

# ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Основание электростатики положили работы [Кулона](#) (хотя за десять лет до него такие же результаты, даже с ещё большей точностью, получил [Кавендиш](#). Результаты работ Кавендиша хранились в семейном архиве и были опубликованы только спустя сто лет); найденный последним закон электрических взаимодействий дал возможность [Грину](#), [Гауссу](#) и [Пуассону](#) создать изящную в математическом отношении теорию. Самую существенную часть электростатики составляет [теория потенциала](#), созданная Грином и Гауссом. Очень много опытных исследований по электростатике было произведено [Рисом](#), книги которого составляли в прежнее время главное пособие при изучении этих явлений.



**Шарль Огюстен Кулон**

*(Charles-Augustin de Coulomb)*

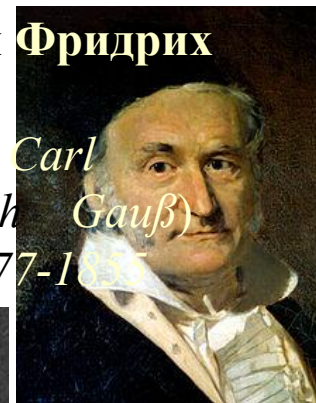
1736-1806



**Генри Кавендиш**

*(Henry Cavendish)*

1731 - 1810

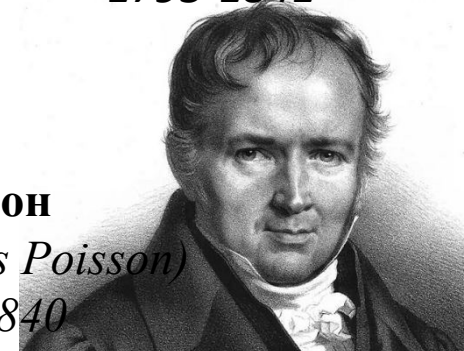


**Карл Фридрих**

**Гаусс**

*(Johann Carl  
Friedrich Gauß)*

1777-1855



**Пуассон**

*(Siméon Denis Poisson)*

1781-1840

**Питер Рис**

*(Peter Rieß)*

1805 – 1883

**Георг Грин**

*(George Green)*

1793-1841

# Электростатические явления

Эбонит + бумага (шерсть)



Шелк  
Стекло  
Стекло получает положительный заряд, а шёлк –

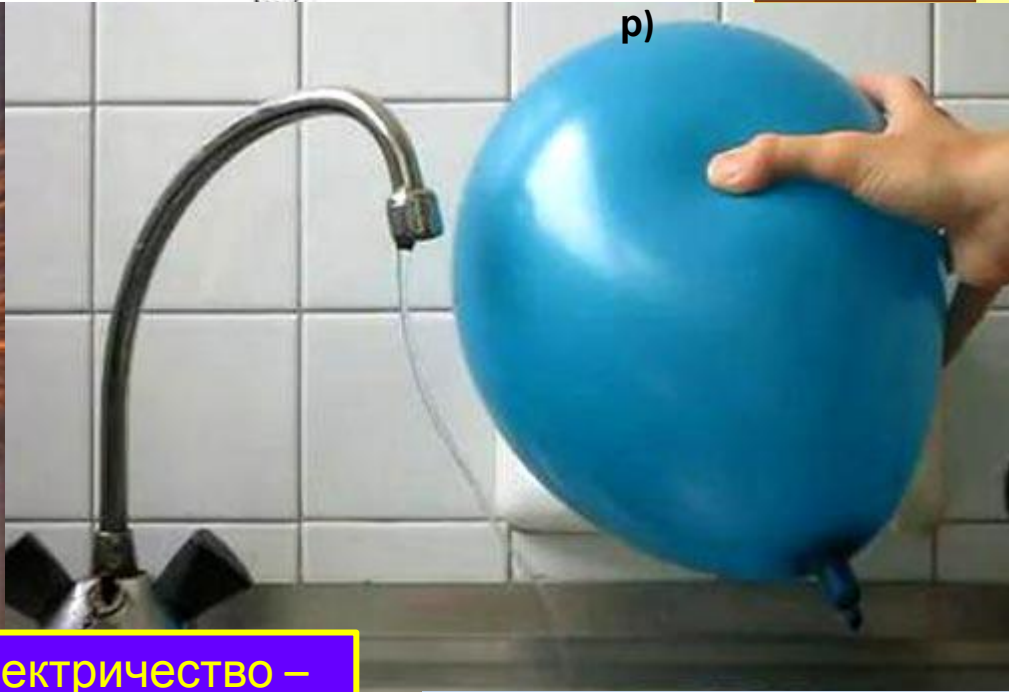
кусочки бумаги притягиваются к натёртой палочке



Электроскоп (электрометр)



Электрометр



Такой же эффект можно получить,

Электричество – от греческого слова *ἤλεκτρον*.

Струя воды отклоняется наэлектризованным телом

# 4 формы закона Кулона

для точечных зарядов (или малого размера)

Сила, действующая со стороны точечного заряда  $q_1$  на точечный

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Сила Куло-на на 40 (!) порядков больше гравитаци

3: Отношение силы, действующей со стороны точечного заряда  $q$  на пробный точечный заряд, и величины пробного заряда

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

(напр поля Потенциальная энергия взаимодействия между точечными

$$E_{\text{вз}} = k \frac{q_1 q_2}{r}$$

Напоминаем:

$$F = - \text{grad } E_{\text{вз}} \Rightarrow E = - \text{grad } \varphi$$

за Отношение потенциальной энергии взаимодействия между точечными зарядом  $q$  и пробным зарядом и величины пробного заряда

$$\varphi = k \frac{q}{r}$$

в СГС (система Гаусса)  $k = 1$  (электрический потенциал)

В СГС все формулы выглядят намного

проще, но пользуются сейчас только системой единиц СИ

В

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$$

Электрическая постоянная



# Определение

[1]

**КУЛОНА ЗАКОН** — один из осн. законов электростатики, определяющий величину и направление силы взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами. Экспериментально с достаточной точностью впервые доказан около 1773 Г. Кавендишем (Н. Cavendish), использовавшим метод сферич. конденсатора: отсутствие поля внутри заряд. сферы доказывает, что сила эл.-статич. взаимодействия меняется обратно пропорционально квадрату расстояния; однако результаты Кавендиша не были опубликованы. В 1785 закон был установлен Ш. О. Кулоном (Ch. A. Coulomb) с помощью спец. крутильных весов. Согласно К. з., два точечных заряда взаимодействуют друг с другом в вакууме с силой, пропорциональной произведению величин зарядов  $e_1$  и  $e_2$  и обратно пропорциональной квадрату расстояния  $r$  между ними:  $F = ke_1e_2/r^2$ , где  $k$  — коэф. пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерений. В Гаусса системе единиц  $k=1$ , в СИ  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ ,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная. Сила взаимодействия направлена по прямой, соединяющей заряды, причём одноимённые заряды отталкиваются, а разноимённые притягиваются. Силы, определяемые К. з., подчиняются принципу суперпозиции.

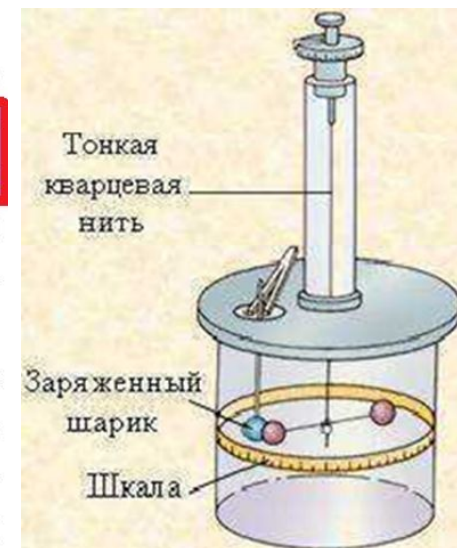


Схема  
эксперимен-  
тальной  
установки Ш.

Кулона  
Физическая  
энциклопедия  
в 5-ти томах.  
Изд.  
«Советская  
энциклопедия»  
, М., 1990 г.

# Отклонения от закона Кулона

## Поправки к закону Кулона в квантовой электродинамике

На небольших расстояниях (порядка [КОМПТОНОВСКОЙ ДЛИНЫ ВОЛНЫ ЭЛЕКТРОНА](#),  $\lambda_e = \hbar/m_e c \approx 3.86 \cdot 10^{-13}$  м) становятся существенными нелинейные эффекты квантовой электродинамики: на обмен виртуальными фотонами накладывается генерация виртуальных  $e^-e^+$  (а также  $\mu^-\mu^+$  и  $\tau^-\tau^+$ ) пар, а также уменьшается влияние экранирования. Оба эффекта ведут к появлению экспоненциально убывающих членов в выражении для [ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ](#) взаимодействия зарядов и, как результат, к увеличению силы взаимодействия по сравнению с вычисляемой по закону Кулона.

Например потенциал точечного заряда  $Q$  в системе СГС с учётом радиационных поправок имеет вид: 
$$\Phi(r) = \frac{Q}{r} \cdot \left( 1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2r/\lambda_e}}{(r/\lambda_e)^{3/2}} \right)$$
 где  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  — постоянная тонкой структуры.

В **сильных** внешних электромагнитных полях, составляющих заметную долю от поля [ПРО-БОЯ ВАКУУМА](#) (порядка  $\sim 10^{18}$  В/м или  $\sim 10^9$  Тл, такие поля наблюдаются, например, вблизи некоторых типов [НЕЙТРОННЫХ ЗВЁЗД](#), а именно [МАГНИТАРОВ](#)) закон Кулона также нарушается в силу [ДЕЛЬБРЮКОВСКОГО РАССЕЯНИЯ](#) обменных фотонов на фотонах внешнего поля и других, более сложных нелинейных эффектов. Это явление уменьшает кулоновскую силу не только в микро- но и в макромасштабах, в

**Эффект поляризации вакуума**

$$\frac{e_e(r)}{e} = 1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \ln \frac{r_e}{r} + \dots$$

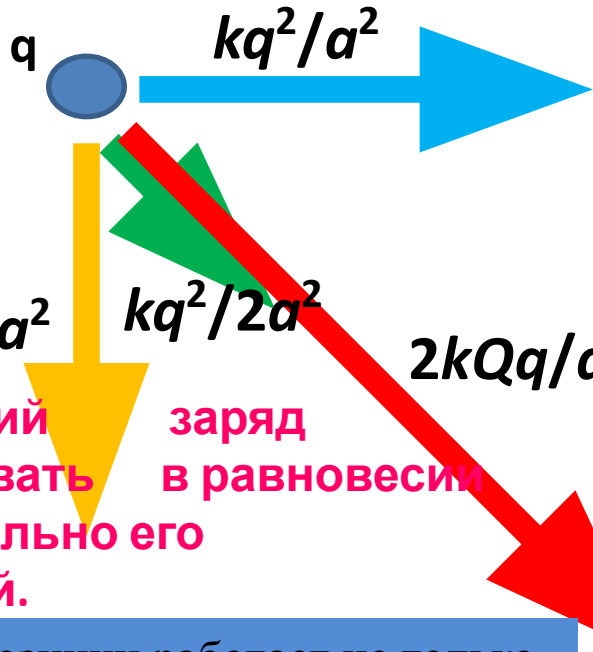
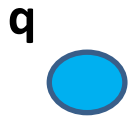
классический радиус

[электрона](#)  $r_e \approx 2.8 \cdot 10^{-13}$  см

Явление отклонения электростатического потенциала точечных зарядов в вакууме от значения закона Кулона известно как **эффект Юлин-га**, который впервые вычислил отклонения от

Этот эффект наблюдается в сильном [электромагнитном поле](#) вблизи сверхтяжелых ядер с зарядом  $Z > 170$  осуществляется перестройка вакуума, аналогичная обычному [фазовому переходу](#). Это приводит к поправкам к

# Принцип суперпозиции (наложения)



Силы, определяемые по закону Кулона, действующие на каждый из зарядов, необходимо затем векторно сложить. Тогда, беря проекцию на диагональ квадрата, получим:

$$F = k/a^2 ( 2 q^2 \cos 45^\circ + q^2/2 + 2Qq )$$

Эта сила может быть обнулена, если взять

$$Q = - \frac{(2\sqrt{2} + 1) q}{4} = 0,9571 q$$

Тогда все заряды будут находиться в состоянии равновесия. Равновесие это **неустойчивое**. Малейший сдвиг приведёт к тому, что отрицательный заряд соединится с одним из положительных, образуя маленький положительный заряд, а остальные разлетятся на бесконечность. В этом состоит теорема Цирингера.

