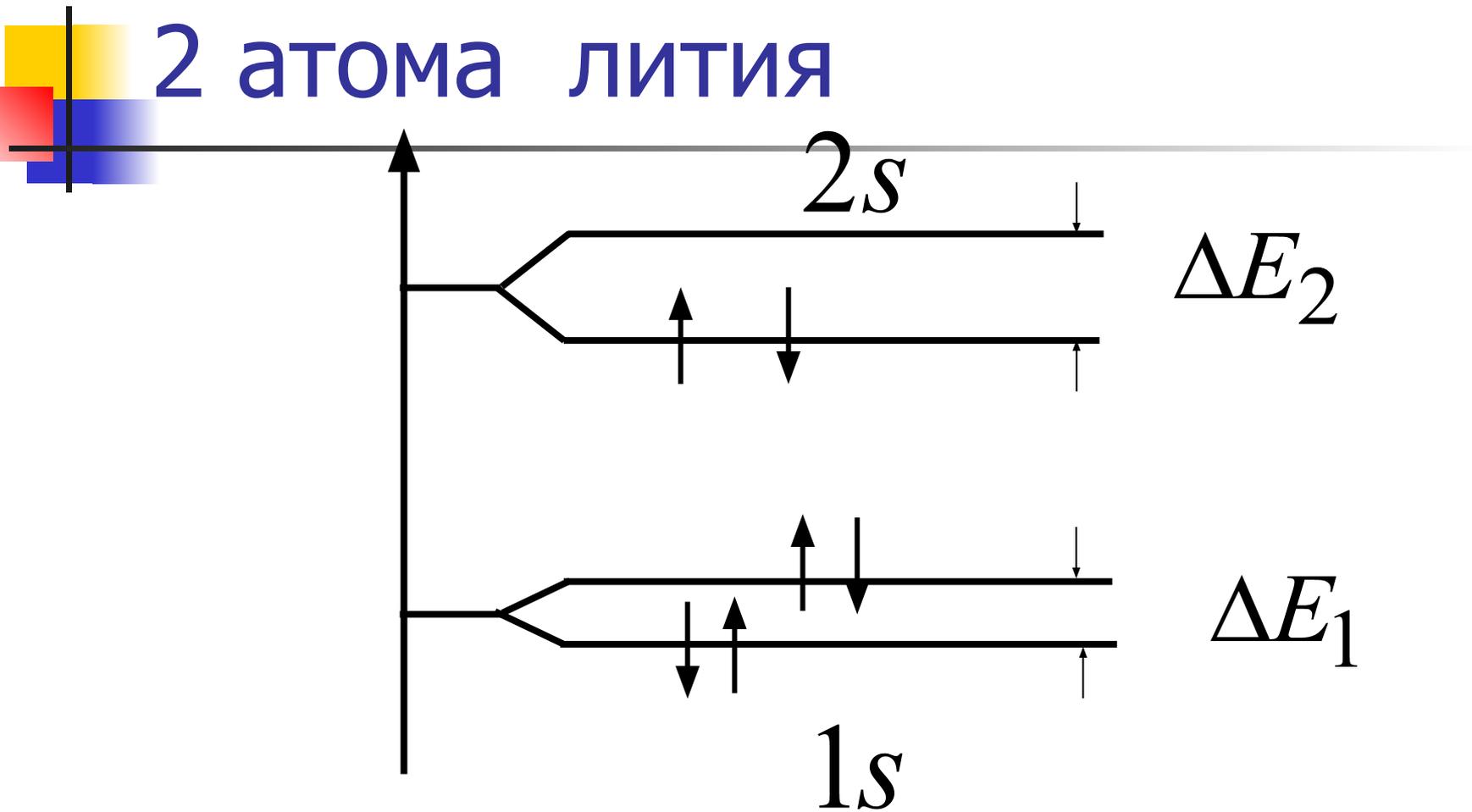
- В твердом теле при сближении атомов отдельные уровни расщепляются и объединяются в зоны

