ЕГЭ-2018

Решение задач части 2 с развернутым ответом

с использованием пособия «Я сдам ЕГЭ. Физика»

В.А.Грибов

Федеральная комиссия разработчиков ЕГЭ по физике, ФИПИ,
Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва

1.4.8. **Закон изменения и сохранения механической энергии.** В ИСО изменение кинетической энергии $\Delta E_{\text{кин}}$ системы материальных точек равно работе A всех сил, приложенных ко всем телам системы: $\Delta E_{\text{кин}} = A$. Каждую силу из числа действующих на тела системы, относим либо к потенциальным, либо к непотенциальным. Тогда

$$A = A_{\text{всех потенц.сил}} + A_{\text{всех непотенц.сил}}$$

Работу потенциальных сил представим через изменение потенциальной энергии системы материальных точек:

$$A_{\text{всех потенц.сил}} = -\Delta E_{\text{потенц.}}.$$

Учтём, что механическая энергия системы тел $E_{\text{мех}} = E_{\text{кин}} + E_{\text{потенц}}$. Тогда

$$\Delta E_{\text{мех}} = \Delta E_{\text{кин}} + \Delta E_{\text{потенц}} = A - A_{\text{всех потенц.сил}} = A_{\text{всех непотенц.сил}}.$$

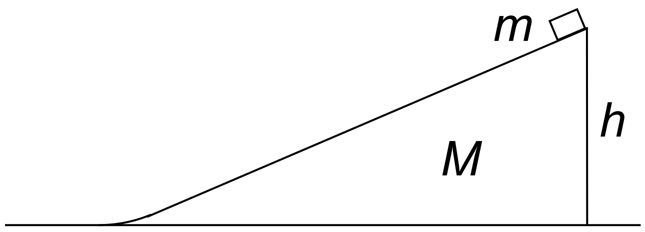
Таким образом, в ИСО для системы материальных точек (системы тел) изменение механической энергии равно работе всех непотенциальных сил, как внутренних, так и внешних:

в ИСО $\Delta E_{\text{мех}} = A_{\text{всех непотенц.сил}}$.

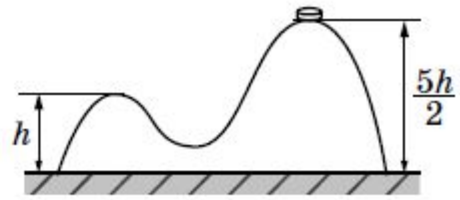
Поэтому в ИСО механическая энергия системы материальных точек (системы тел) сохраняется, если работа всех непотенциальных сил, как внутренних, так и внешних, равна нулю:

в ИСО $\Delta E_{\text{мех}} = 0$, если $A_{\text{всех непотенц. сил}} = 0$

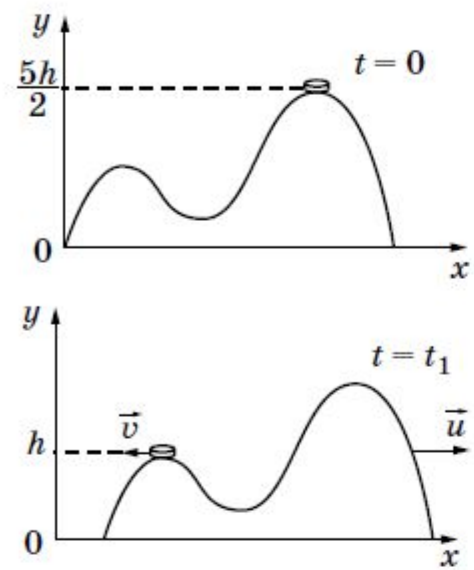
На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится клин массой *M*. На клин на высоте *h* положили маленькую шайбу массой *m* и отпустили из состояния покоя. Трение между клином и шайбой отсутствует. Найдите скорость шайбы после того, как она съедет с клина.