Расчёт электростатики проводников и диэлектриков предполагает учёт наведённых поверхностных и объёмных связанных зарядов

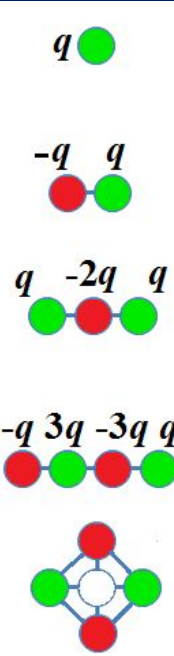
Один маленький заряд может удерживать заряд, значительно его превышающий. заряд в равновесии

Принцип суперпозиции работает не только в системах с зарядами, зафиксированными в определённых координатах, но и при взаимодействии со средами со слабым линейным откликом



# Диполь, квадруполь и более сложные мультиполи [3]

Сила, действующая на диполь, равна  $\vec{F} = (dV) \vec{E} = \left( d_x \frac{\partial}{\partial x} + d_y \frac{\partial}{\partial y} + d_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E}$



$\varphi = k \frac{q}{r}$

$\cos \theta = x/r$

## Полиномы

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n$$

$\varphi = k \frac{q\ell}{r^2} \cos \theta$

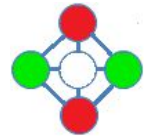
$\vec{E} = k \frac{3\vec{n}(\vec{n}, \vec{d}) - \vec{d}}{R^3}$

$\varphi = k \frac{q\ell^2}{2r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$

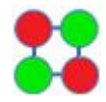
$P_0 = 1$     $P_1 = z$     $P_2 = \frac{1}{2} (3z^2 - 1)$   
 $P_3 = \frac{1}{2} (5z^3 - 3z)$     $P_4 = \frac{1}{8} (35z^4 - 30z^2 + 3)$

$\varphi = k \frac{q\ell^3}{2r^4} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$

$\varphi = k \frac{3q\ell^2}{2r^5} (x^2 - y^2)$



получается наложением квадрупольей – «+» вдоль «x» и «-» вдоль «y»

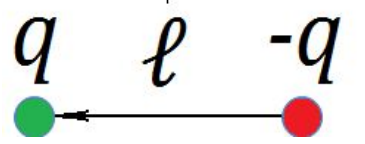


получается поворотом на 45° и сжатием в  $\sqrt{2}$  раз

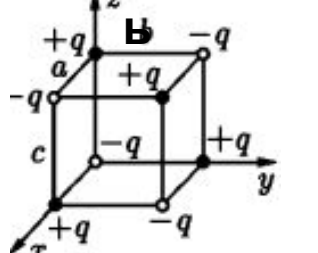
$\varphi = k \frac{3q\ell^2 xy}{r^5}$

Дипольный момент  $\vec{d} = q\vec{\ell}$

стрелкой указано направление диполя

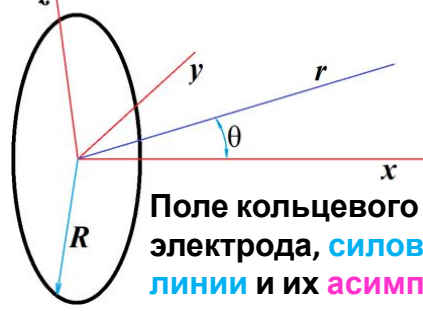


## октоупол



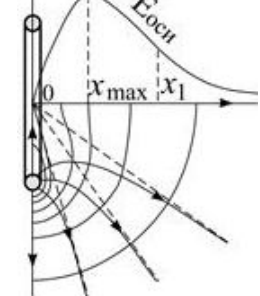
$\varphi = k \frac{15q\ell^3 xyz}{r^7}$

## Равномерно заряженное кольцо



Поле кольцевого электрода, силовые линии и их асимптоты, срез эквипотенциальных поверхностей и

$\varphi(r, \theta) = \frac{4kQ}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}}$



$\int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \chi^2 \sin^2 \beta}}$   $K(\chi)$

Полный эллиптический интеграл 1-го рода

$\chi^2 = \frac{4rR \sin \theta}{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}$

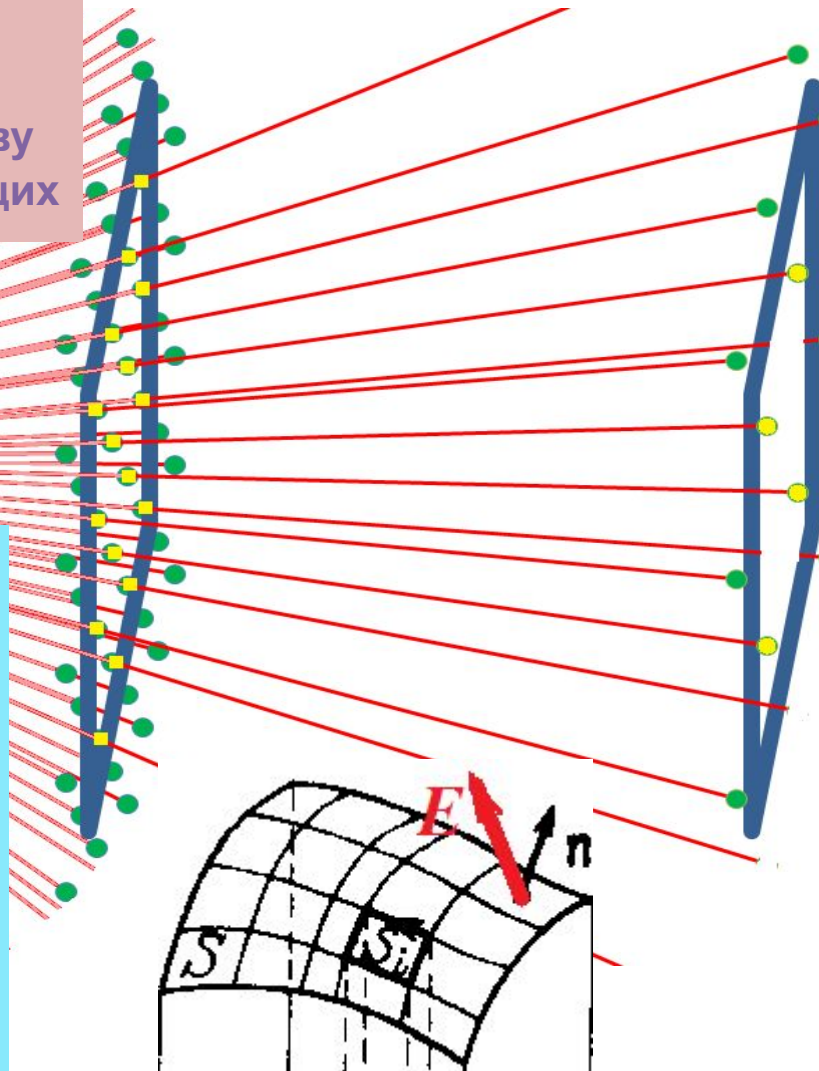
# Концепция силовых линий

Напряжённость электрического поля численно равна количеству силовых линий, проходящих через контур единичной площади.

Поток силовых линий через замкнутую поверхность вокруг заряда  $q$  равен

$$E \cdot 4\pi r^2 = q/\epsilon_0.$$

Силовые линии всегда начинаются на положительных зарядах или приходят из бесконечности. Оканчиваются они всегда на отрицательных зарядах или уходят в бесконечность. Эти свой-



$\Omega$  – поверхность замкнутой односвязной области, полный заряд в которой равен  $q$

Концепция силовых линий помогает решить некоторые задачи, исходя из симметрии.

При решении задач о **конфигурации электрического поля** системы мы будем руководствоваться обобщённым принципом потока силовых линий,

$$\oiint_{\Omega} \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



# Определение

[1]

**СИЛОВЫЕ ЛИНИИ** — семейство кривых, характеризующих пространственное распределение векторного поля сил; направление вектора поля в каждой точке совпадает с касательной к С. л. Т. о., уравнения С. л. произвольного векторного поля  $A(x, y, z)$  записываются в виде:

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z)}.$$

Плотность С. л. характеризует интенсивность (величину) силового поля. Область пространства, ограниченная С. л., пересекающимися к.-л. замкнутую кривую, наз. **силовой трубкой**. С. л. вихревого поля замкнуты. С. л. потенциального поля начинаются на источниках поля и заканчиваются на его стоках (источниках отрицат. знака).

Понятие С. л. введено М. Фарадеем при исследовании магнетизма, а затем получило дальнейшее развитие в работах Дж. К. Максвелла по электромагнетизму. Согласно представлениям Фарадея и Максвелла, в пространстве, пронизываемом С. л. электрич. и магн. полей, существуют механич. напряжения, соответствующие натяжению вдоль С. л. и давлению поперёк них. Математически эта концепция выражена в *Максвелла тензоре натяжений* эл.-магн. поля.

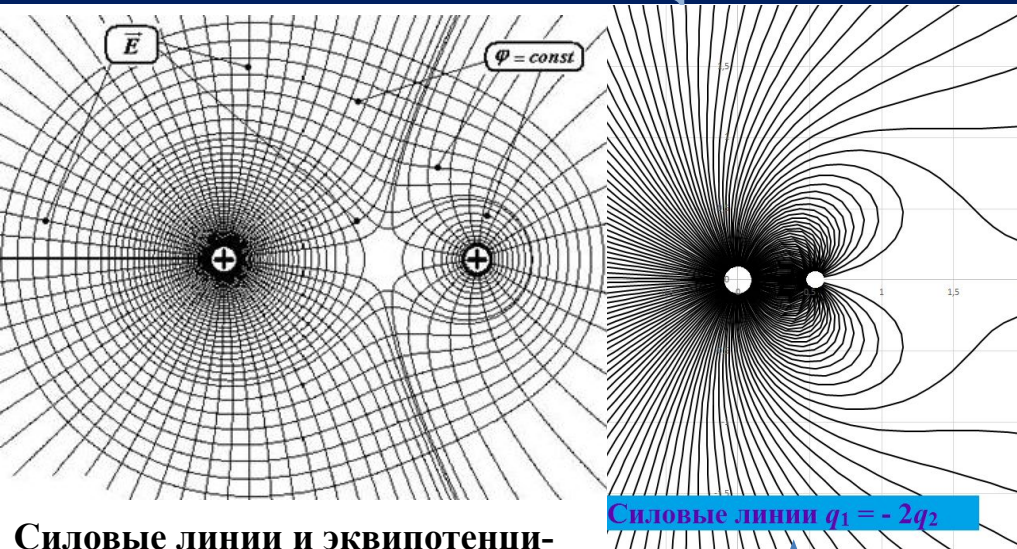
Наряду с использованием понятия С. л. чаще говорят просто о линиях поля: напряжённости электрич. поля  $E$ , индукции магн. поля  $B$  и т. п., не делая спец. акцента на отношении этих полей к силам.

Силовыми линиями неудобно пользоваться, если заряд распределён в пространстве, т.к. в этом случае плотность силовых линий уже не будет определять величину поля.

По этой же причине также неудобно пользоваться силовыми линиями для некулоновских полей — поля осциллятора, и любой другой степенной зависимости кроме  $1/r^2$ .

# Силовые линии и

# ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

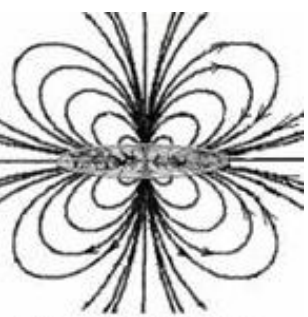


**а** Экипотенциальные поверхности поля двух равных одноименных зарядов (**а**) и диполя (**б**). Пунктиром показаны силовые линии.

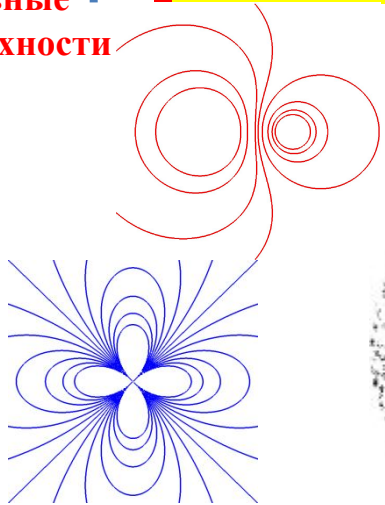
Силовые линии и экипотенциальные поверхности поля двух положительных зарядов. Как вы думаете, во сколько левый заряд больше правого? Что означает сгущение силовых линий на границе зон влияния зарядов?

Нарисуйте экипотенциальные поверхности

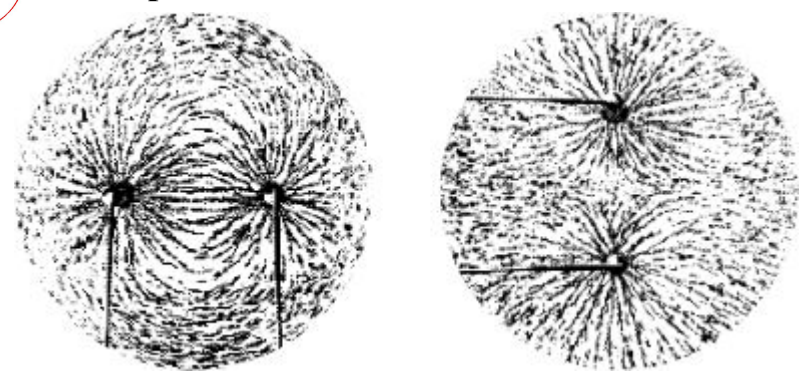
**Любая силовая линия перпендикулярна любой экипотенциальной поверхности в точке их пересечения**



Слева показаны силовые линии квадрупольного поля. Нарисуйте самостоятельно экипотенциальные поверхности.