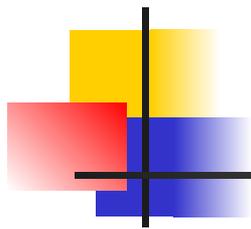


# Изолированный атом $Li$

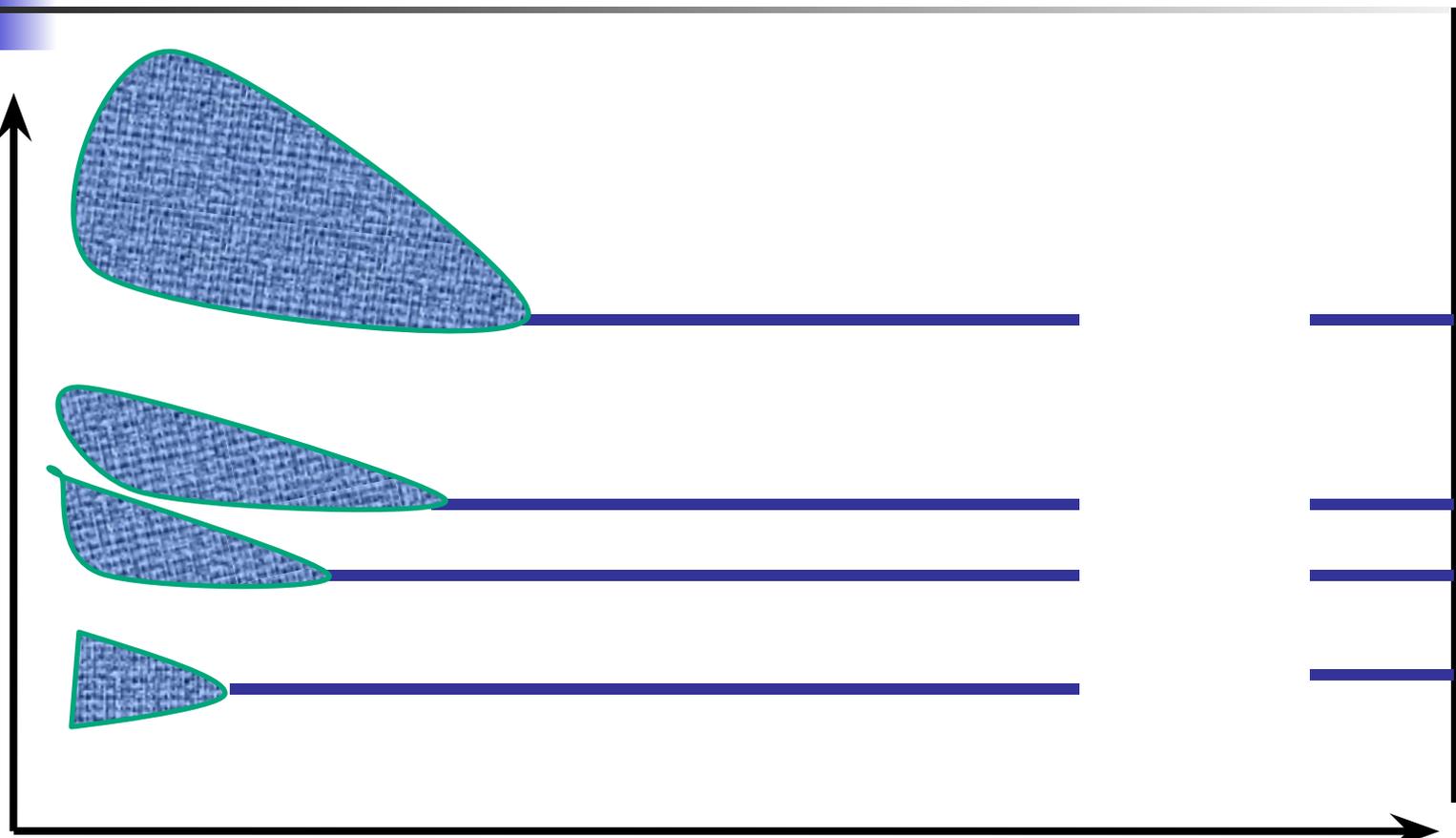


# 2 атома лития





E



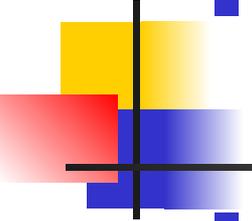
3s

2p

2s

1s

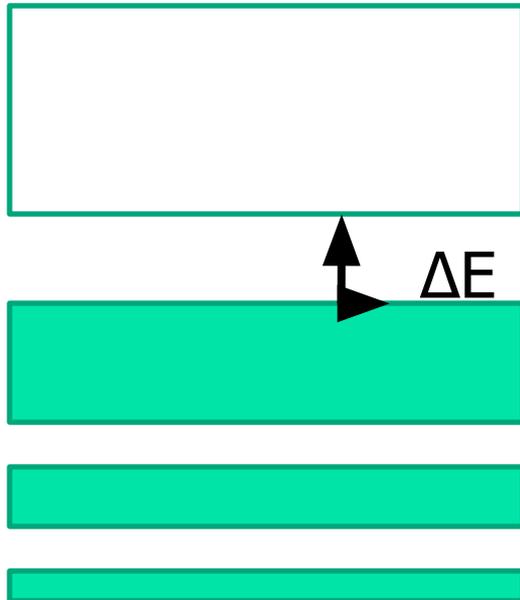
r

- 
- Образуются **разрешенные** области энергии
- 

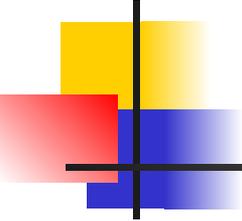
- В разрешенной зоне столько дискретных уровней, сколько их содержится во всех изолированных атомах