На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится горка с двумя вершинами, высоты которых h и $\frac{5}{2}h$ (см. рисунок). На правой вершине горки находится шайба. От незначительного толчка шайба и горка приходят в движение, причём шайба движется влево, не отрываясь от гладкой поверхности горки, а поступательно движущаяся горка не отрывается от стола. Скорость шайбы на левой вершине горки оказалась равной v. Найдите отношение масс шайбы и горки.



Образец возможного решения:



На систему тел «шайба + горка» действуют внешние силы (тяжести и реакции стола), направленные по вертикали, поэтому проекция импульса системы на горизонтальную ось Ox системы отсчёта, связанной со столом, сохраняется.

В начальный момент $p_x(0) = 0$, а в момент t_1 $p_x(1) = Mu - mv$. Из закона сохранения импульса $p_x(0) = p_x(1)$ получим: $Mu - mv = 0$, где m — масса шайбы, M — масса горки.

Работа сил тяжести определяется изменением потенциальной энергии, а суммарная работа сил реакции равна нулю, так как поверхности гладкие.

Следовательно, полная механическая энергия системы тел, равная сумме кинетической и потенциальной, сохраняется. Так как потенциальная энергия горки не изменилась, получаем уравнение

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + mgh = \frac{5}{2}mgh.$$

Решение системы даёт отношение масс $\frac{m}{M} = \frac{3gh}{v^2} - 1$.

Ответ: $\frac{m}{M} = \frac{3gh}{v^2} - 1$.

Снаряд массой $2m$ разрывается в полёте на две равные части, одна из которых продолжает движение по направлению движения снаряда, а другая — в противоположную сторону. В момент разрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличивается за счёт энергии взрыва на величину ΔE. Модуль скорости осколка, движущегося по направлению движения снаряда, равен v_1, а модуль скорости второго осколка равен v_2. Найдите ΔE.

Образец возможного решения:

Введём обозначение: v_0 — модуль скорости снаряда до разрыва.

Система уравнений для решения задачи:

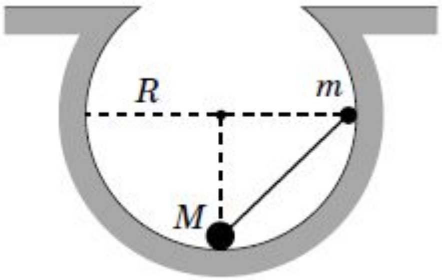
$$\begin{cases} 2mv_0 = mv_1 - mv_2; \\ mv_0^2 + \Delta E = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{mv_2^2}{2}. \end{cases}$$

Выразим v_0 из первого уравнения: $v_0 = \dfrac{v_1 - v_2}{2}$ — и подставим во второе уравнение.

Получим: $\dfrac{4\Delta E}{m} = (v_1 + v_2)^2$. Отсюда следует: $\Delta E = \dfrac{m}{4}(v_1 + v_2)^2$.

Ответ: $\Delta E = \dfrac{m}{4}(v_1 + v_2)^2$.

Небольшие шарики, массы которых $m = 30$ г и $M = 60$ г, соединены лёгким стержнем и помещены в гладкую сферическую выемку. В начальный момент шарики удерживаются в положении, изображённом на рисунке. Когда их отпустили без толчка, шарики стали скользить по поверхности выемки. Максимальная высота подъёма шарика массой M относительно нижней точки выемки оказалась равной 12 см. Каков радиус выемки R?



Образец возможного решения:

Полная механическая энергия системы, равная сумме кинетической и потенциальной энергии, сохраняется, так как выемка гладкая и работа сил реакции стенок, в любой момент времени перпендикулярных скоростям шариков, равна нулю:

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \text{const}.$$

В начальный момент и момент подъёма на максимальную высоту H кинетическая энергия системы равна нулю, поэтому её потенциальная энергия в эти моменты времени одинакова:

$$E_{\text{пот}}^{\text{нач}} = E_{\text{пот}}^{\text{конечн}}.$$

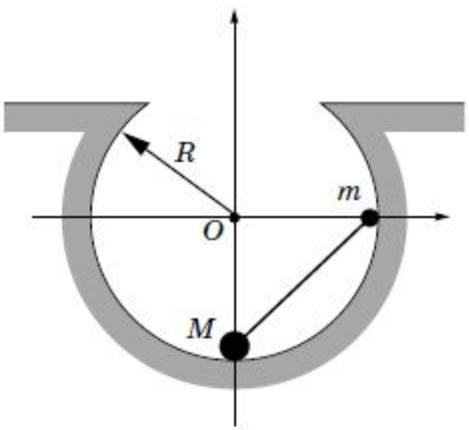


Рис. 1

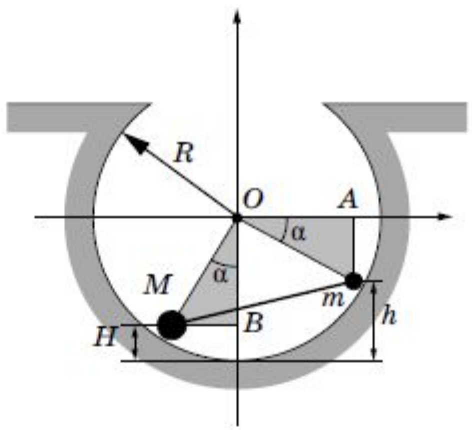


Рис. 2

Начальное положение системы изображено на рис. 1, а конечное — на рис. 2.

Если отсчитывать потенциальную энергию от нижней точки выемки, то начальная потенциальная энергия системы $E_{\text{пот}}^{\text{нач}} = mgR$, а её конечная потенциальная энергия $E_{\text{пот}}^{\text{конечн}} = mgh + MgH$. Закон сохранения энергии приводит к уравнению

$$mgR = mgh + MgH,$$

из которого следует, что $(R - h) = \frac{M}{m}H$.

При движении гантели по поверхности выемки высота подъёма большого и малого грузов связаны. Заметим, что в прямоугольных треугольниках OmA и OMB $MB = mA = R - h$, $OA = OB = R - H$, $OM = Om = R$, и воспользуемся теоремой Пифагора: $(R-h)^2 = R^2 - (OA)^2 = R^2 - (R-H)^2$.

Отсюда следует: $(R-h)^2 = H(2R - H)$.

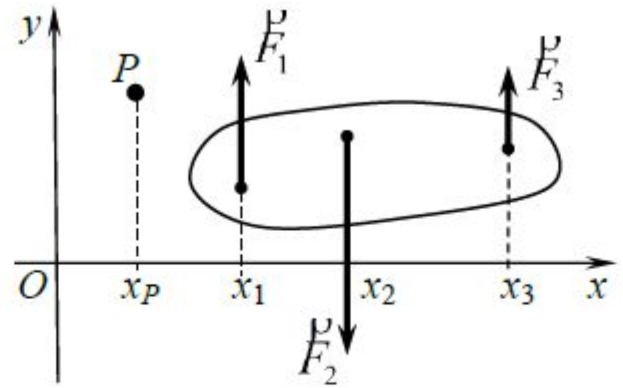
Подставим сюда выражение $(R-h) = \frac{M}{m}H$, полученное из закона сохранения энергии, и получим: $\left(\frac{M}{m}\right)^2 H = 2R - H$; $R = \frac{H}{2}\left[1 + \left(\frac{M}{m}\right)^2\right]$.

Подставляя сюда значения физических величин, получим: $R = 6(1+4) = 30$ см.

Ответ: $R = 30$ см.

Теорема. Если сумма сил равна нулю, то сумма их моментов относительно двух параллельных друг другу осей одна и та же.

В случае сил произвольного направления каждую силу можно представить в виде суммы составляющих, каждая из которых параллельна одной из координатных осей. Поэтому рассмотрим случай трех параллельных сил.