Силовые линии магнитного поля токов, изображаемые железными опилками

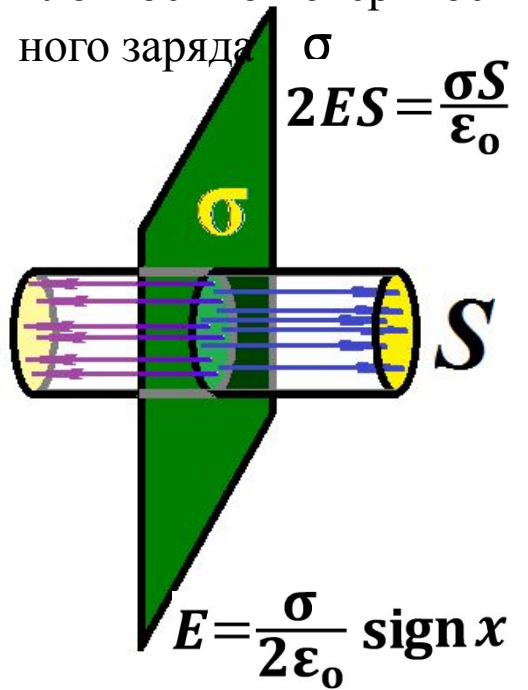


Квадрупольное поле



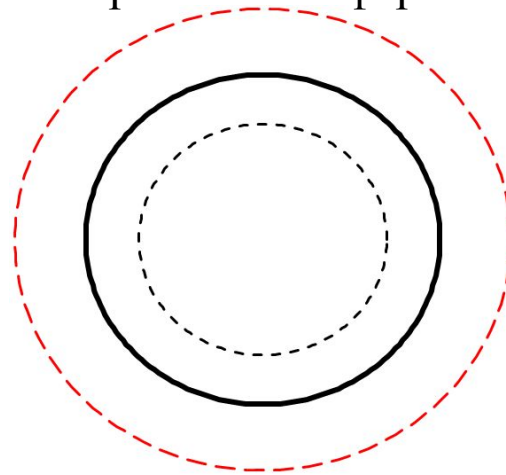
# Нахождение поля в простейших симметричных случаях

Поле плоскости, равномерно заряженной с плотностью поверхностного заряда  $\sigma$



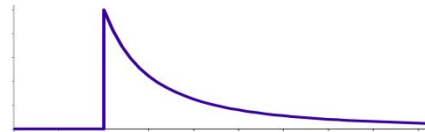
$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |x| + \text{const}$$

Поле равномерно заряженной сферы



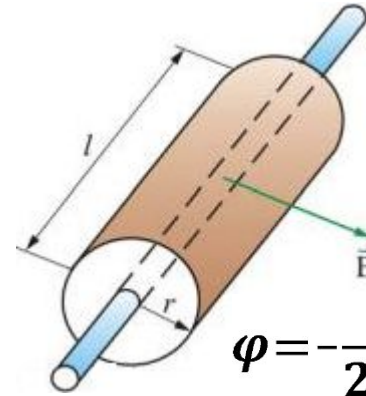
Внутри  $E = 0, \varphi = \text{const}$ ;  
Снаружи

$$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



$$\varphi = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

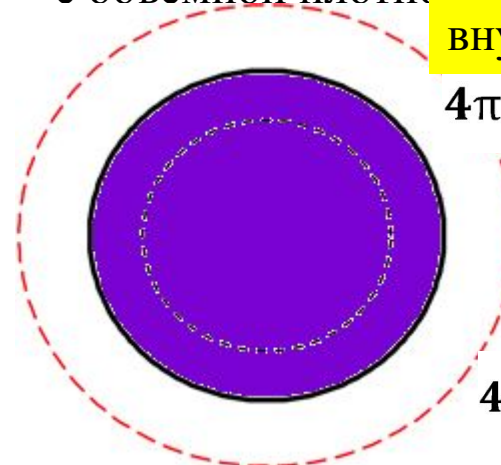
Поле равномерно заряженной нити с линейной плотностью заряда  $\rho$



$$E = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\varphi = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + \text{const}$$

Поле равномерно заряженного шара с объемной плотностью  $\rho$



внутри

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3} \rho$$

то есть  $E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$

снаружи

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi R^3}{3} \rho$$

Нарисуйте график  $\varphi(r)$



# Дифференциальные уравнения электростатики [3]

Поток вектора через бесконечно малый куб

Уравнение Пуассона

Уравнение Лапласа

$$\Delta \phi = -\rho / \epsilon_0$$

$$\Delta \phi = 0$$

Вместе с граничными условиями – задача Дирихле

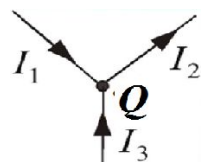
Прочие законы электростатики

**Закон сохранения**

заряда

$$\sum I_k = -\frac{dQ}{dt}$$

Первое правило



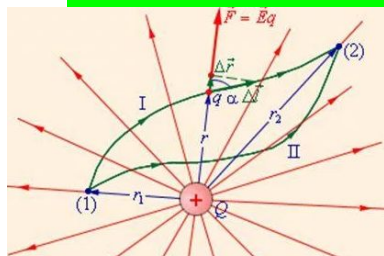
$$\oiint \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{d\rho}{dt}$$

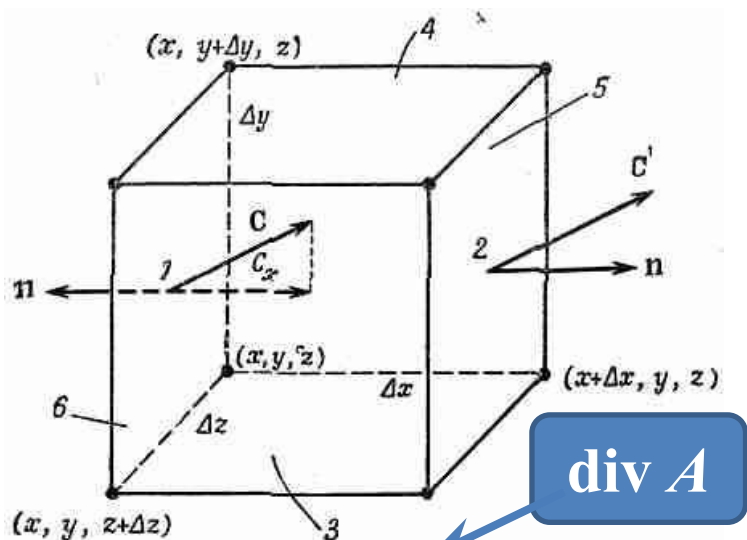
интегральная дифференциальная

**Потенциальность электрического поля**

работа по переносу единичного заряда равна разности потенциалов; работе по замкнутому контуру равна нулю  $\oint \vec{E} d\vec{r} = 0$



По теореме Стокса  $\text{rot } E = 0$



**div A**

$$\oiint \vec{A} d\vec{S} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$\text{div } E = \rho / \epsilon_0 \quad \Delta \phi = -\rho / \epsilon_0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

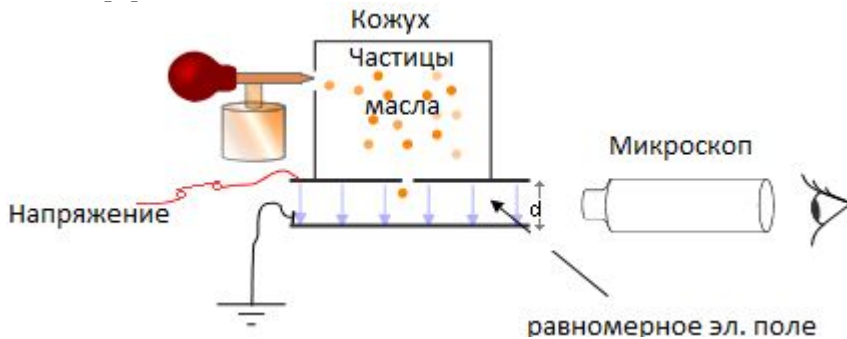
Оператор Лапласа  $\Delta$

$$\oint_{\partial S} E_x dx + E_y dy + E_z dz = \iint_S \left( \frac{dE_z}{dy} - \frac{dE_y}{dz} \right) dy dz + \left( \frac{dE_x}{dz} - \frac{dE_z}{dx} \right) dx dz + \left( \frac{dE_y}{dx} - \frac{dE_x}{dy} \right) dx dy$$

# Дискретность электрического заряда

[7]

## Схема эксперимента



**Роберт Милликен**

*Robert Andrews Millikan*

1868 -1953 - американский физик

В 1923 получил Нобелевскую премию по физике

Все заряды кратны элементарному

$$e = 1,602\,176\,6208(98) \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

Любой наблюдаемый в эксперименте электрический

заряд всегда кратен одному элементарному — такое предположение было высказано Б. Франклином в 1752 году и в дальнейшем не-однократно проверялось экспериментально.

Впервые элементарный заряд был экспериментально измерен Милликеном в 1910 году.

Если в природе существует магнитный монополю, то, согласно квантовой механике, его магнитный заряд обязан находиться в определённом соотношении с электрическим зарядом любой выбранной элементарной частицы.

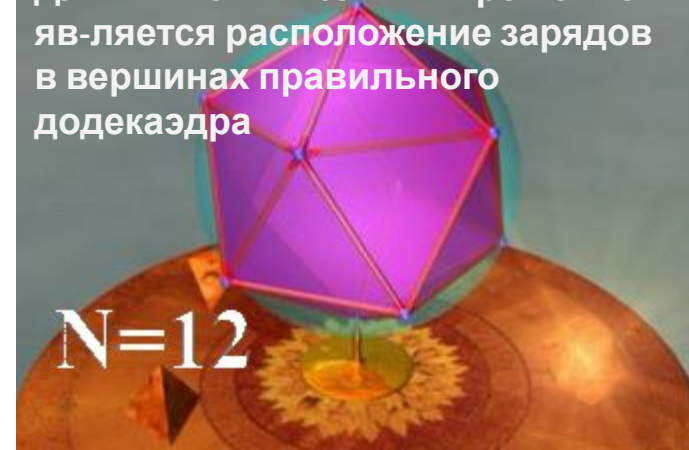
Отсюда автоматически следует, что существование всего одного магнитного монополя влечёт за собой квантование всех электрических зарядов во Вселенной. Однако

## Задача

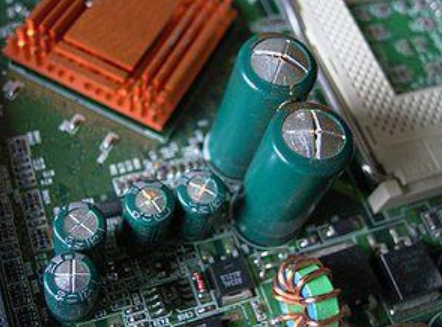
Томсона

Расположить  $N$  зарядов на поверхности сферы так, чтобы суммарная энергия была минимальна. Задача до сих пор ре-

шена только для  $N = 2, 3, 4, 6, 8, 12$ . Для  $N=12$  оптимальным решением является расположение зарядов в вершинах правильного додекаэдра



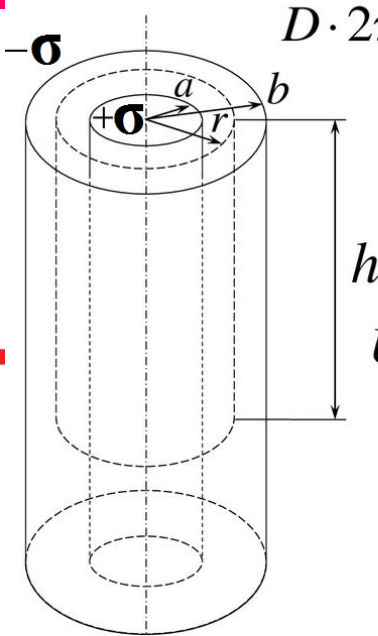
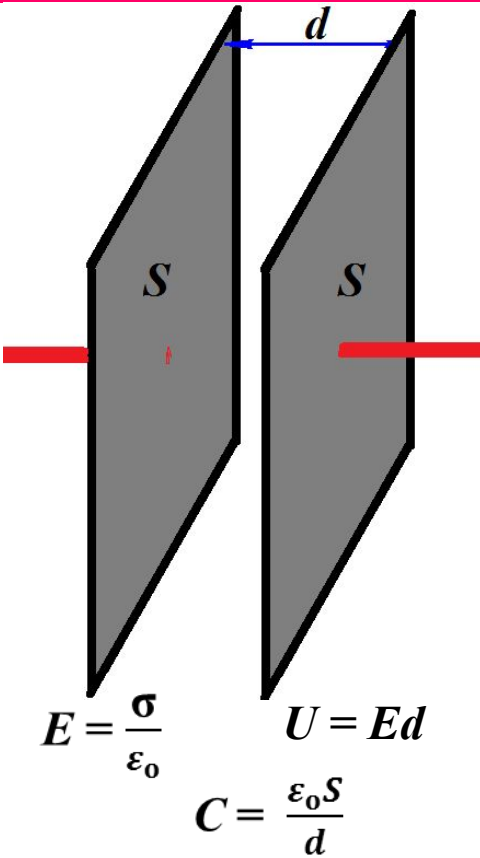
# Конденсаторы



Называются так, потому что электрическое поле в основном сконцентрировано внутри конденсатора

У всех конденсаторов на этой странице внутри вакуум

Плоский



$$D \cdot 2\pi r h = \sigma h$$

$$D = \frac{\sigma}{2\pi r} = \frac{q}{2\pi r h}$$

$$E(r) = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 r h}, \quad a < r < b$$

$$U = \int_a^b E(r) dr = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\ln \frac{b}{a}}$$

обозначение на электрических схемах

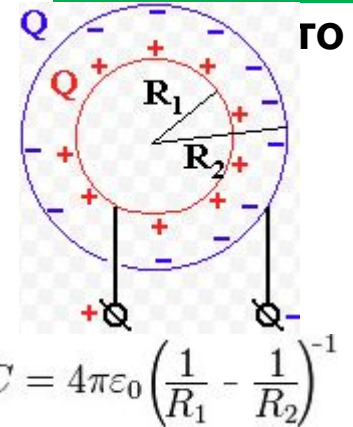


Последовательное соединение



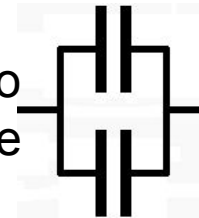
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Сферический



сферический конденсатор должен иметь дырку – т.е. в нём обязательно будут топологические нарушения

Параллельное соединение



$$C = C_1 + C_2$$

И в плоском, и в цилиндрическом конденсаторе важны краевые эффекты.

Во всех задачах на конденсаторы предполагается, что суммарный заряд на обкладках равен 0.



[1]

**КОНДЕНСАТОР ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ** (от лат. *condensator*, букв. — тот, кто уплотняет, сгущает) — устройство, предназначенное для получения нужных величин электрич. ёмкости и способное накапливать и отдавать (перераспределять) электрич. заряды. К. э. применяются в электрич. цепях (сосредоточенные ёмкости), электроэнергетике (компенсаторы реактивной мощности), импульсных генераторах напряжения, в измерит. целях (измерит. конденсаторы и ёмкостные датчики).

