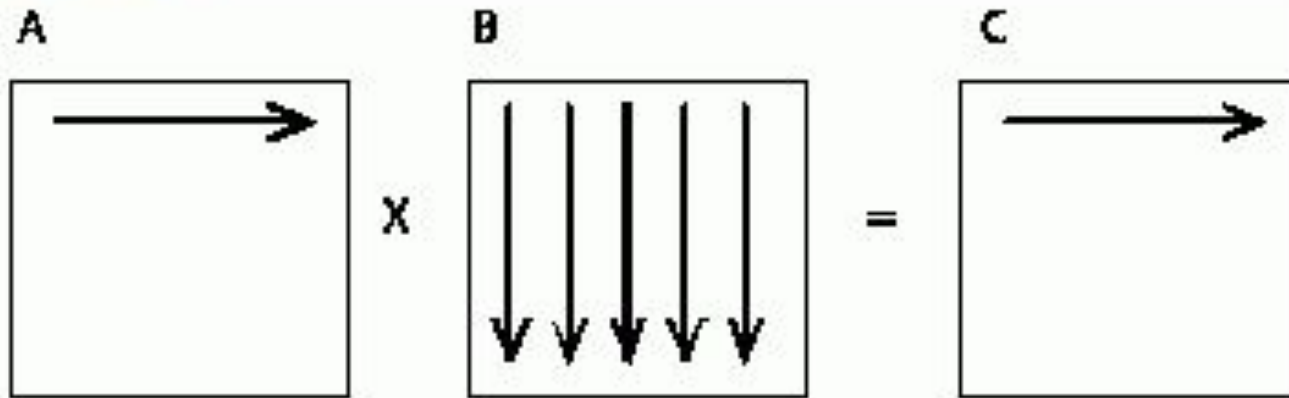


Алгоритми паралельного множення матриць

Послідовне множення матриць



$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad 0 \leq i < m, \quad 0 \leq j < l$$