Пусть на тело действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, параллельные оси Oy, причем $F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}=0$. Через точку P проведем ось перпендикулярно плоскости рисунка. Сумма моментов сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ относительно этой оси

$$\begin{aligned}M_P &= F_1(x_1-x_P)-F_2(x_2-x_P)+F_3(x_3-x_P)=\\ &= F_{1y}(x_1-x_P)+F_{2y}(x_2-x_P)+F_{3y}(x_3-x_P)=\\ &= F_{1y}x_1+F_{2y}x_2+F_{3y}x_3-x_P(F_{1y}+F_{2y}+F_{3y})=\\ &= F_{1y}x_1+F_{2y}x_2+F_{3y}x_3=M_O.\end{aligned}$$

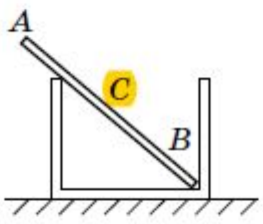
Таким образом, сумма моментов сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости xOy через точку P, равна сумме их моментов относительно параллельной оси, проходящей через начало координат, то есть не зависит от выбора точки P. Теорема доказана.

Мы получили право применять правило моментов не относительно реальной оси вращения (часто очевидно только её направление, но не положение), а относительно любой параллельной ей оси. Но всё это возможно, только если сумма приложенных к телу сил равна нулю.

Пример задачи, где эта теорема работает.

Вопрос 1 (здесь эта теорема не нужна).

Однородный массивный стержень AB покоится, упираясь в стык дна и стенки банки концом B и опираясь на край банки в точке C (см. рисунок). Модуль силы, с которой стержень давит на стенку сосуда в точке C, равен 0,5 Н. Вертикальная составляющая силы, с которой стержень давит на сосуд в точке B, равна по модулю 0,6 Н, а её горизонтальная составляющая равна по модулю 0,3 Н. Чему равна сила тяжести, действующая на стержень? Трением пренебречь.



Вопрос 2 (здесь эта теорема очень помогает).
Какая доля стержня находится внутри сосуда?

Насыщенные и ненасыщенные водяные пары. Относительная влажность.

Давление влажного воздуха в сосуде под поршнем при температуре t = 100°С равно $p_1 = 1{,}8 \cdot 10^5$ Па. Объём под поршнем изотермически уменьшили в k = 4 раза. При этом давление в сосуде увеличилось в n = 3 раза. Найдите относительную влажность φ воздуха в первоначальном состоянии. Утечкой вещества из сосуда пренебречь.

Водяной пар и сухой воздух описываем моделью идеального газа.

В термодинамике модель одноатомного идеального газа выглядит так: $\begin{cases} pV = \nu RT \\ U = \frac{3}{2}\nu RT \end{cases}$

Модель идеального газа в МКТ:
частицы газа не взаимодействуют друг с другом.

В данной задаче достаточно использовать закон Дальтона и знать, что при t = 100°C давление насыщенного водяного пара равно 10^5 Па.

1. При t = 100 °C давление насыщенного водяного пара равно нормальному атмосферному давлению: $p_0 = 10^5$ Па.

2. При изотермическом сжатии произведение pV для влажного воздуха под поршнем уменьшилось, так как $n < k$. Значит, количество вещества влажного воздуха в сосуде уменьшилось за счёт конденсации части водяного пара в воду. При этом водяной пар стал насыщенным.

3. Пусть p_2 – давление влажного воздуха в сосуде в конечном состоянии, $p_{1\ сух}$ – давление сухого воздуха в сосуде в начальном состоянии.
Пользуясь законом Дальтона, запишем выражения для давления влажного воздуха в сосуде в начальном и конечном состояниях:

$$\begin{cases} p_1 = p_{1\,сух} + \varphi p_0, \\ p_2 = np_1 = kp_{1\,сух} + p_0. \end{cases}$$

4. Исключая из этих уравнений величину $p_{1\ сух}$, получим уравнение

$$np_1 = k\left(p_1 - \varphi p_0\right) + p_0$$

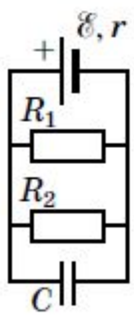
откуда:

$$\varphi = \frac{(k-n)p_1 + p_0}{kp_0} = \frac{(4-3)\cdot 1{,}8\cdot 10^5 + 10^5}{4\cdot 10^5} = \frac{2{,}8}{4} = 0{,}7$$