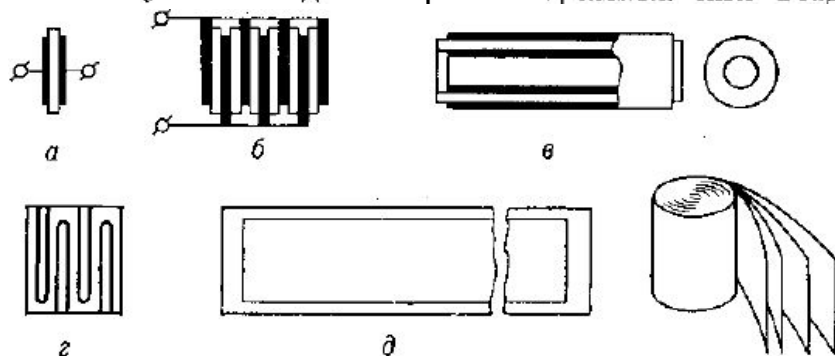
К. э. состоит из двух (иногда более) проводящих тел (обкладок), разделённых диэлектриком. Как правило, расстояние между обкладками, равное толщине диэлектрика, мало по сравнению с линейными размерами обкладок. Поэтому электрич. поле, возникающее при подключении обкладок к источнику с напряжением  $U$ , практически полностью сосредоточено между обкладками. При этом частичные собственные ёмкости электрические обкладок пренебрежимо малы по сравнению с их частичной взаимной ёмкостью, к-рая в этом приближении примерно равна ёмкости К. э. Численно ёмкость  $C$  К. э. равна заряду  $q$  одной из обкладок при напряжении, равном единице:  $C=q/U$ . Энергия, запасённая заряженным до пост. напряжения  $U$  К. э., равна  $W=CU^2/2$ . Ёмкость К. э. зависит от абс. диэлектрич. проницаемости диэлектрика  $\epsilon$ , формы и геом. размеров. Ёмкость плоского К. э., представляющего собой две металлич. плоские параллельные пластины, разделённые диэлектриком, равна  $C=\epsilon S/d$  (в СИ), где  $S$  — площадь обкладки,  $d$  — расстояние между обкладками (толщина диэлектрика).

В этой статье, взятой из физической энциклопедии, фигурирует абсолют-ная диэлектрическая проницаемость

$\epsilon$ , которую мы обычно заменяем на

При изготовлении К. э. используется неск. базовых конструкций (рис. ). В простейшем случае это плоский К. э. — две плоские металлич. обкладки, разделённые диэлектриком (а), или плоский многопластинчатый К. э., содержащий  $n$  обкладок, соединённых параллельно (б). Эти две конструкции чаще применяются в К. э. с неорганич. диэлектриками. Кроме них в керамич. К. э. используются ещё две конструкции — цилиндрич. и многосекционная (в и г). В К. э. с органич. диэлектриками базовой конструкцией является спиральный К. э. (д), в к-ром обкладки и диэлектрики представляют собой ленты, скручиваемые спиралью. Эта же конструкция часто применяется в К. э. с оксидным диэлектриком. В них диэлектриком служит тонкая оксидная плёнка, к-рая наносится на одну из обкладок (анод) электролитич. путём. Объёмно-пористый анод разл. формы получается спеканием металлич. порошка (алюминий, ниобий, тантал). В результате анод имеет большую эфф. поверхность, отделённую от второй обкладки тонкой изолирующей оксидной плёнкой, что определяет большую ёмкость оксидно-электролитич. К. э. В качестве второй обкладки используют жидкий или пастообразный электролит, проникающий в поры анода.

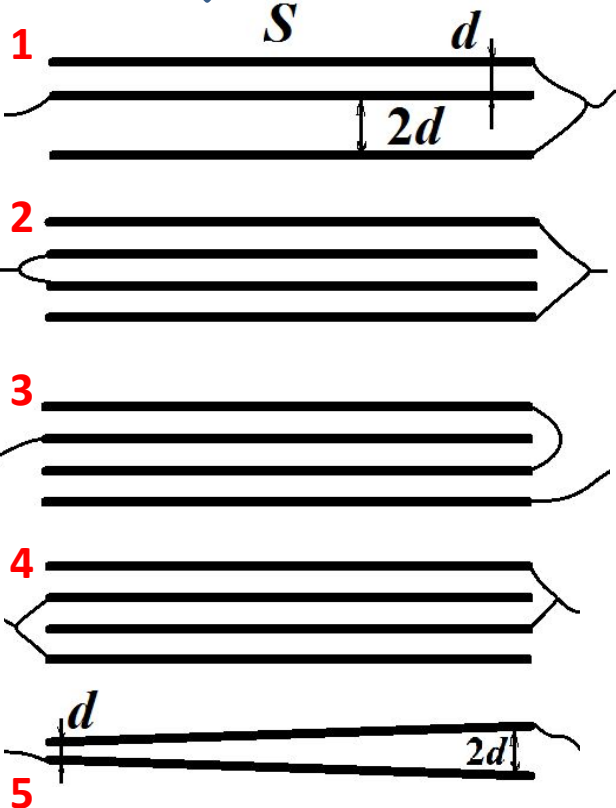
В подстроечных К. э. применяются дисковые, пластинчатые и цилиндрич. конструкции, а диэлектриком в них служит конденсаторная керамика или воздух.



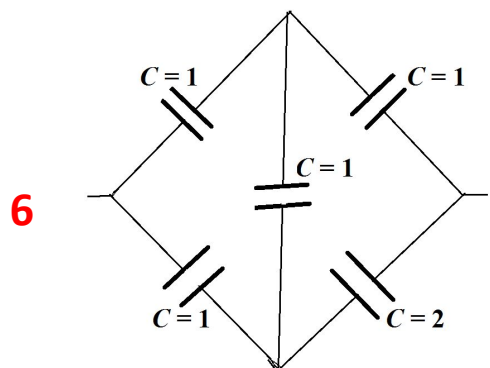
# Плотность энергии поля

[5]

## Задачи на нахождение ёмкости конденсатора



$\frac{3}{2} C_0$   
 $2 C_0$   
 $\frac{3}{2} C_0$   
 $3 C_0$   
 $C_0 \ln(2)$



$C_0 = \epsilon_0 S/d$

### Работа по раздвижению обкладок конденсатора

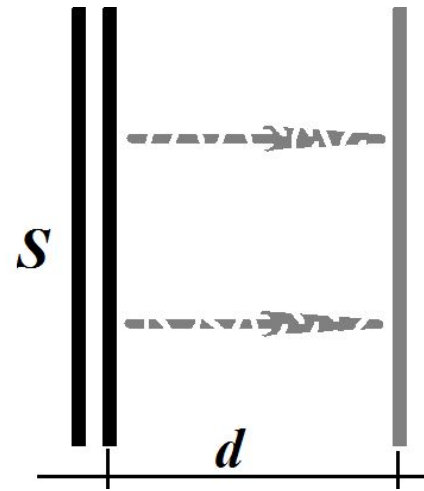
Поле одной пластины

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Сила между пластинами

$$F = EQ$$

$$A = Fd = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V$$



$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

### Плотность энергии поля

### Энергия поля заряда радиуса

$$\epsilon = \int_R^\infty \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

### Если устремить R -> 0, энергия стремится к ∞

Энергия поля точечного заряда оказывается бесконечной, а значит и энергия (и масса по формуле  $E=mc^2$ ) - тоже бесконечна. В теории поля проводят процедуру т.н. перенормировки, беря «затравочную» массу частицы отрицательно

# Персоналия – ещё немного о создателях науки



**Фарадэй**

*Michael Faraday*

1791 - 1867



**Максвелл**

*James Clerk*

*Maxwell*

1831 - 1879



**Остроградский**

Михаиль

Васильевичъ

1801 - 1862



**Ирншоу**

*Samuel Earnshaw,*

1805 - 1888



**Уильям Томсон,  
лорд Кельвин**

*William Thomson,  
1st Baron Kelvin;*

1824 - 1907

**Открыл**

эл.-м. индукцию  
законы  
электролиза  
диамагнетизм

**Изобрёл**

электродвигатель  
трансформатор

**Предсказал**

эл.-м. волны

**Открыл**

теорию эл.-м. волн  
**Ур-я Максвелла**  
кин. теория газов  
**Распред.**

**Максвелла**

эл.-м. природу  
света

трёхцветность

природы света

Бюграф

**Математик**

**Открыл**

метод  
интегрирования  
рац. функций

**Доказал**

Теорему

Остроградского

Священник –  
богослов и  
физик-теоретик.

**Доказал**

теорему Ирншоу

2-е начало  
термодинамики  
Закон Томсона в  
термоэлектричест  
ве

Электрические  
колебания

Критик теории

эволюции



# Электростатика проводников

[4]

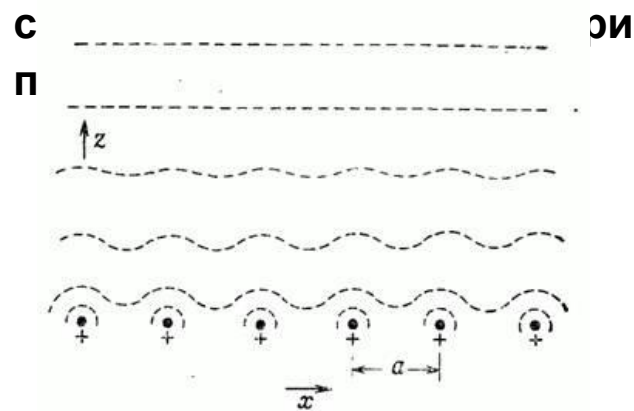
Если внутри проводника есть электрическое поле, то в нём идёт ток. Если проводник изолирован, то рано или поздно свободные заряды либо кончатся, либо скомпенсируют поле. Следовательно, в

**Поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью. Каждая точка проводника имеет одинаковый потенциал.**

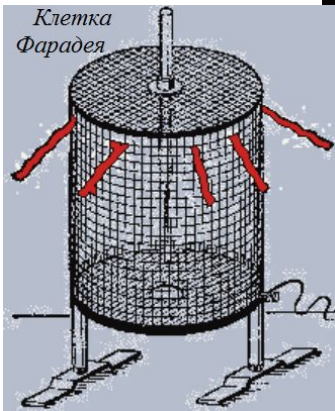
**Экранирование металлической**

Заряды собираются на **поверхности**

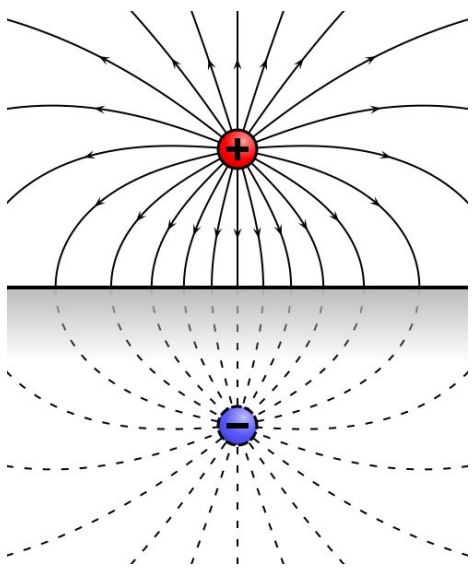
проводника. Распределение зарядов по поверхности проводника заранее не



Электрическое поле убывает за линейной решеткой как  $e^{-2\pi z/a}$ , а за сеткой в 2 раза быстрее.



# Метод изображений [2]



Координата  
заряда  
изображения

$$r' = R^2/r$$

Заряд равен

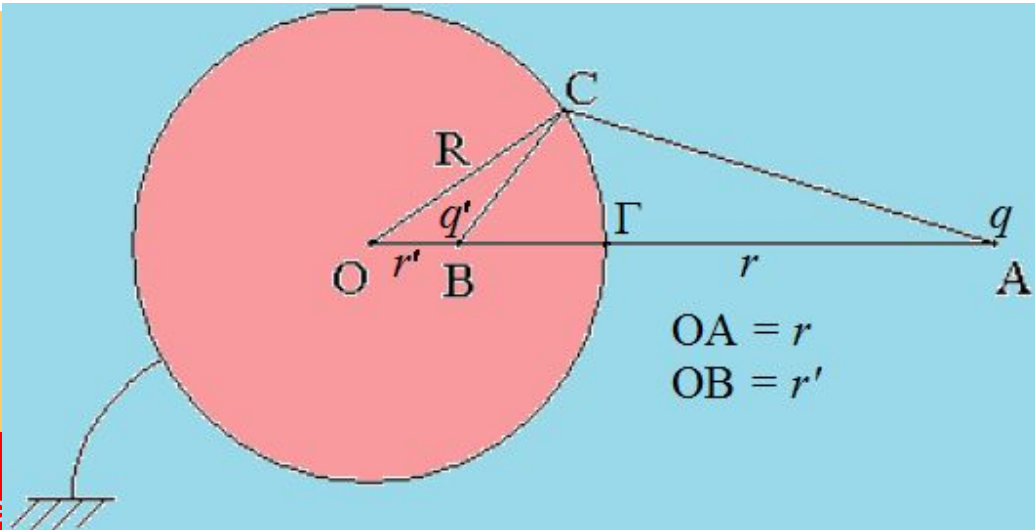
$$q' = -qR/r$$

Если шар не за-  
землён, то  
добавляется

Задачу о сфере в  
однородном поле  
можно получить

из рассматриваемой предельным переходом  $r \rightarrow \infty$  с  $q = r^2 E/k$

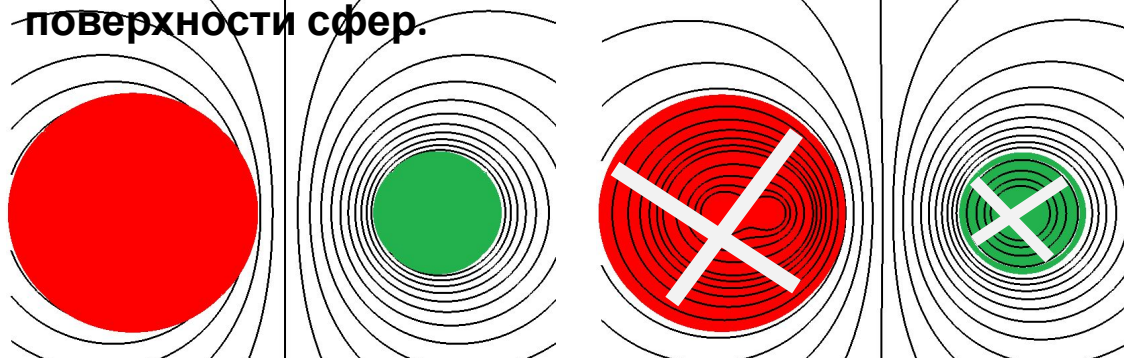
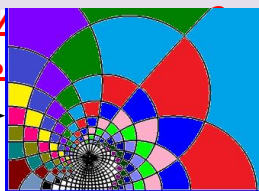
Задачу о двух проводящих заряженных сферах можно решать методом последовательных приближений. На правом рисунке эквипотенциальные поверхности почти соответствуют поверхности сфер.