- Разрешенные зоны разделены промежутками энергии – **запрещенными зонами**

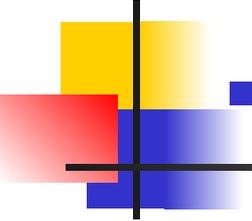
# Металлы, диэлектрики, полупроводники

- 1) Существуют либо полностью заполненные, либо полностью свободные зоны



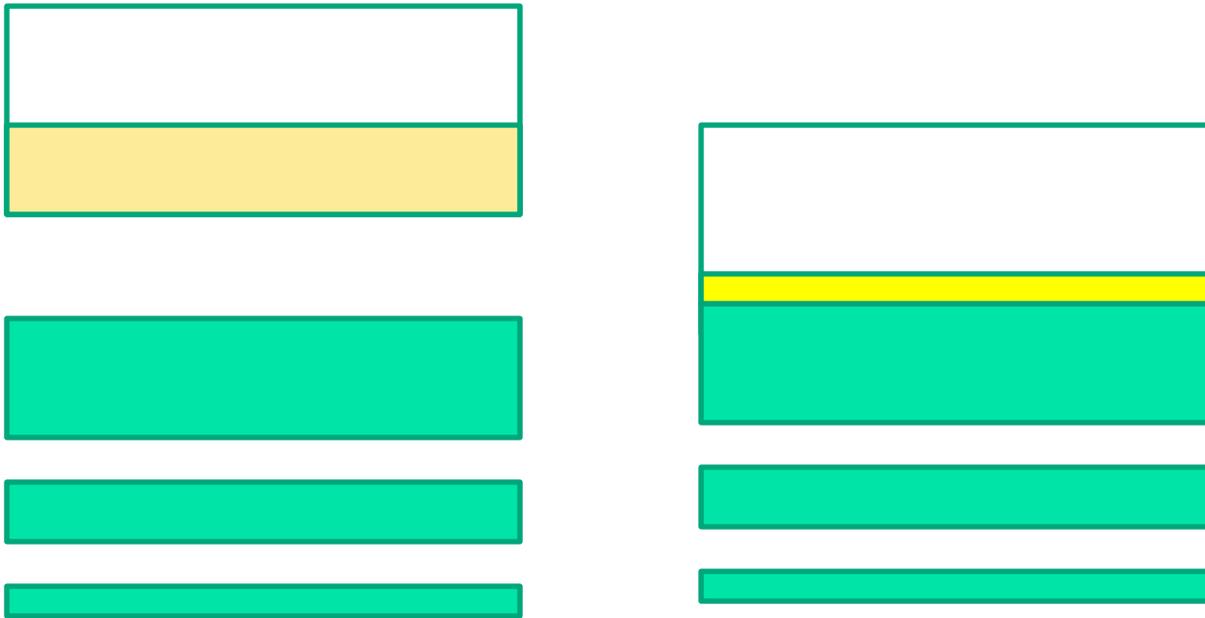
$\Delta E$ -ширина запрещенной зоны между последней полностью заполненной и следующей свободной зоной