Ответ: φ = 70%

Конденсатор в цепи постоянного тока

Источник постоянного тока с внутренним сопротивлением $r = 0{,}4$ Ом подсоединён к параллельно соединённым резисторам $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 2$ Ом и конденсатору ёмкости $C = 5$ мкФ. Определите ЭДС источника $\mathcal{E}$, если энергия электрического поля конденсатора $W = 10$ мкДж.



Образец возможного решения:

1. Конденсатор заряжен, поэтому ток через него не течёт. Согласно закону Ома для замкнутой цепи через источник течёт ток $I = \dfrac{\mathcal{E}}{r + R_0}$, где $R_0 = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ — сопротивление внешней цепи (параллельно соединённых резисторов R_1 и R_2).

2. Так как конденсатор подключён параллельно резисторам R_1 и R_2, то напряжение на конденсаторе

$$U = IR_0 = \frac{\mathcal{E} R_0}{r + R_0} = \frac{\mathcal{E} R_1 R_2}{r(R_1 + R_2) + R_1 R_2}.$$

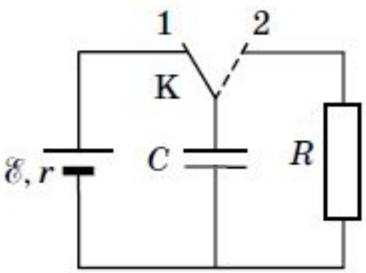
3. Определим энергию электрического поля конденсатора:

$W = \dfrac{CU^2}{2} = \dfrac{C}{2}\left(\dfrac{\mathcal{E} R_1 R_2}{r(R_1 + R_2) + R_1 R_2}\right)^2$, откуда найдём ЭДС источника:

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{2W}{C}} \cdot \frac{r(R_1 + R_2) + R_1 R_2}{R_1 R_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^{-6}}} \cdot \frac{0{,}4 \cdot 12 + 20}{20} = 2{,}48 \text{ В.}$$

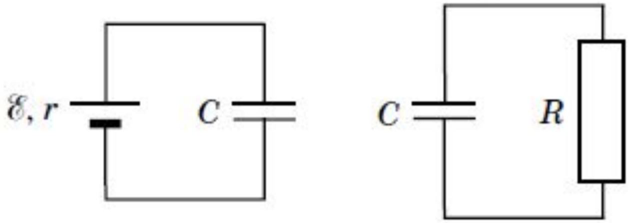
Ответ: $\mathcal{E} = 2{,}48$ В.

В схеме, показанной на рисунке, ключ К долгое время находился в положении 1. В момент $t_0 = 0$ ключ перевели в положение 2. К моменту $t > 0$ на резисторе R выделилось количество теплоты $Q = 25$ мкДж. Сила тока в цепи в этот момент равна $I = 0{,}1$ мА. Чему равно сопротивление резистора R? ЭДС батареи $\mathcal{E} = 15$ В, её внутреннее сопротивление $r = 30$ Ом, ёмкость конденсатора $C = 0{,}4$ мкФ. Потерями на электромагнитное излучение пренебречь.



Образец возможного решения:

1. К моменту $t_0 = 0$ конденсатор полностью заряжен, ток в левой части схемы (см. рисунок слева) равен нулю, поэтому напряжение между обкладками конденсатора равно ЭДС $\mathscr{E}$, энергия конденсатора $W_0 = \dfrac{C\mathscr{E}^2}{2}$.