Стрічкові алгоритми паралельного множення матриць

Перший алгоритм

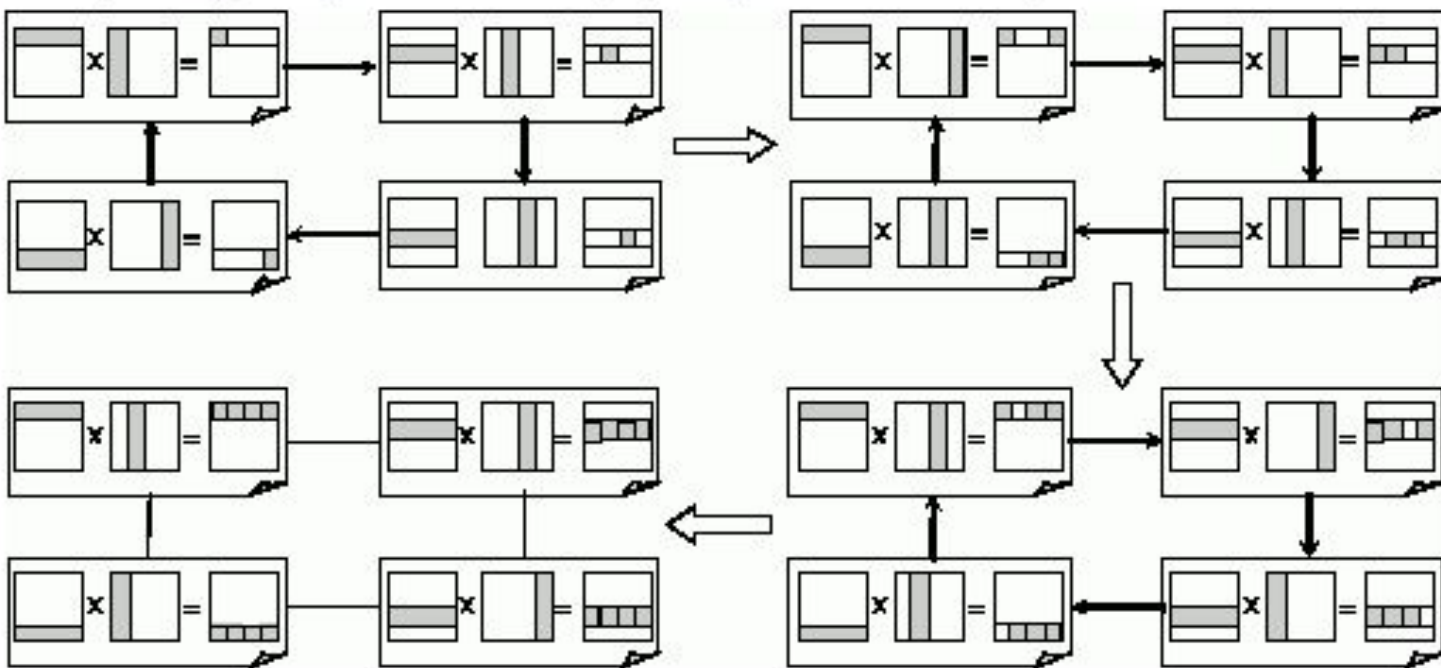
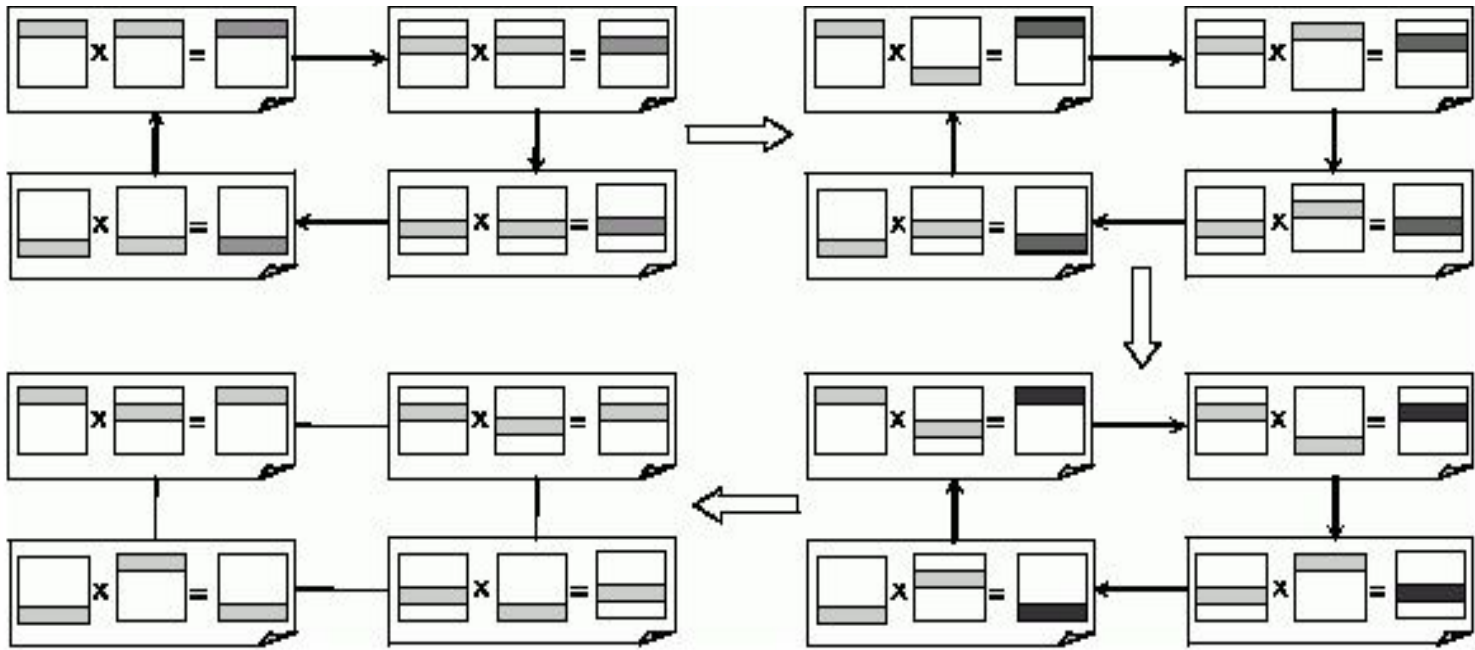