Снизу, под плоскостью, поля нет. Следовательно, энергия взаимодействия с проводником, в 2 раза меньше, чем если бы заряд изображения был реальным. **Можно ли из этого сделать вывод, что**

и сила притяжения

Изображение в угле см. дальше



Слева – поле аппроксимируется точечными зарядами. Справа - добавляется по одному заряду

Здесь  $R_1=2, R_2=1,$   
 $Q_1 = -Q_2$   
 $L = 5.$   
2-е приближение даёт

Линии внутри сферы фиктивные



# Поле эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

## Эллипсоидальные

Связь эллипсоидальных координат с декартовыми дается уравнением  $\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1$  ( $a > b > c$ ).

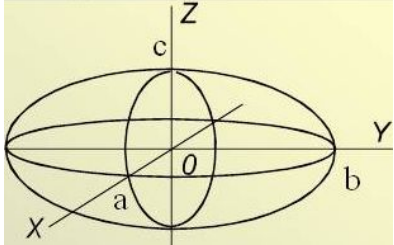
Это уравнение, кубическое относительно  $u$ , имеет три различных вещественных корня ( $u = \xi, \eta, \zeta$ ), лежащих в следующих интервалах:  $\xi \geq -c^2 \geq \eta \geq -b^2 \geq \zeta \geq -a^2$

Эти 3 корня и являются эллипсоидальными координатами точки  $x, y, z$ .

$$x = \pm \left[ \frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right]^{1/2}$$

$$y = \pm \left[ \frac{(\xi + b^2)(\eta + b^2)(\zeta + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \right]^{1/2}$$

$$z = \pm \left[ \frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)(\zeta + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2}$$



Для вытянутого эллипсоида ( $a > b = c$ ) потенциал поля

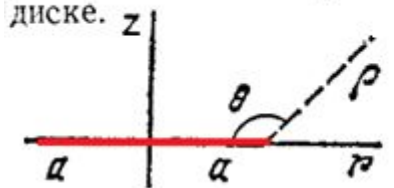
$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{Arth} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\xi + a^2}}$$

Для сплюснутого же эллипсоида ( $a = b > c$ ) имеем

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{a^2 - c^2}} \text{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}}$$

$$\sigma = \frac{e}{4\pi abc} \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2}$$

Найти поле заряженного проводящего круглого диска (радиуса  $a$ ), разбив его в цилиндрических координатах. Найти распределение заряда на диске.



$$\sigma = \frac{e}{4\pi a^2} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2}$$

$$\varphi = \frac{e}{a} \text{arctg} \left[ \frac{2a^2}{r^2 + z^2 - a^2 + [(r^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2]^{1/2}} \right]^{1/2}$$

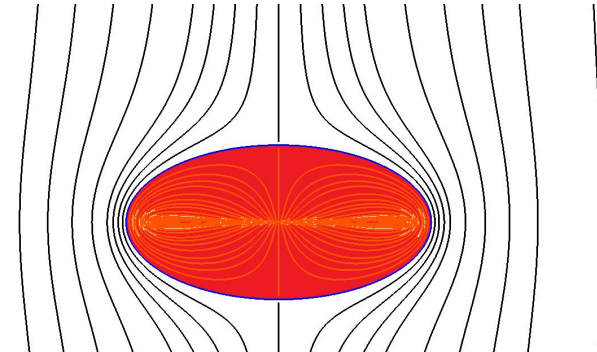
Вблизи края диска вводим вместо  $r$  и  $z$  координаты  $\rho$  и  $\theta$  согласно  $z = \rho \sin \theta, r = a - \rho \cos \theta$  ( $\rho \ll a$ )

$$\varphi \approx \frac{e}{a} \left( \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{2\rho}{a}} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

незаряженный эллипсоид расположен параллельно внешнему полю

$$a > b = c, \quad \frac{y^2 + z^2}{b^2 + \xi} + \frac{x^2}{a^2 + \xi} = 1, \quad \xi \geq 0$$

$$\varphi = -\xi x \left\{ 1 - \frac{\text{Arth} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + \xi}} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + \xi}}}{\text{Arth} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \right\}$$



Эквипотенциальные линии проводящего эллипсоида во внешнем



# Метод конформного отображения

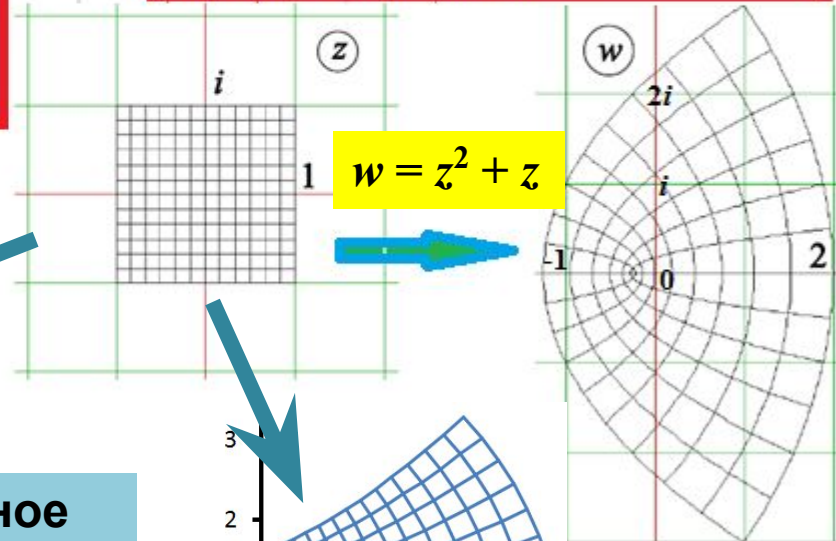
[3]

Конформные отображения изменяют объём, но сохраняют все углы и формы в малых

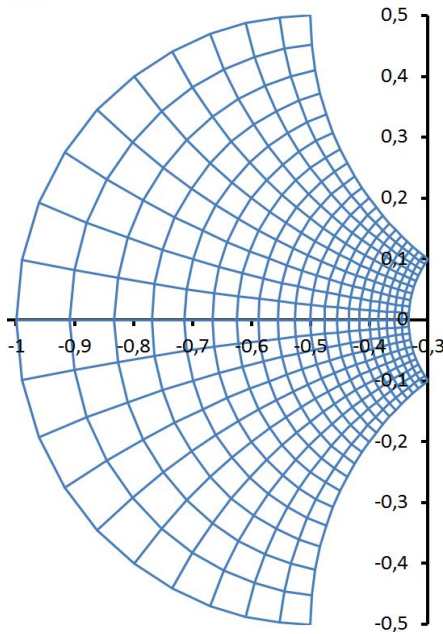
Пример: Найти образы линий прямоугольной сетки квадрата  $[-1,1] \times [-1,1]$  при отображении  $w = z^2 + z$ . Отображение имеет вид 
$$\left. \begin{aligned} u &= x^2 - y^2 + x \\ v &= 2xy + y \end{aligned} \right\}$$

Горизонтالي  $y=c$  переходят в параболы 
$$\left. \begin{aligned} u &= x^2 - c^2 + x \\ v &= 2xc + c \end{aligned} \right\}, u = \left(\frac{v-c}{2c}\right)^2 + \left(\frac{v-c}{2c}\right) - c^2$$
 направленными налево.

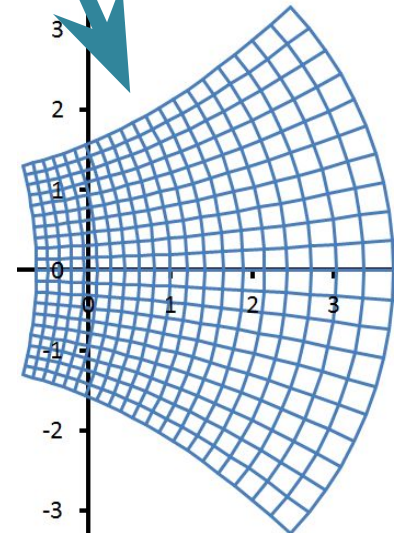
Вертикали  $x=c$  переходят в параболы: 
$$\left. \begin{aligned} u &= c^2 - y^2 + c \\ v &= (2c+1)y \end{aligned} \right\}, u = c^2 + c - \left(\frac{v}{2c+1}\right)^2,$$
 направленными направо.



$w = (z-2)^{-1}$



**Конформное преобразование может преобразовать квадрат в любую связную область**



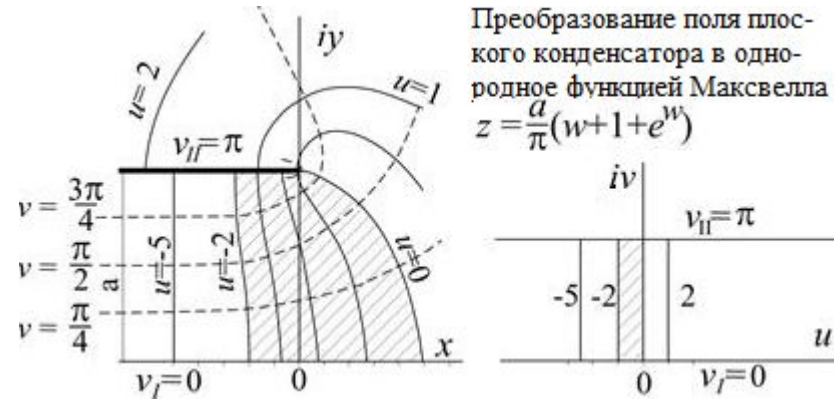
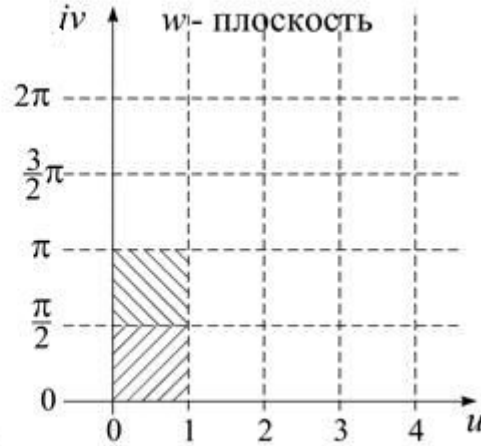
$w = e^z + z$

Здесь приведён пример использования одного из простейших конформных преобразований. Теория комплексных функций комплексного переменного (ТФКП) даёт возможность решать уравнения Лапласа в

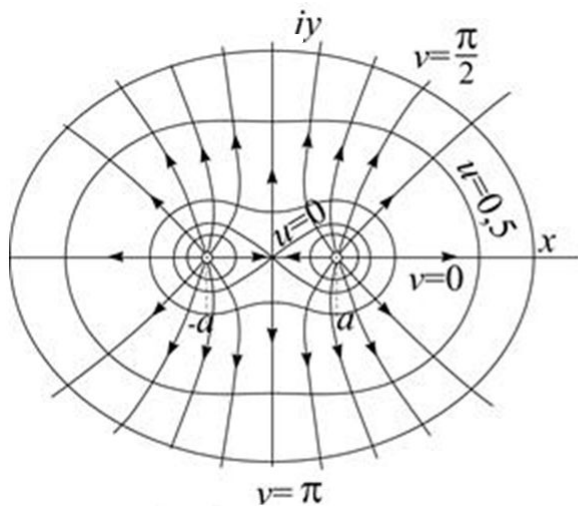
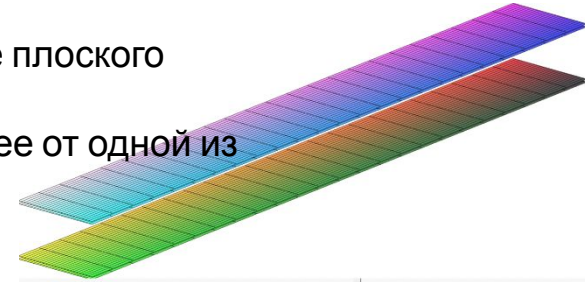
# Метод конформного отображения



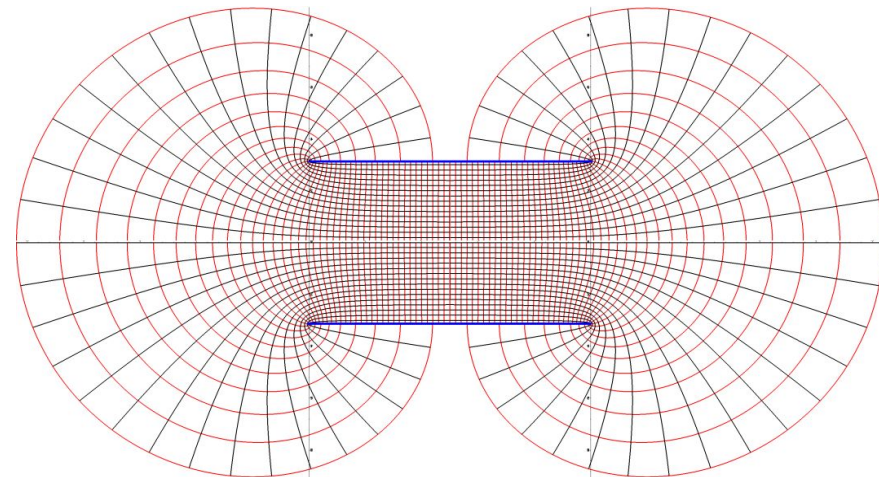
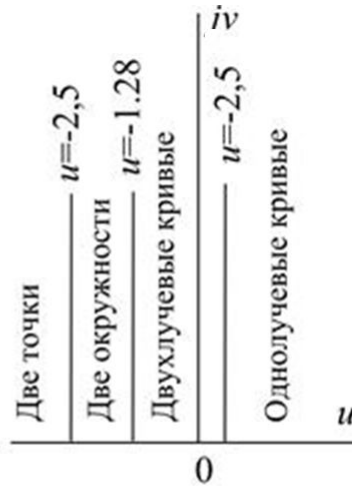
Преобразование радиального поля в однородное полем функцией  $z = e^w$