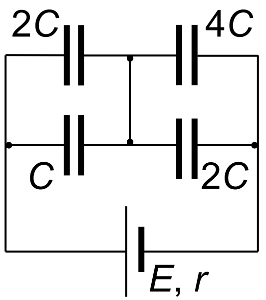
2. В момент $t > 0$ напряжение на конденсаторе U равно напряжению IR на резисторе в правой части схемы (см. рисунок справа). Энергия конденсатора в этот момент

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{C(IR)^2}{2}.$$

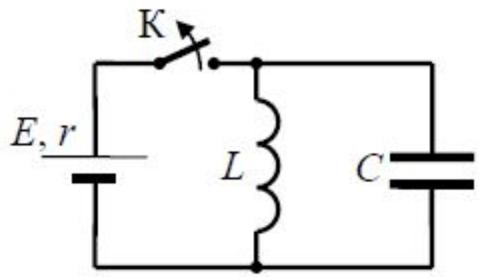
3. Пренебрегая потерями на излучение, получаем баланс энергии: $W_0 = W + Q$, или $\dfrac{C\mathscr{E}^2}{2} = \dfrac{C(IR)^2}{2} + Q$, откуда $R = \dfrac{1}{I}\sqrt{\mathscr{E}^2 - \dfrac{2Q}{C}} = 100$ кОм.

Ответ: $R = 100$ кОм.

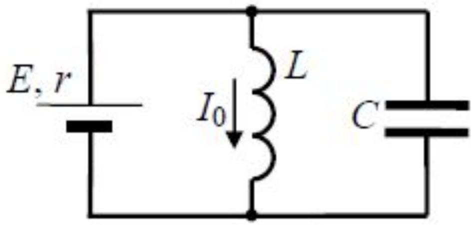
Во сколько раз изменится энергия конденсатора *C*, если конденсатор 4*C* будет «пробит»?



В электрической цепи, показанной на рисунке, ключ К длительное время замкнут, $\mathcal{E} = 6$ В, $r = 2$ Ом, $L = 1$ мГн, $C = 160$ мкФ. В момент $t = 0$ ключ К размыкают. Какова сила тока I в контуре в момент, когда в ходе возникших в контуре электромагнитных колебаний напряжение на конденсаторе равно ЭДС источника? Сопротивлением проводов и активным сопротивлением катушки индуктивности пренебречь.



1. Непосредственно перед размыканием ключа К ток через конденсатор равен нулю, по катушке течет ток $I_0 = \frac{E}{r}$, напряжение U_{0C} на конденсаторе равно напряжению на катушке, поэтому $U_{0C} = 0$.



2. После размыкания ключа К в контуре возникают гармонические электромагнитные колебания. Энергия электромагнитных колебаний в контуре сохраняется:

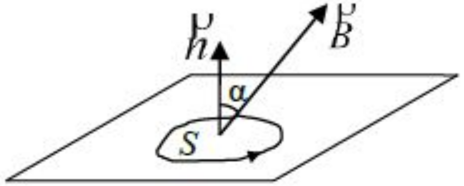
$\frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}$, откуда получаем $I = \sqrt{I_0^2 - \frac{C}{L}U^2}$.

Учитывая, что $U = E$, $I_0 = \frac{E}{r}$, получим:

$$I = E\sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{C}{L}} = 6\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{0{,}16 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}}} = 1{,}8\ \text{А}.$$

Ответ: $I = 1{,}8$ А

3.4.1. Выберем на плоскости площадку S. Её граница представляет собой замкнутую кривую. На кривой выберем положительное направление обхода. По правилу правого буравчика, вращая его рукоятку в этом направлении, выберем одно из двух возможных направлений нормали $\vec{n}$ к площадке (см. рисунок). Пусть вектор $\vec{B}$ индукции однородного магнитного поля образует с нормалью $\vec{n}$ угол α. Тогда **поток вектора магнитной индукции** (магнитный поток) через площадку S равен



$$\Phi = B_n S = BS\cos\alpha .$$

3.4.3. **Закон электромагнитной индукции Фарадея**: если магнитный поток Ф через площадку S меняется с течением времени, то в контуре, ограничивающем площадку, существует ЭДС индукции

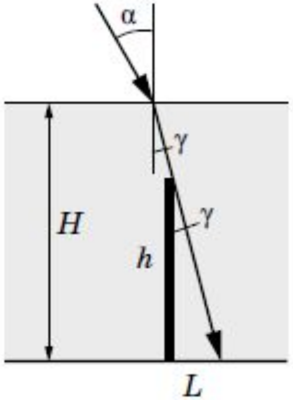
$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\bigg|_{\Delta t\to 0} = -\Phi'_t .$$

Что значит знак «минус» в законе электромагнитной индукции Фарадея?