- 
- 
- Если  $\Delta E < 3$  эВ , то такие вещества называются **полупроводниками**
  - Электрону может хватить тепловой энергии, чтобы перейти из одной зоны в другую
  - Если  $\Delta E > 5$  эВ то такие вещества называются **диэлектриками**

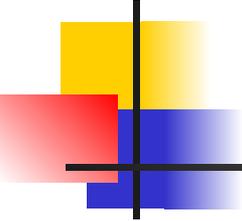


- 2) Верхняя зона заполнена частично

---

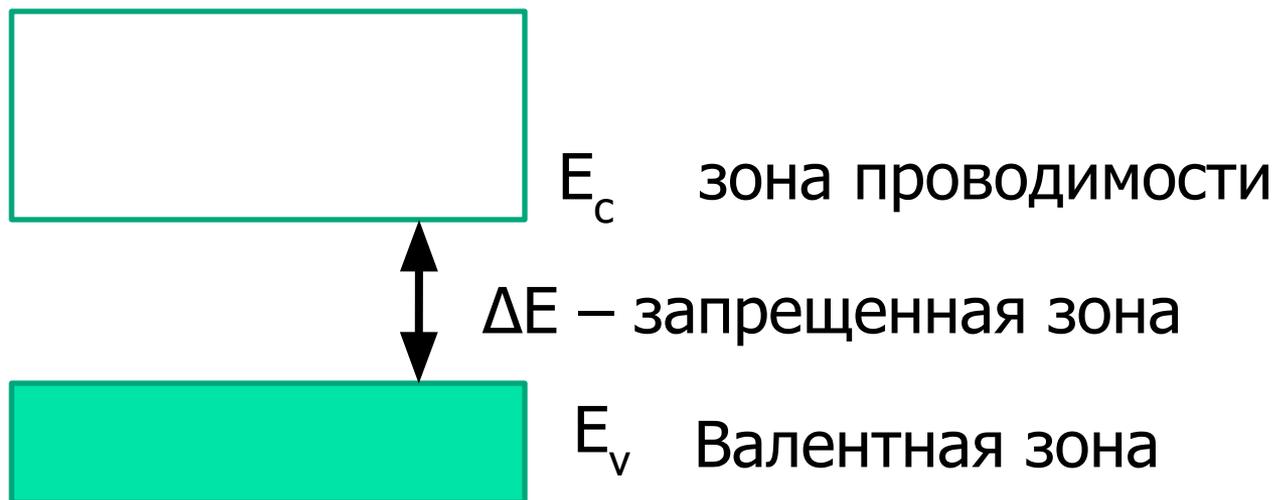


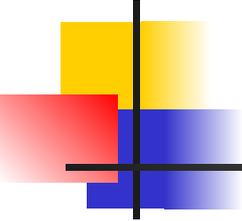
- 3) Полностью заполненная зона перекрывается со следующей свободной

- 
- 
- Такие вещества называются **металлами**

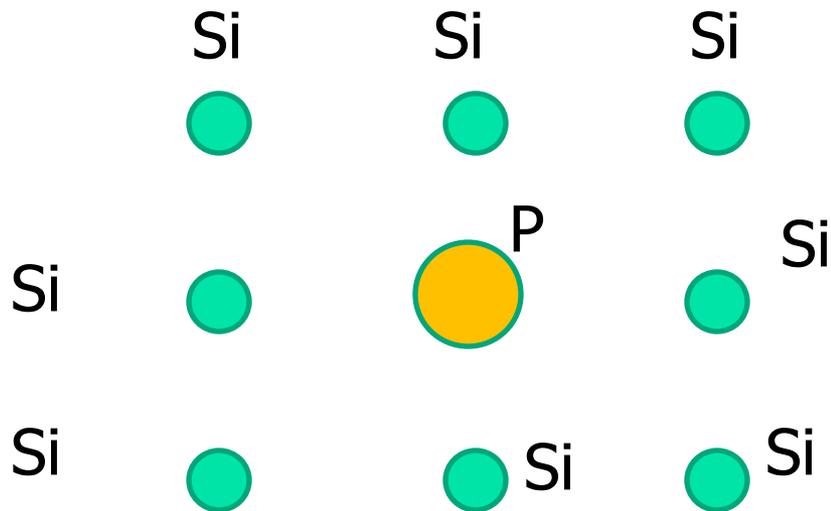
# Собственные и примесные полупроводники