Таблица 1

Номер итерации	Процесс	Строка матрицы A	Столбец матрицы B	Результат (элемент матрицы C)
0	0	A_0	B^0	c_{00}
	1	A_1	B^1	c_{11}
	2	A_2	B^2	c_{22}
	3	A_3	B^3	c_{33}
1	0	A_0	B^3	c_{03}
	1	A_1	B^0	c_{10}
	2	A_2	B^1	c_{21}
	3	A_3	B^2	c_{32}
2	0	A_0	B^2	c_{02}
	1	A_1	B^3	c_{13}
	2	A_2	B^0	c_{20}
	3	A_3	B^1	c_{31}
3	0	A_0	B^1	c_{01}
	1	A_1	B^2	c_{12}
	2	A_2	B^3	c_{23}
	3	A_3	B^0	c_{30}

Другой алгоритм



Номер итерации	Процесс	Строка матрицы A	Строка матрицы B	Результат (строка матрицы C)
0	0	A_0	B_0	C_0 (учтено 1 слагаемое)
	1	A_1	B_1	C_1 (учтено 1 слагаемое)
	2	A_2	B_2	C_2 (учтено 1 слагаемое)
	3	A_3	B_3	C_3 (учтено 1 слагаемое)
1	0	A_0	B_3	C_0 (учтены 2 слагаемых)
	1	A_1	B_0	C_1 (учтены 2 слагаемых)
	2	A_2	B_1	C_2 (учтены 2 слагаемых)
	3	A_3	B_2	C_3 (учтены 2 слагаемых)
2	0	A_0	B_2	C_0 (учтены 3 слагаемых)
	1	A_1	B_3	C_1 (учтены 3 слагаемых)
	2	A_2	B_0	C_2 (учтены 3 слагаемых)
	3	A_3	B_1	C_3 (учтены 3 слагаемых)
3	0	A_0	B_1	C_0 (учтены все слагаемые)
	1	A_1	B_2	C_1 (учтены все слагаемые)
	2	A_2	B_3	C_2 (учтены все слагаемые)
	3	A_3	B_0	C_3 (учтены все слагаемые)