Мы находим поле плоского конденсатора, не зависящее от одной из координат



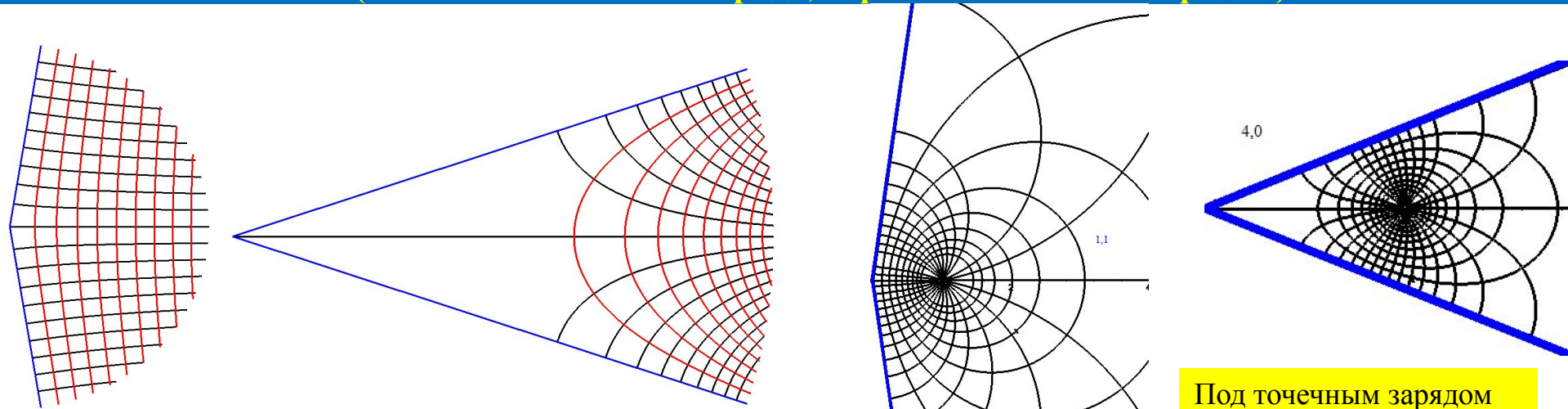
Преобразование поля провода, расщепленного на два элемента в однородное функцией  $z = a\sqrt{e^v+1}$





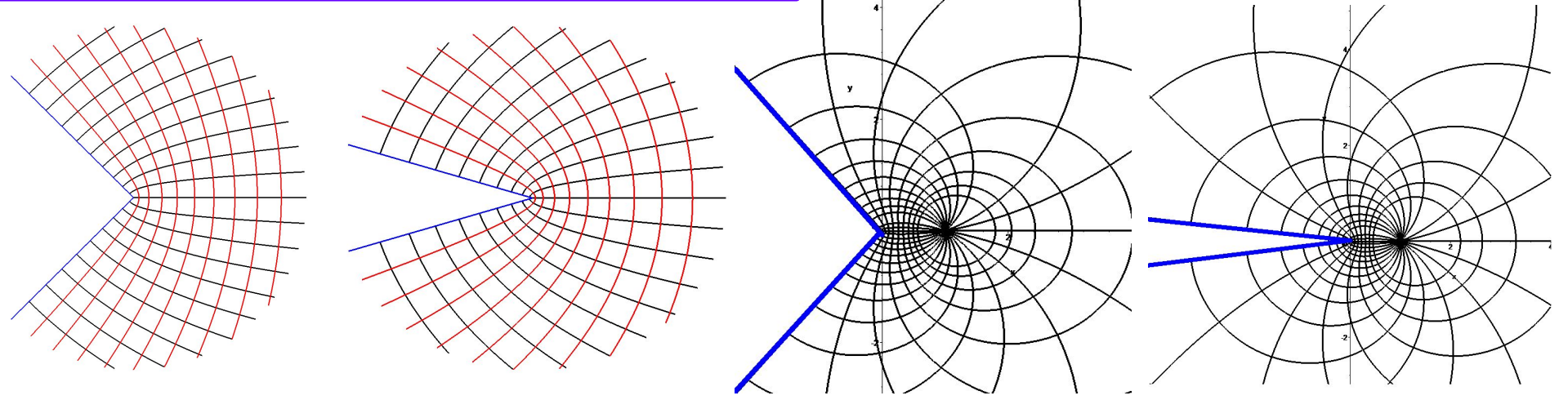
# Метод конформного отображения

Поле заряженного проводящего клина и угла получаются конформным степенным преобразованием поля плоскости (слева – без внешнего заряда, справа – с внешним зарядом)



Линии постоянной реальной части комплексного потенциала  $\text{Re } \phi$  – обычные эквипотенциали.  
Линии постоянной мнимой части  $\text{Im } \phi$  – силовые линии

Под точечным зарядом подразумевается равномерно заряженная нить параллельная оси клина





# Ёмкость конденсатора, состоящего из двух некоаксиальных цилиндров

Определить взаимную емкость единицы длины двух параллельных бесконечных цилиндрических проводников (радиусов  $a$  и  $b$ , расстояние между осями  $c$ ).

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц т.8. Электродинамика сплошных сред

Решение. Поле, создаваемое обоими цилиндрами, совпадает с полем, которое создавалось бы (в пространстве вне цилиндров) двумя заряженными нитями, проходящими через соответствующим образом подобранные точки  $A$  и  $A'$  (см. рис.). Нити несут (на единице длины) заряды  $\pm e$ , равные зарядам цилиндров, а точки  $A$  и  $A'$  должны быть расположены на линии  $OO'$  так, чтобы поверхности цилиндров совпадали с эквипотенциальными поверхностями.

Для этого расстояния  $OA$  и  $O'A'$  должны удовлетворять соотношениям

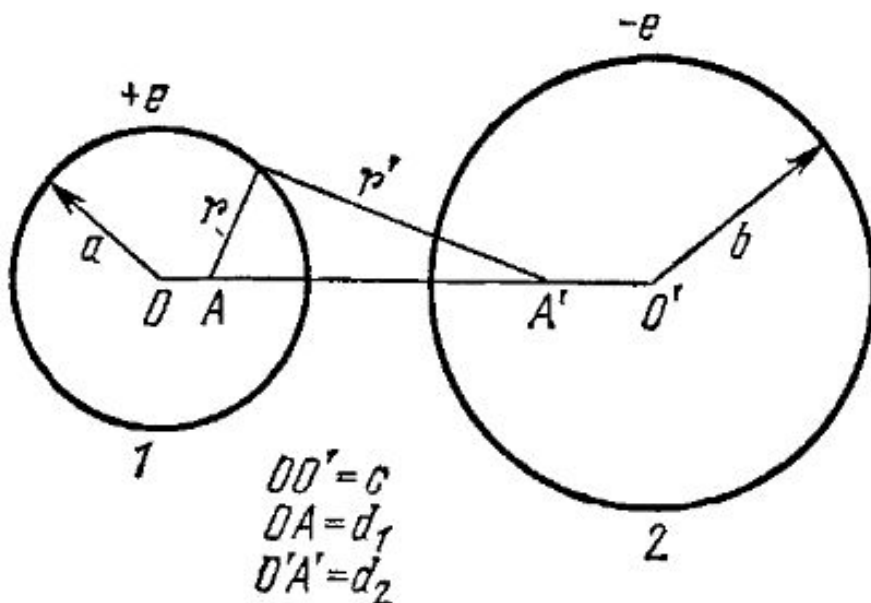
$$OA \cdot OA' = a^2, \quad O'A' \cdot O'A = b^2,$$

т. е.  $d_1(c - d_2) = a^2, \quad d_2(c - d_1) = b^2$ .

Тогда на каждой из окружностей отношение  $r'/r$  расстояний от точек  $A$  и  $A'$  постоянно: на окружности 1

$$\frac{r}{r'} = \frac{a}{OA'} = \frac{a}{c - d_2} = \frac{d_1}{a},$$

а на окружности 2  $r'/r = d_2/b$ . Соответственно, потенциалы цилиндров:



# Ёмкость конденсатора, состоящего из двух некоаксиальных цилиндров

$$\varphi_1 = -2e \ln \frac{r}{r'} = -2e \ln \frac{d_1}{a}, \quad \varphi_2 = 2e \ln \frac{d_2}{b}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 2e \ln \frac{d_1 d_2}{ab}.$$

Отсюда находим для искомой взаимной емкости  $C = e/(\varphi_2 - \varphi_1)$ :

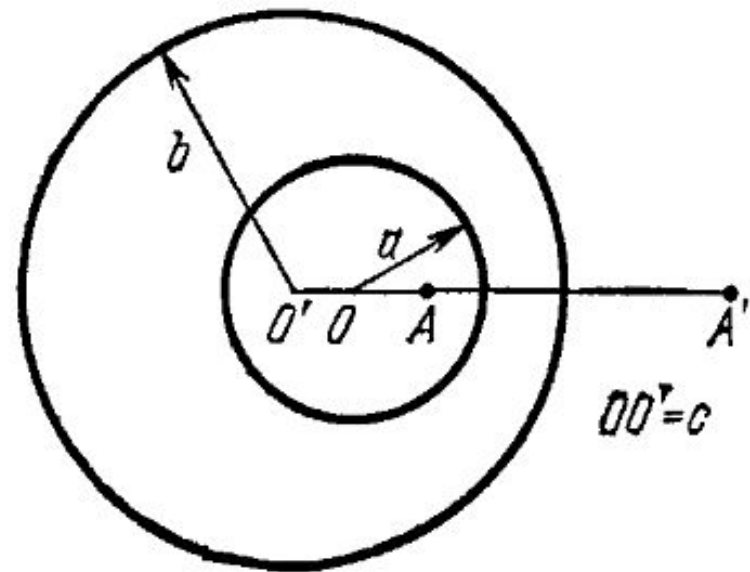
$$\frac{1}{C} = 2 \ln \frac{d_1 d_2}{ab} = 2 \operatorname{Arch} \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}.$$

В частности, для цилиндра радиуса  $a$ , находящегося на расстоянии  $h > a$  от проводящей плоскости, надо положить  $c = b + h$  и перейти к пределу  $b \rightarrow \infty$ ; это дает

$$\frac{1}{C} = 2 \operatorname{Arch} \frac{h}{a}.$$

Если два полых цилиндра находятся один внутри другого ( $c < b - a$ ), то поле снаружи отсутствует, а поле в пространстве между цилиндрами совпадает с полем, которое создавалось бы двумя нитями с зарядами  $+e$  и  $-e$ , проходящими через точки  $A$  и  $A'$ . Тем же способом получим результат:

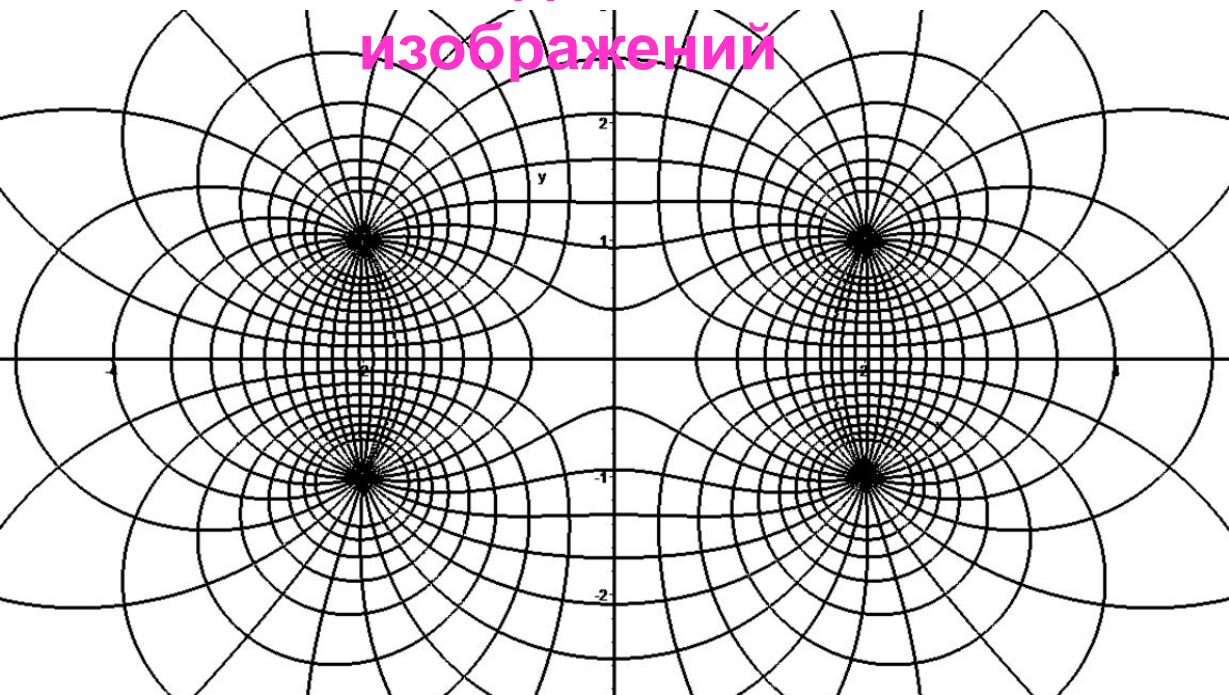
$$\frac{1}{C} = 2 \operatorname{Arch} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$