- **Собственный** полупроводник, когда в нем отсутствуют примеси



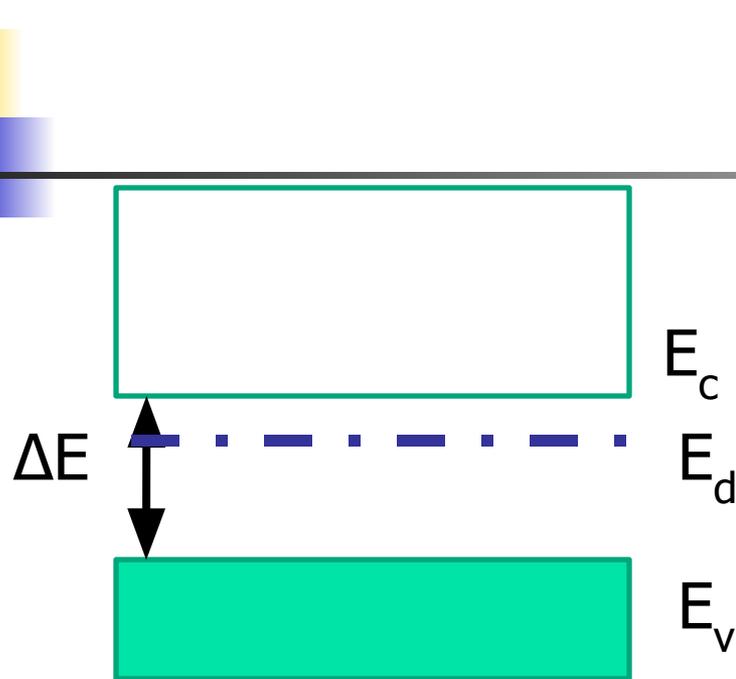
- 
- 
- **Примесный** полупроводники – в кристаллической решетки встречаются атомы посторонней примеси

# Донорные полупроводники



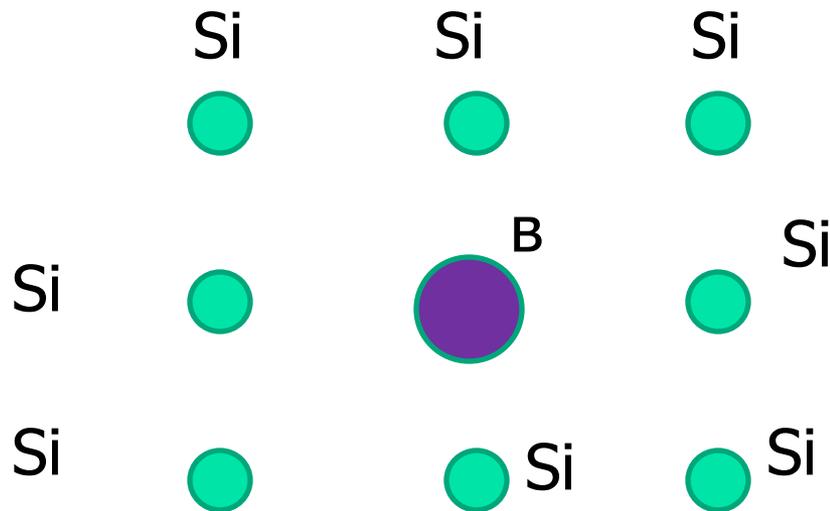
Si – 4 валентный

P– 5 валентный, один валентный электрон остается свободным и может переходить от одного атома к другому



