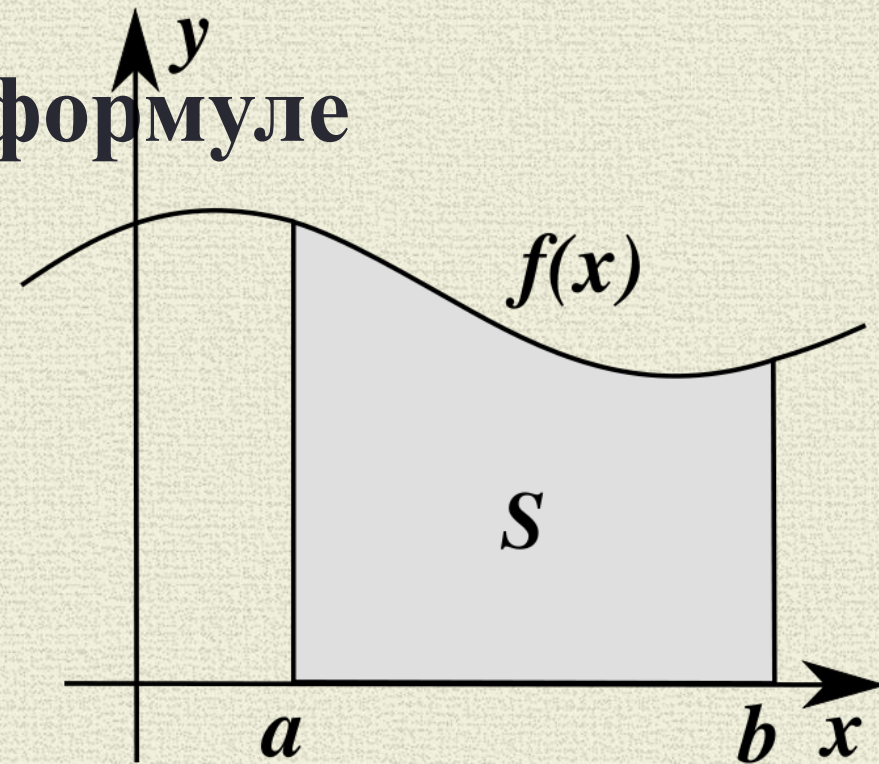


Понятие интеграла

Площадь криволинейной трапеции

МОЖНО ВЫЧИСЛИТЬ по формуле

$$S = F(b) - F(a)$$



где $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$

Разность $F(b) - F(a)$ называют **интегралом**

от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и

обозначают:

$$\int_a^b f(x) dx$$

(читается: «Интеграл от a до b эф от икс дэ икс»),

$$\int_a^b f(x)dx$$

\int – знак интеграла
подынтегральная

$f(x)$ – функция

dx – элемент интегрирования

a – нижний предел интегрирования

b – верхний предел интегрирования

Т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Данную формулу называют **формулой Ньютона-Лейбница** в честь создателей дифференциального и интегрального исчисления.

При вычислении интегралов удобно
ввести обозначение:

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Тогда формулу Ньютона-Лейбница
МОЖНО записать в виде:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

Например

:

$$a) \int_{-2}^1 x^4 dx = \left. \frac{x^5}{5} \right|_{-2}^1 = \frac{1^5}{5} - \frac{(-2)^5}{5} =$$

$$\frac{1}{5} + \frac{32}{5} = \frac{33}{5} = 6,6$$

Например

$$6) \int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx = \left(8x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^4 =$$

$$\left(32 + 16 - \frac{64}{3} \right) - \left(-16 + 4 + \frac{8}{3} \right) =$$

$$\left(48 - \frac{64}{3} \right) - \left(-12 + \frac{8}{3} \right) = 60 - \frac{72}{3} =$$

$$60 - 24 = 36$$

Например

∴

$$в) \int_1^3 \frac{dx}{x^3} = \int_1^3 x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_1^3 =$$

$$-\frac{1}{2x^2} \Big|_1^3 = -\frac{1}{18} - \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{18} + \frac{1}{2} =$$

$$-\frac{1}{18} + \frac{9}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Например

:

$$e) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) dx = -\frac{1}{3} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$-\frac{1}{3} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(0 - \frac{\pi}{4}\right) \right) =$$

$$-\frac{1}{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = -\frac{1}{3} \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Например

:

$$\partial) \int_0^{\pi} 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \int_0^{\pi} \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) =$$

$$= -(-1 - 1) = 2$$

Вычислите интегралы:

$$1) \int_2^5 3 dx$$

$$2) \int_3^3 x^3 dx$$

$$3) \int_{-3}^2 (2x - 3) dx$$

$$4) \int_{-2}^{-1} (5 - 4x) dx$$

Вычислите интегралы:

$$5) \int_0^2 (2x + 3x^2) dx$$

$$6) \int_{-3}^1 (2x^2 + 3x - 1) dx$$

$$7) \int_0^{\pi} (x^2 + 2 \sin x) dx$$

$$8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^3 - \sqrt{3} \cos x) dx$$

Вычислите интегралы:

$$9) \int_2^3 \frac{dx}{x^2}$$

$$11) \int_2^7 \frac{4}{\sqrt{x+2}} dx$$

$$10) \int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$$

$$12) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$$

Вычислите интегралы:

$$13) \int_0^{\pi} 3 \cos \frac{x}{2} dx$$

$$15) \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right)^2 dx$$

$$14) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$16) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx$$