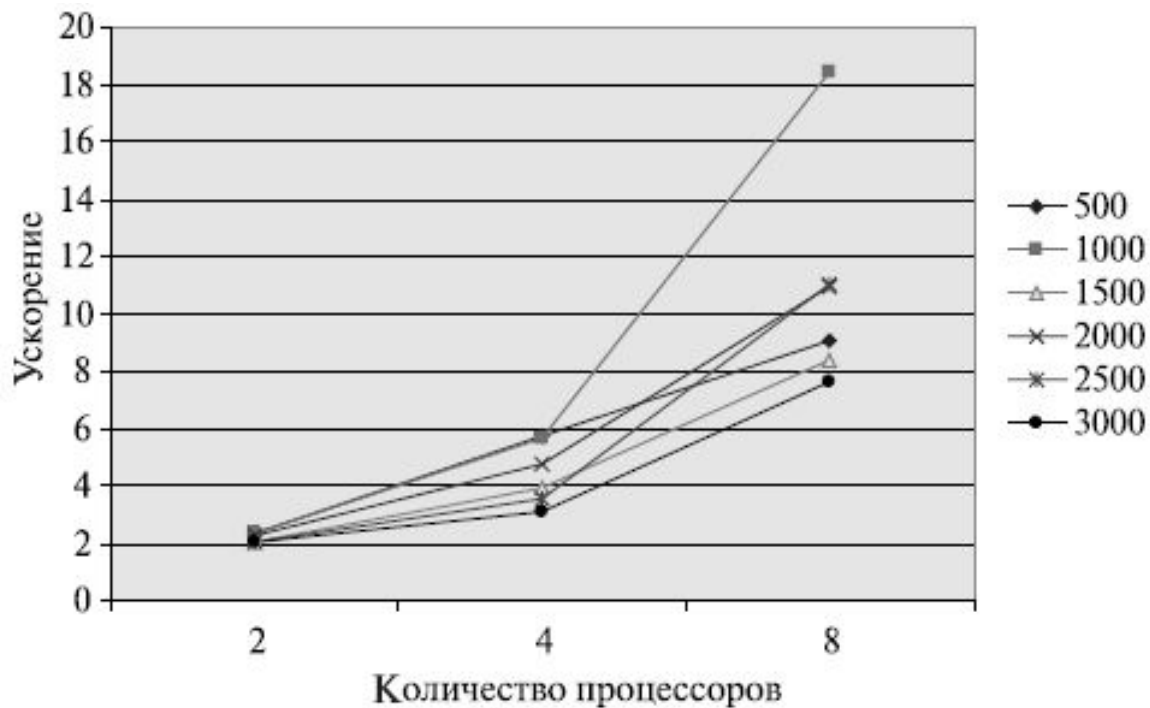
Результати експериментів

<http://www.intuit.ru/studies/courses/1156/190/lecture/4954?page=2>

Размер матрицы	Последовательный алгоритм	Параллельный алгоритм					
		2 процессора		4 процессора		8 процессоров	
		Время	Ускорение	Время	Ускорение	Время	Ускорение
500	0,8752	0,3758	2,3287	0,1535	5,6982	0,0968	9,0371
1000	12,8787	5,4427	2,3662	2,2628	5,6912	0,6998	18,4014
1500	43,4731	20,9503	2,0750	11,0804	3,9234	5,1766	8,3978
2000	103,0561	45,7436	2,2529	21,6001	4,7710	9,4127	10,9485
2500	201,2915	99,5097	2,0228	56,9203	3,5363	18,3303	10,9813
3000	347,8434	171,9232	2,0232	111,9642	3,1067	45,5482	7,6368

Графічне представлення результатів експериментів

<http://www.intuit.ru/studies/courses/1156/190/lecture/4954?page=2>



Алгоритм Фокса

$$\begin{pmatrix} A_{00}A_{01} \dots A_{0q-1} \\ \dots \\ A_{q-10}A_{q-11} \dots A_{q-1q-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{00}B_{01} \dots B_{0q-1} \\ \dots \\ B_{q-10}B_{q-11} \dots B_{q-1q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{00}C_{01} \dots C_{0q-1} \\ \dots \\ C_{q-10}C_{q-11} \dots C_{q-1q-1} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = \sum_{s=0}^{q-1} A_{is}B_{sj}.$$

Блочный алгоритм 1 (алгоритм Фокса)

Вначале производится рассылка в процесс с координатами (i, j) блоков A_{ij} , B_{ij} исходных матриц. Кроме того, выполняется обнуление матрицы C_{ij} , предназначенной для хранения соответствующего блока результирующего произведения AB .