Геометрическая оптика

В горизонтальное дно водоёма глубиной 3 м вертикально вбита свая, полностью скрытая под водой. При угле падения солнечных лучей на поверхность воды, равном 30°, свая отбрасывает на дно водоёма тень длиной 0,8 м. Определите высоту сваи. Показатель преломления воды $n = \frac{4}{3}$.

Образец возможного решения:



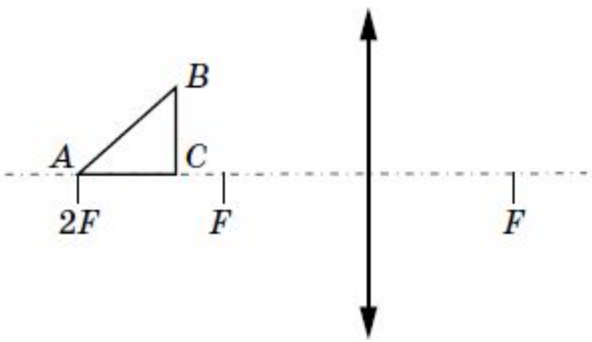
Согласно рисунку длина тени L определяется высотой сваи h и углом γ между сваей и скользящим по её вершине лучом света: $L = h \cdot \mathrm{tg}\gamma$. Этот угол является и углом преломления солнечных лучей на поверхности воды. Согласно закону преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n,\ \sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{1}{2n},\ \ \mathrm{tg}\gamma = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}.$$

Следовательно, $L = h\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}$, а высота сваи $h = L\sqrt{4n^2-1}$.

Ответ: $h \approx 2$ м.

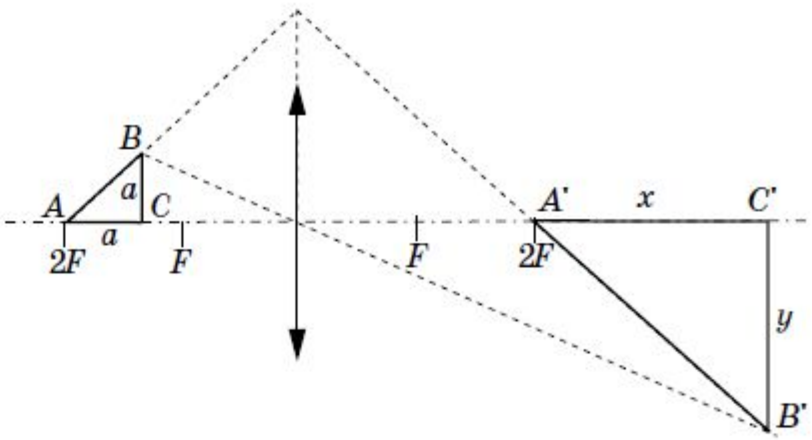
Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC расположен перед тонкой собирающей линзой оптической силой 2,5 дптр так, что его катет AC лежит на главной оптической оси линзы (см. рисунок). Вершина прямого угла C лежит ближе к центру линзы, чем вершина острого угла A. Расстояние от центра линзы до точки A равно удвоенному фокусному расстоянию линзы, $AC = 4$ см. Постройте изображение треугольника и найдите площадь получившейся фигуры.