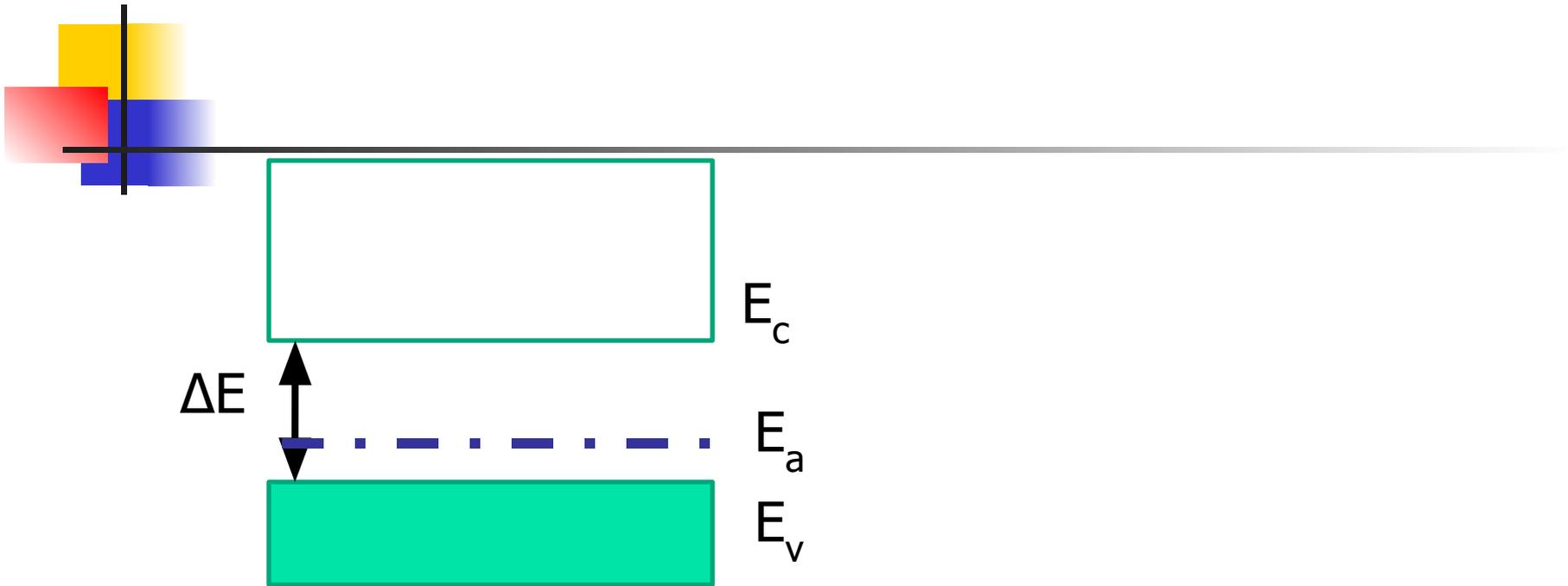
В запрещенной зоне вблизи дна  
зоны проводимости появляется  
**примесный донорный** уровень

# Акцепторные полупроводники



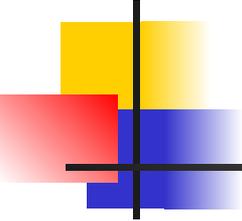
Si – 4 валентный  
B – 3 валентный, одна валентная связь остается незаполненной, Si может отдать один электрон B, а на его место придет электрон от другого атома

Пустое место (дырка) может перемещаться по решетке



В запрещенной зоне вблизи потолка валентной зоны появляется примесный акцепторный уровень

# Движение электрона в кристалле



---

- В кристалле на электрон действует поле кристаллической решетки
- Поведение электронов в кристалле похоже на поведение свободных электронов
- Их называют **квазисвободными**

# Эффективная масса электрона

- **Эффективная масса** учитывает взаимодействие электрона с кристаллической решеткой и позволяет описывать его движение теми же уравнениями, что и свободный электрон

$$m_i^* = \frac{\hbar^2}{\partial^2 E / \partial k_i^2}$$

$$P = \hbar k$$

$k$  - Волновой вектор

# ■ Для свободного электрона

$m_0$  - масса электрона

$$E = \frac{p^2}{2m_0} \quad p = \hbar k \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}$$

$$\frac{dE}{dk} = \frac{\cancel{2}\hbar^2 k}{\cancel{2}m_0}$$

$$\frac{d^2 E}{dk^2} = \frac{\hbar^2}{m_0}$$

Для свободного электрона  
эффективная масса равна  
массе электрона

$$m_i^* = \frac{\hbar^2}{\partial^2 E / \partial k_i^2}$$

$$m_0 = \frac{\hbar^2}{\frac{d^2 E}{dk^2}}$$

$$m_0 = m_i^*$$