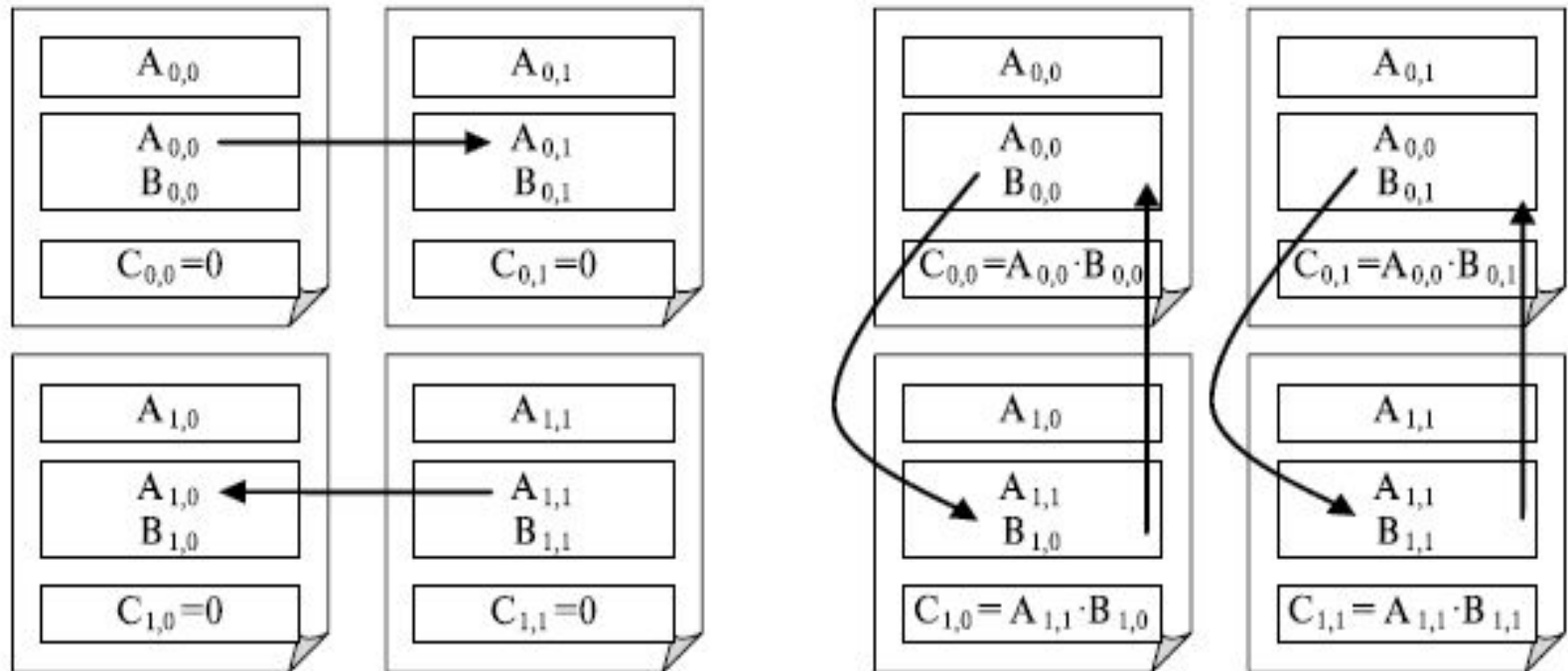
Затем запускается цикл по m ($m = 0, \dots, q - 1$), в ходе которого выполняются три действия:

- 1) для каждой строки i ($i = 0, \dots, q - 1$) блок A_{ij} одного из процессов пересылается во все процессы этой же строки; при этом индекс j пересылаемого блока определяется по формуле $j = (i + m) \bmod q$;
- 2) полученный в результате подобной пересылки блок матрицы A и содержащийся в процессе (i, j) блок матрицы B перемножаются, и результат прибавляется к матрице C_{ij} ;
- 3) для каждого столбца j ($j = 0, \dots, q - 1$) выполняется циклическая пересылка блоков матрицы B , содержащихся в каждом процессе (i, j) этого столбца, в направлении убывания номеров строк.