Образец возможного решения:

Длину x горизонтального катета $A'C'$ изображения находим по формуле линзы:

$$\frac{1}{2F-a}+\frac{1}{2F+x}=\frac{1}{F},$$



откуда

$$x=\frac{aF}{F-a}=\frac{a}{1-aD}.$$

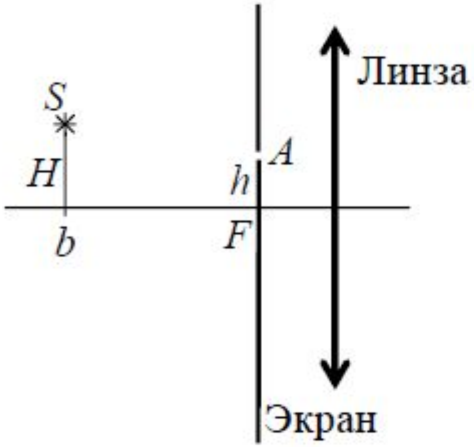
Длину y вертикального катета $B'C'$ изображения находим из подобия:

$$y=a\cdot\frac{2F+x}{2F-a}=\frac{aF}{F-a}=\frac{a}{1-aD}=x.$$

Площадь изображения $S_1=\frac{1}{2}\ A'C'\cdot B'C'=\frac{a^2}{2(1-aD)^2}\approx 9{,}9\,\text{см}^2.$

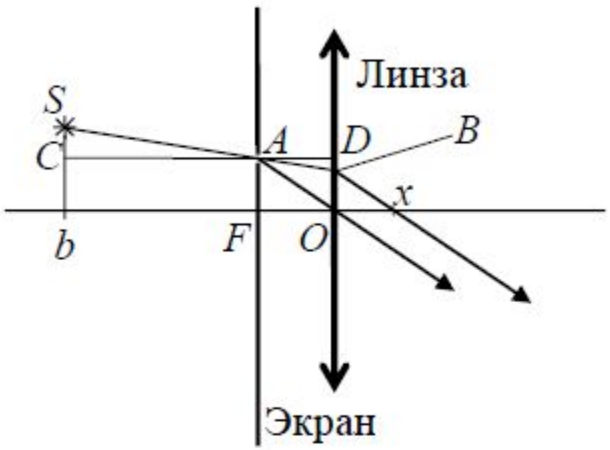
Ответ: $S_1\approx 9{,}9\,\text{см}^2.$

Главная оптическая ось тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см и точечный источник света S находятся в плоскости рисунка. Точка S находится на расстоянии $b = 70$ см от плоскости линзы и на расстоянии $H = 5$ см от ее главной оптической оси. В левой фокальной плоскости линзы лежит тонкий непрозрачный экран с отверстием A, находящимся в плоскости рисунка на расстоянии $h = 4$ см от главной оптической оси линзы. На каком расстоянии x от плоскости линзы луч SA от точечного источника, пройдя через отверстие в экране и линзу, пересечет ее главную оптическую ось? Дифракцией света пренебречь. Постройте рисунок, показывающий ход луча через линзу.



Образец возможного решения:

Проведем луч SA до пересечения с плоскостью линзы (точка B на расстоянии $y = OB$ от центра линзы O). Проведем через точку A отрезок $CD \parallel OF$.



2. Из подобия ΔACS и ΔABD следует:

$$\frac{H-h}{b-F} = \frac{h-y}{F}, \text{ откуда}$$

$$y = h - F\frac{H-h}{b-F} = \frac{hb - FH}{b-F} =$$

$$= \frac{4 \cdot 70 - 20 \cdot 5}{50} = 3{,}6 \text{ см.}$$

3. Из точки A проведем луч AO, который проходит линзу, не преломляясь. Точка A является побочным фокусом линзы, поэтому лучи AO и AB, пройдя линзу, идут параллельно друг другу.

4. Из подобия ΔAFO и ΔBOx следует:

$$\frac{h}{F} = \frac{y}{x}, \text{ откуда } x = y\frac{F}{h} = \frac{F}{h} \cdot \frac{hb - FH}{b-F} = \frac{20}{4} \cdot 3{,}6 = 18 \text{ см.}$$

Ответ: $x = 18$ см

Спасибо
за внимание!