Аналогичная задача для двух сфер аналитически не

# Сравнение методов и некоторые точные результаты

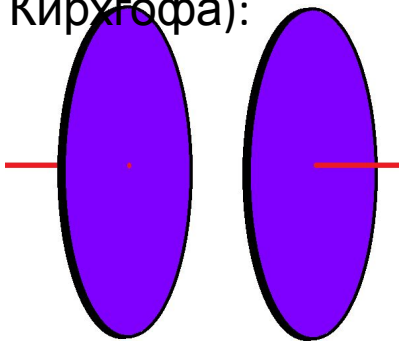
Метод  
изображений



Решение  
методом  
конформного  
отображения



Точное решение для ёмкости дискового плоского конденсатора (формула Кирхгофа):



$$C = \frac{R^2}{4d} + \frac{R}{4\pi} \left( \ln \frac{16\pi R}{d} - 1 \right)$$

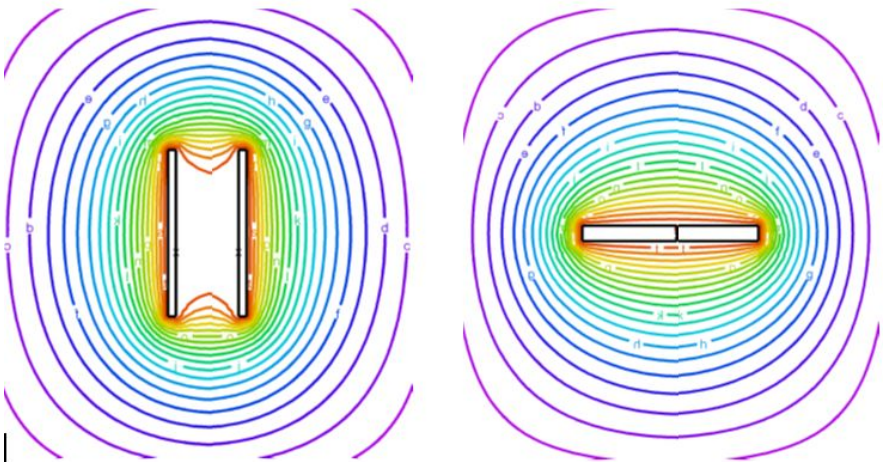
Второй член (вернее, коэффициент под логарифмом) в этой формуле зависит от

Эта формула приведена в системе единиц СГС. Для перевода в СИ надо умножить это выражение на  $4\pi\epsilon_0$  (в



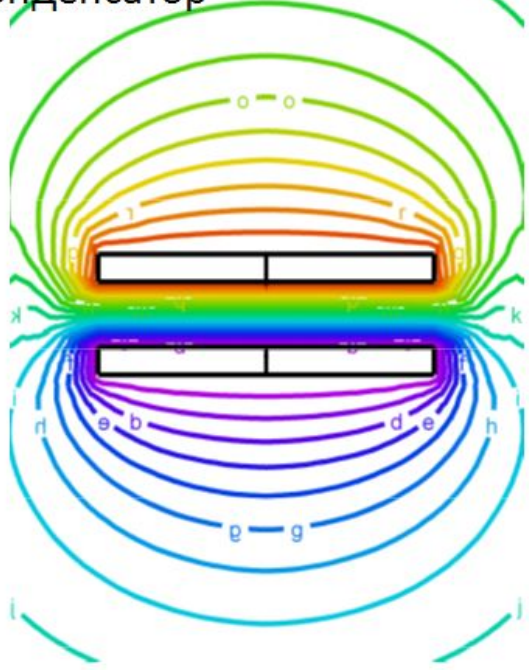
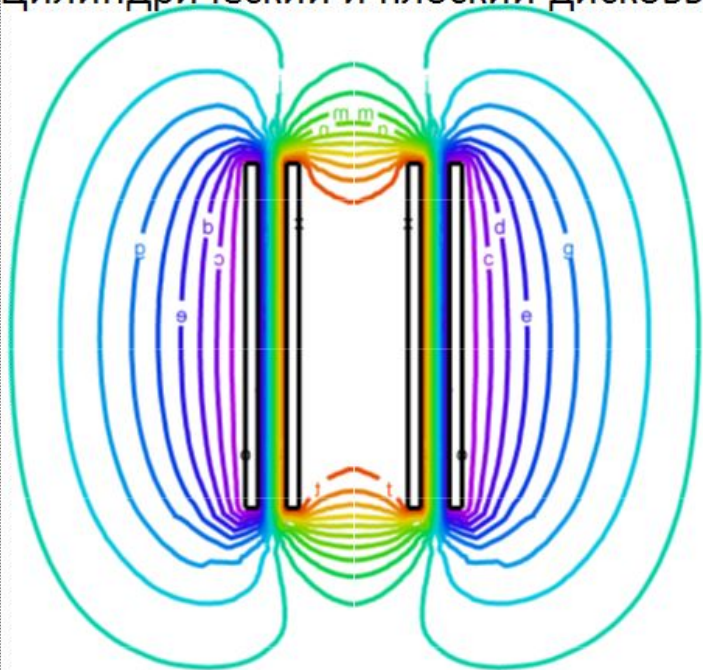
# Численные методы электростатики [8]

## Метод конечных элементов для численного расчёта



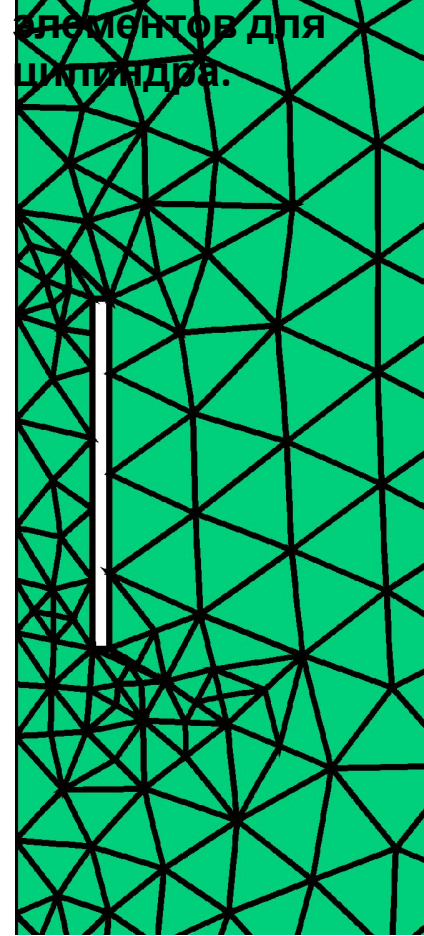
Поля цилиндра и диска. Метод находит эквипотенциалы (т. е. поверхности с фиксированн

Цилиндрический и плоский дисковый конденсатор



Один из возможных контуров конечных

элементов для цилиндра.

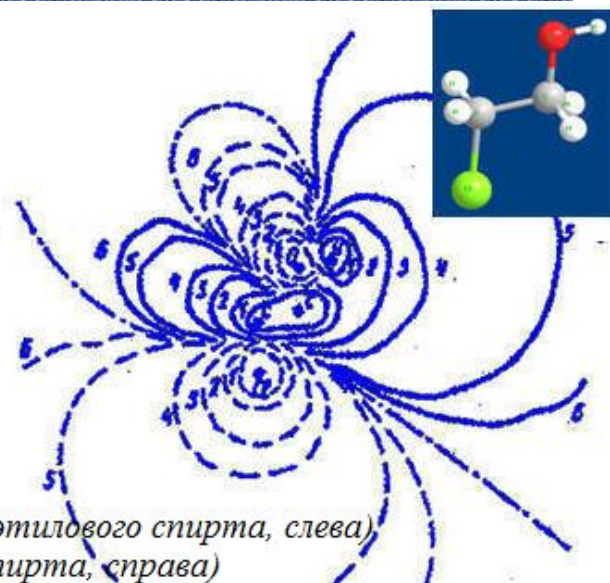
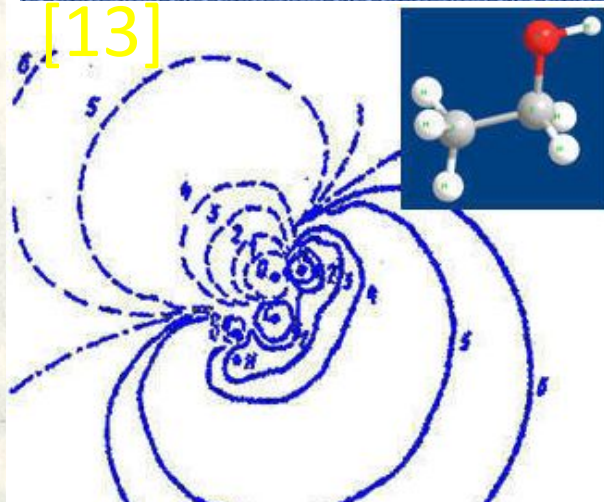
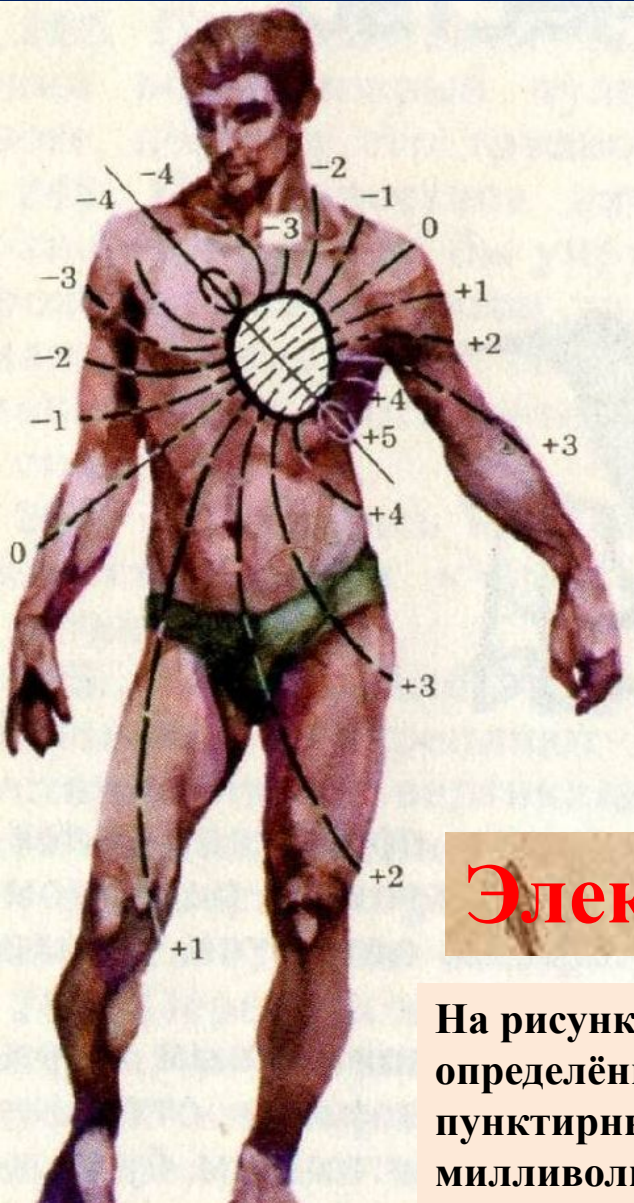




# Разные электрические поля

## Молекулярные поля

[13]



карта эквипотенциалей молекул  $C_2H_5OH$  (этилового спирта, слева) и  $C_2H_5ClOH$  (хлорзамещённого этилового спирта, справа)

## Электрическое поле человека<sup>[12]</sup>

На рисунке показан примерный ход эквипотенциалей в определённый момент возбуждения сердца. Цифры около пунктирных линий обозначают величину потенциала в милливольтгах

# Система единиц измерения СИ в электростатике и электродинамике

Физическая величина	Принятые обозначения	Единица измерения	Физическая величина	Принятые обозначения	Единица измерения
Сила тока	$I$	А	Диэлектрическая постоянная	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Заряд	$Q$	Кл = А·сек	Емкость	$C$	Ф = Кл/В
Дипольный момент	$d, p$	Кл·м	Сопротивление	$R$	Ом = В/А
Плотность заряда объемная	$\rho$	Кл/м <sup>3</sup>	Удельное сопротивление	$\rho$	Ом·м
---“ ---“--- поверхностная	$\sigma$	Кл/м <sup>2</sup>	Проводимость	$\sigma$	Сим = Ом <sup>-1</sup>
---“ ---“--- линейная	$q$	Кл/м	Плотность энергии поля	$w$	Дж/м <sup>3</sup>
Напряженность эл. поля	$E$	В/м	Мощность	$N, P$	Вт
Эл. смещение, поляризация	$D, P$	Кл/м <sup>2</sup>	Плотность тока	$j$	А/м <sup>2</sup>
Поток электрич. смещения.		Кл	Электрохимич. эквивалент	$k$	кг/Кл
Потенциал, напряжение	$\phi$	В = Дж/Кл	Постоянная Фарадея	$F$	96485 Кл/моль



# Литературные источники

1. Физическая энциклопедия в 5-ти томах. Под редакцией А.М. Прохорова. М, издательство «Советская энциклопедия», 1988 или Научное издательство «Большая Российская Энциклопедия» 1998.
2. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. «Теоретическая физика. т. VIII . Электродинамика сплошных сред». Издание второе, переработанное Лифшицем и Питаевским. М., «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1982.
3. Дж. Джексон (John David Jackson) «Классическая электродинамика». Перевод с англ. Г.В. Воскресенского и Л.С. Соловьёва. М., Мир, 1965.
4. Д.В. Сивухин «Общий курс физики. т.3. Электричество». 4-е издание, стереот., М., ФизМатЛит, изд-во МФТИ, 2004.
5. И.В. Савельев. Курс общей физики, т.2 «Электричество и магнетизм, волны, оптика». М., «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1988.
6. А.Н. Матвеев. Курс физики, т.3 «Электричество и магнетизм». М., «Высшая школа», 1983.
7. Под ред. Г.С. Ландсберга «Элементарный учебник физики»: Т.2. Электричество и магнетизм. – 12-е изд. – М.: Физматлит, 2001 – 480 с.
8. К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. «Теоретические основы электротехники» в 3-х томах. – СПб.: Питер, 2003.