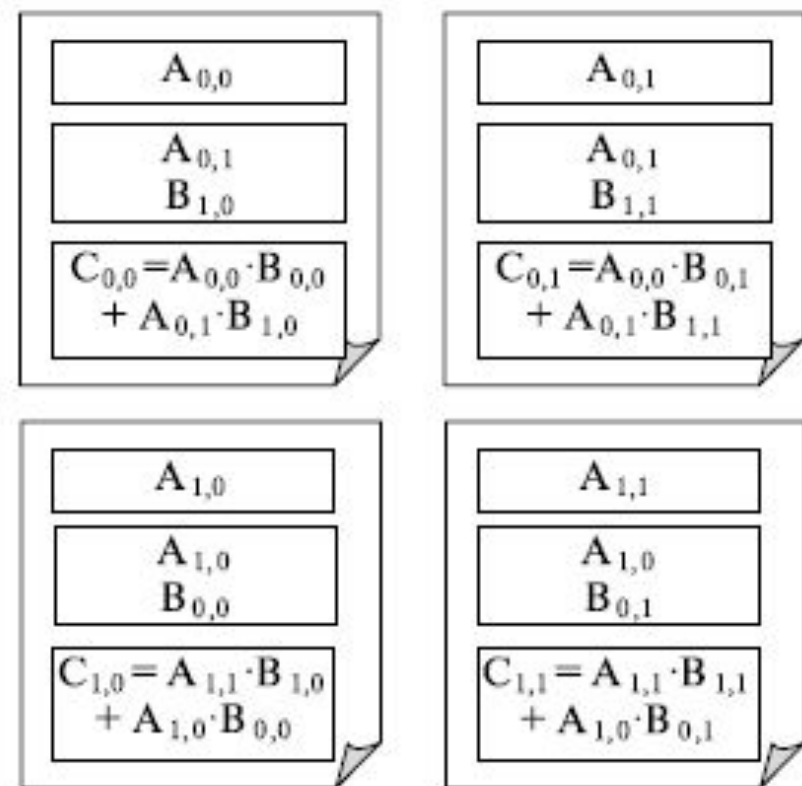
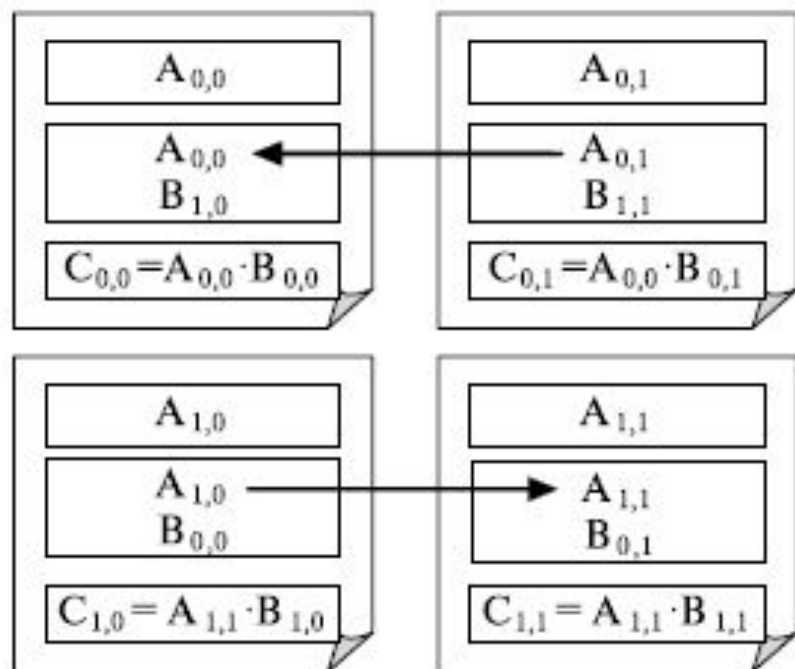
На последней итерации действие (3) можно не выполнять.

После завершения цикла в каждом процессе будет содержаться матрица C_{ij} , равная соответствующему блоку произведения AB . Останется переслать эти блоки главному процессу.

Реалізація алгоритму Фокса



2 итерация



Номер итерации m	Процесс	Исходный блок A	(1) Пересылка одного из блоков A во все процессы строки	Блок B	(2) Вычисление очередного слагаемого блока C	(3) Пересылка блока B
0	(0,0)	A_{00}	Получен A_{00}	B_{00}	$A_{00}B_{00}$	B_{00} послан в (2,0)
	(0,1)	A_{01}	Получен A_{00}	B_{01}	$A_{00}B_{01}$	B_{01} послан в (2,1)
	(0,2)	A_{02}	Получен A_{00}	B_{02}	$A_{00}B_{02}$	B_{02} послан в (2,2)
	(1,0)	A_{10}	Получен A_{11}	B_{10}	$A_{11}B_{10}$	B_{10} послан в (0,0)
	(1,1)	A_{11}	Получен A_{11}	B_{11}	$A_{11}B_{11}$	B_{11} послан в (0,1)
	(1,2)	A_{12}	Получен A_{11}	B_{12}	$A_{11}B_{12}$	B_{12} послан в (0,2)
	(2,0)	A_{20}	Получен A_{22}	B_{20}	$A_{22}B_{20}$	B_{20} послан в (1,0)
	(2,1)	A_{21}	Получен A_{22}	B_{21}	$A_{22}B_{21}$	B_{21} послан в (1,1)
	(2,2)	A_{22}	Получен A_{22}	B_{22}	$A_{22}B_{22}$	B_{22} послан в (1,2)
1	(0,0)	A_{00}	Получен A_{01}	B_{10}	$+A_{01}B_{10}$	B_{10} послан в (2,0)
	(0,1)	A_{01}	Получен A_{01}	B_{11}	$+A_{01}B_{11}$	B_{11} послан в (2,1)
	(0,2)	A_{02}	Получен A_{01}	B_{12}	$+A_{01}B_{12}$	B_{12} послан в (2,2)
	(1,0)	A_{10}	Получен A_{12}	B_{20}	$+A_{12}B_{20}$	B_{20} послан в (0,0)
	(1,1)	A_{11}	Получен A_{12}	B_{21}	$+A_{12}B_{21}$	B_{21} послан в (0,1)
	(1,2)	A_{12}	Получен A_{12}	B_{22}	$+A_{12}B_{22}$	B_{22} послан в (0,2)
	(2,0)	A_{20}	Получен A_{20}	B_{00}	$+A_{20}B_{00}$	B_{00} послан в (1,0)
	(2,1)	A_{21}	Получен A_{20}	B_{01}	$+A_{20}B_{01}$	B_{01} послан в (1,1)
	(2,2)	A_{22}	Получен A_{20}	B_{02}	$+A_{20}B_{02}$	B_{02} послан в (1,2)
2	(0,0)	A_{00}	Получен A_{02}	B_{20}	$+A_{02}B_{20}$	
	(0,1)	A_{01}	Получен A_{02}	B_{21}	$+A_{02}B_{21}$	
	(0,2)	A_{02}	Получен A_{02}	B_{22}	$+A_{02}B_{22}$	
	(1,0)	A_{10}	Получен A_{10}	B_{00}	$+A_{10}B_{00}$	
	(1,1)	A_{11}	Получен A_{10}	B_{01}	$+A_{10}B_{01}$	
	(1,2)	A_{12}	Получен A_{10}	B_{02}	$+A_{10}B_{02}$	
	(2,0)	A_{20}	Получен A_{21}	B_{10}	$+A_{21}B_{10}$	
	(2,1)	A_{21}	Получен A_{21}	B_{11}	$+A_{21}B_{11}$	
	(2,2)	A_{22}	Получен A_{21}	B_{12}	$+A_{21}B_{12}$	

Результати експериментів

алгоритма Фокса

Размер матриц	Последовательный алгоритм	Параллельный алгоритм			
		4 процессора		9 процессоров	
		Время	Ускорение	Время	Ускорение
500	0,8527	0,2190	3,8925	0,1468	5,8079
1000	12,8787	3,0910	4,1664	2,1565	5,9719
1500	43,4731	10,8678	4,0001	7,2502	5,9960
2000	103,0561	24,1421	4,2687	21,4157	4,8121
2500	201,2915	51,4735	3,9105	41,2159	4,8838
3000	347,8434	87,0538	3,9957	58,2022	5,9764