## 9. Персоналия

[https://ru.wikipedia.org/wiki/Кулон,\\_Шарль\\_Огюстен\\_де](https://ru.wikipedia.org/wiki/Кулон,_Шарль_Огюстен_де)

[https://ru.wikipedia.org/wiki/Кавендиш,\\_Генри](https://ru.wikipedia.org/wiki/Кавендиш,_Генри)

[https://ru.wikipedia.org/wiki/Грин,\\_Джордж\\_\(математик\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Грин,_Джордж_(математик))

[https://ru.wikipedia.org/wiki/Пуассон,\\_Симеон\\_Дени](https://ru.wikipedia.org/wiki/Пуассон,_Симеон_Дени)

[https://ru.wikipedia.org/wiki/Рис,\\_Петер](https://ru.wikipedia.org/wiki/Рис,_Петер)

[https://ru.wikipedia.org/wiki/Фарадей,\\_Майкл](https://ru.wikipedia.org/wiki/Фарадей,_Майкл)

10. Опыты: <https://video.tochka.net/331232-klassnyy-prikol-s-sharikom-i-vodoy/>

11. Электромметр: <https://infourok.ru/material.html?mid=5255>

12. Электрическое поле человека:

<http://uhimik.ru/serdce--nasos-serdce--nasos/index.html>

13. Поле молекул: К.В. Шайтан, К.Б. Терёшкина «Молекулярная динамика белков и пептидов» Методическое пособие <http://www.moldyn.ru/library/manual/p4.htm>

# Приложение [5]

Продолжение

## 1. Единицы электрических и магнитных величин в СИ и в гауссовой системе

Электрическая постоянная

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi (2,997925)^2 \cdot 10^9} \text{ Ф/м} \approx \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ Ф/м.}$$

Магнитная постоянная

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м,}$$

Электродинамическая постоянная

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Соотношения между единицами даны приближенно. Чтобы получить более точные значения, нужно в соотношениях, приведенных в последнем столбце, заменить 3 на 2,997925 и 9 на  $(2,997925)^2$ .

Величины и их обозначения	Единицы и их обозначения		Соотношения между единицами
	СИ	Гауссова система	
Сила $F$	ньютон (Н)	дина (дин)	1 Н = $10^5$ дин
Работа $A$ и энергия $W$	джоуль (Дж)	эрг (эрг)	1 Дж = $10^7$ эрг
Заряд $q$	кулон (Кл)	СГСЭ-ед.	1 Кл = $= 3 \cdot 10^9$ СГСЭ-ед.
Напряженность электрического поля $E$	вольт на метр (В/м)	СГСЭ-ед.	1 СГСЭ-ед. = $= 3 \cdot 10^4$ В/м
Потенциал $\phi$ , напряжение $U$ и э.д.с. $\mathcal{E}$	вольт (В)	СГСЭ-ед.	1 СГСЭ-ед. = 300 В
Электрический дипольный момент $p$	Кл·м	СГСЭ-ед.	1 Кл·м = $= 3 \cdot 10^{11}$ СГСЭ-ед.
Поляризованность $P$	Кл/м <sup>2</sup>	СГСЭ-ед.	1 Кл/м <sup>2</sup> = $= 3 \cdot 10^5$ СГСЭ-ед.

Величины и их обозначения	Единицы и их обозначения		Соотношения между единицами
	СИ	Гауссова система	
Диэлектрическая восприимчивость $\kappa$	СИ-ед.	СГСЭ-ед.	1 СГСЭ-ед. = $= 4\pi$ СИ-ед.
Электрическое смещение (электрическая индукция) $D$	кулон на квадратный метр (Кл/м <sup>2</sup> )	СГСЭ-ед.	1 Кл/м <sup>2</sup> = $= 4\pi \cdot 3 \cdot 10^5$ СГСЭ-ед.
Поток электрического смещения (поток электрической индукции) $\Phi$	кулон (Кл)	СГСЭ-ед.	1 Кл = $= 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9$ СГСЭ-ед.
Электрическая емкость $C$	фарад (Ф)	сантиметр (см)	1 Ф = $9 \cdot 10^{11}$ см
Сила тока $I$	ампер (А)	СГСЭ-ед.	1 А = $= 3 \cdot 10^9$ СГСЭ-ед.
Плотность тока $j$	ампер на кв. метр (А/м <sup>2</sup> )	СГСЭ-ед.	1 А/м <sup>2</sup> = $= 3 \cdot 10^5$ СГСЭ-ед.
Электрическое сопротивление $R$	ом (Ом)	СГСЭ-ед.	1 СГСЭ-ед. = $= 9 \cdot 10^{11}$ Ом
Удельное сопротивление $\rho$	ом-метр (Ом·м)	СГСЭ-ед.	1 СГСЭ-ед. = $= 9 \cdot 10^9$ Ом·м
Удельная проводимость $\sigma$	сименс на метр (См/м)	СГСЭ-ед.	1 См/м = $= 9 \cdot 10^9$ СГСЭ-ед.
Магнитная индукция $B$	тесла (Тл)	гаусс (Гс)	1 Тл = $10^4$ Гс
Поток магнитной индукции $\Phi$ и потокоцепление $\Psi$	вебер (Вб)	максвелл (Мкс)	1 Вб = $10^8$ Мкс
Магнитный момент $p_m$	ампер-квадратный метр (А·м <sup>2</sup> )	СГСМ-ед.	1 А·м <sup>2</sup> = $= 10^3$ СГСМ-ед.
Намагниченность $J$	ампер на метр (А/м)	СГСМ-ед.	1 СГСМ-ед. = $= 10^3$ А/м
Напряженность магнитного поля $H$	ампер на метр (А/м)	эрстед (Э)	1 А/м = $4\pi \cdot 10^{-3}$ Э 1 Э = 79,6 А/м
Магнитная восприимчивость $\chi$	СИ-ед.	СГСМ-ед.	1 СГСМ-ед. = $= 4\pi$ СИ-ед.
Индуктивность $L$ и взаимная индуктивность $L_{12}$	генри (Гн)	сантиметр (см)	1 Гн = $10^9$ см



## II Основные формулы электромагнетизма в СИ и в гауссовой системе

Продолжение

Наименование	СИ	Гауссова система	Наименование	СИ	Гауссова система
Закон Кулона	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$	$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$	Поляризованность (определение)		$P = \frac{\sum p}{\Delta V}$
Напряженность электрического поля (определение)		$E = \frac{F}{q}$	Связь между P и E	$P = \kappa\epsilon_0 E$	$P = \kappa E$
Напряженность поля точечного заряда	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{er^2}$	$E = \frac{q}{er^2}$	Связь между P и объемной плотностью связанных зарядов		$\rho' = -\nabla P$
Напряженность поля между заряженными плоскостями и вблизи поверхности заряженного проводника	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$	$E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$	Связь между P и поверхностной плотностью связанных зарядов		$\sigma' = P_n$
Потенциал (определение)		$\psi = \frac{W_p}{q}$	Электрическое смещение (электрическая индукция) (определение)	$D = \epsilon_0 E + P$	$D = E + 4\pi P$
Потенциал поля точечного заряда	$\psi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{er}$	$\psi = \frac{q}{er}$	Дивергенция вектора D	$\nabla D = \rho$	$\nabla D = 4\pi\rho$
Работа сил поля над зарядом		$A = q(\psi_1 - \psi_2)$	Теорема Гаусса для D	$\oint D dS = \sum q$	$\oint D dS = 4\pi \sum q$
Связь между E и $\psi$		$E = -\nabla\psi$	Связь между диэлектрической проницаемостью $\epsilon$ и диэлектрической восприимчивостью $\kappa$	$\epsilon = 1 + \kappa$	$\epsilon = 1 + 4\pi\kappa$
Связь между $\psi$ и E		$\psi_1 - \psi_2 = \int_1^2 E dl$	Связь между значениями $\kappa$ в СИ и в гауссовой системе		$\kappa_{СИ} = 4\pi\kappa_{ГС}$
Ротор вектора E для электростатического поля		$[\nabla E] = 0$	Связь между D и E	$D = \epsilon\epsilon_0 E$	$D = \epsilon E$
Циркуляция вектора E для электростатического поля		$\oint E dl = 0$	Связь между D и E в вакууме	$D = \epsilon_0 E$	$D = E$
Электрический момент диполя		$p = ql$	D поля точечного заряда	$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$	$D = \frac{q}{r^2}$
Механический момент, действующий на диполь в электрическом поле		$N =  pE $	Емкость конденсатора (определение)		$C = \frac{q}{U}$
Энергия диполя в электрическом поле		$W = -pE$	Емкость плоского конденсатора	$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$	$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$
Дипольный момент «унругой» молекулы	$p = \beta\epsilon_0 E$	$p = \beta E$	Энергия системы зарядов		$W = \frac{1}{2} \sum q\phi$
			Энергия заряженного конденсатора		$W = \frac{CU^2}{2}$

Наименование	СИ	Гауссова система
Плотность энергии электрического поля	$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}$	$w = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}$
Сила тока (определение)	$I = \frac{dq}{dt}$	
Плотность тока (определение)	$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}$	
Уравнение непрерывности	$\nabla j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	
Напряжение (определение)	$U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$	
Закон Ома	$I = \frac{1}{R} U$	
Закон Ома в дифференциальной форме	$j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E$	
Закон Джоуля — Ленца	$Q = \int_0^t RI^2 dt$	
Закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме	$Q_{уд} = \rho j^2$	
Сила взаимодействия двух параллельных токов в вакууме (в расчете на единицу длины)	$F = \frac{\mu_0 2I_1 I_2}{4\pi b}$	$F = \frac{1}{c^2} \frac{2I_1 I_2}{b}$
Поле свободно движущегося заряда	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q [\mathbf{vr}]}{4\pi r^3}$	$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{q [\mathbf{vr}]}{r^3}$
Закон Био — Савара	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{4\pi r^3}$	$d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}$
Сила Лоренца	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{vB}]$	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{vB}]$
Закон Ампера	$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$	$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$
Магнитный момент контура с током	$p_m = IS$	$p_m = \frac{1}{c} IS$

Наименование	СИ	Гауссова система
Механический момент, действующий на магнитный момент в магнитном поле		$\mathbf{N} = [p_m \mathbf{B}]$
«Механическая» энергия магнитного момента в магнитном поле		$W = -p_m \mathbf{B}$
Дивергенция вектора $\mathbf{B}$		$\nabla \mathbf{B} = 0$
Теорема Гаусса для $\mathbf{B}$		$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$
Намагниченность (определение)		$\mathbf{J} = \frac{\sum p_m}{\Delta V}$
Напряженность магнитного поля (определение)	$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{J}$	$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{J}$
Связь между $\mathbf{J}$ и $\mathbf{H}$		$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}$
Связь между магнитной проницаемостью $\mu$ и магнитной восприимчивостью $\chi$	$\mu = 1 + \chi$	$\mu = 1 + 4\pi \chi$
Связь между значениями $\chi$ в СИ и в гауссовой системе		$\chi_{СИ} = 4\pi \chi_{ГС}$
Связь между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
Связь между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в вакууме	$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mathbf{H}$
Ротор вектора $\mathbf{H}$ в случае стационарного поля	$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{J}$	$[\nabla \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$
Циркуляция вектора $\mathbf{H}$ в случае стационарного поля	$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum I$	$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \sum I$
Напряженность магнитного поля прямого тока	$H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{b}$	$H = \frac{1}{c} \frac{2I}{b}$
Напряженность магнитного поля в центре кругового тока	$H = \frac{I}{2R}$	$H = \frac{1}{c} \frac{2\pi I}{R}$

Наименование	СИ	Гауссова система
Напряженность поля соленоида	$H = nI$	$H = \frac{4\pi}{c} nI$
Поток магнитной индукции (определение)	$\Phi = \int_S \mathbf{B} dS$	
Работа, совершаемая над контуром с током при перемещении его в магнитном поле	$A = I \Delta\Phi$	$A = \frac{1}{c} I \Delta\Phi$
Потокоцепление, или полный магнитный поток (определение)	$\Psi = \sum \Phi$	
Э.д.с. индукции	$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}$	$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c} \frac{d\Psi}{dt}$
Индуктивность (определение)	$L = \frac{\Psi}{I}$	$L = c \frac{\Psi}{I}$
Индуктивность соленоида	$L = \mu_0 \mu n^2 l S$	$L = 4\pi \mu n^2 l S$
Э.д.с. самоиндукции (в отсутствие ферромагнетиков)	$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$	$\mathcal{E}_s = -\frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt}$
Энергия магнитного поля тока	$W = \frac{LI^2}{2}$	$W = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2}$
Плотность энергии магнитного поля	$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$	$w = \frac{\mu H^2}{8\pi}$
Энергия связанных контуров с током	$W = \frac{1}{2} \sum L_{ik} I_i I_k$	$W = \frac{1}{2c^2} \sum L_{ik} I_i I_k$
Плотность тока смещения	$i_{cm} = \dot{\mathbf{D}}$	$i_{cm} = \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}}$
Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	$ \nabla \mathbf{E}  = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{B} = 0$ $ \nabla \mathbf{H}  = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{D} = \rho$	$ \nabla \mathbf{E}  = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{B} = 0$ $ \nabla \mathbf{H}  = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{D} = 4\pi \rho$

Наименование	СИ	Гауссова система
Уравнения Максвелла в интегральной форме	$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dS$ $\oint_S \mathbf{B} dS = 0$ $\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} dS + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dS$ $\oint_S \mathbf{D} dS = \int_V \rho dV$	$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dS$ $\oint_S \mathbf{B} dS = 0$ $\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} dS + \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dS$ $\oint_S \mathbf{D} dS = 4\pi \int_V \rho dV$
Скорость электромагнитных волн	$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$	
Соотношение между амплитудами векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в электромагнитной волне	$E_m \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H_m \sqrt{\mu_0 \mu}$	$E_m \sqrt{\epsilon} = H_m \sqrt{\mu}$
Вектор Пойтинга	$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$	$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$
Плотность импульса электромагнитного поля	$\mathbf{K} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$	$\mathbf{K} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$