

 **Логарифм.
Свойства
логарифмов**

Понятие логарифма

При любом $a > 0$ и $a \neq 1$ степень a^p с произвольным действительным показателем p определена и равна некоторому положительному действительному числу b : $a^p = b$. Показатель p степени a^p называется логарифмом этой степени с основанием a .

* Логарифмом положительного числа x по положительному и не равному 1 основанию a : $\log_a x$ называется показатель степени, при возведении в который числа a получается x .

$$a^{\log_a x} = x, a > 0, a \neq 1$$

или

$$a^b = x, a > 0,$$

$$a \neq 1,$$

тогда

$$b = \log_a x$$

* * Десятичный логарифм и натуральный логарифм

* Десятичным логарифмом называется логарифм, если его основание равно 10.

* Обозначение десятичного логарифма: $\lg x$.

* Натуральным логарифмом называется логарифм, если его основание равно числу e .

* Обозначение натурального логарифма: $\ln x$.

Логарифмы. Свойства логарифмов.

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется такой показатель степени c , в которую надо возвести число a , чтобы получить число b :

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

$a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$

$$a^{\log_a b} = b$$

основное
- логарифмическое
тождество

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$



Определение.

Логарифмом числа b ($b > 0$) по основанию a ($a > 0, a \neq 1$) называется показатель степени c , в которую нужно возвести основание a , чтобы получить число b , т.е. если $a^c = b$, то можно записать $\log_a b = c$.

Примеры.

1) $\log_2 32$, здесь $b = 32$, $a = 2$, $c = 5$.

$$\log_2 32 = 5, \text{ т. к. } 2^5 = 32.$$

2) $\log_5 0,04$,

здесь $b = 0,04$, $a = 5$, $c = -2$.

$$\log_5 0,04 = -2, \text{ т. к. } 5^{-2} = 1/25 = 0,04.$$

3) Найти x , такое, что $\log_8 x = 1/3$.

По определению логарифма

$$x = 8^{1/3} = 2.$$

Основное логарифмическое тождество.

$$a^c = b \Leftrightarrow \log_a b = c$$

**Откуда получаем основное
логарифмическое тождество**

$$(b > 0, a > 0, a \neq 1)$$

$$a^{\log_a b} = b$$

1. Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов множителей.

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

Пример :

$$\log_6 72 + \log_6 3 = \log_6 (72 \times 3) = \log_6 216 = 3$$

2. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,$$
$$a > 0; a \neq 1; b > 0; c > 0.$$

Пример:

$$\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = 1$$

* *Решение примеров с логарифмами

* № 1. $(\log_2 16) \cdot (\log_6 36) = \log_2 2^4 \cdot \log_6 6^2 = 4 \cdot 2 = 8$.

* Ответ. 8.

* № 2. $7 \cdot 5^{\log_5 4} = 7 \cdot 4 = 28$.

* Ответ. 28.

* № 3. $36^{\log_6 5} = (6^2)^{\log_6 5} = 6^{\log_6 5^2} = 5^2 = 25$.

* Ответ. 25.

* № 4. $\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} = 1,5$.

* Ответ. 1,5.

* № 5. $\log_5 0,2 + \log_{0,5} 4 = \log_5 5^{-1} + \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -1 - 2 =$

* $= -3$.

* Ответ. -3.

* № 6. $\log_{0,3} 10 - \log_{0,3} 3 = \log_{0,3} \frac{10}{3} = \log_{0,3} \left(\frac{3}{10}\right)^{-1} = -1$.

* ОТВЕТ. -1.

* № 7. $\frac{\log_3 25}{\log_3 5} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$.

* ОТВЕТ. 2.

* № 8. $\frac{\log_7 13}{\log_{49} 13} = \frac{\log_7 13}{\log_{7^2} 13} = \frac{\log_7 13}{\frac{1}{2} \log_7 13} = 2$.

* ОТВЕТ. 2.

* № 9. $\log_5 9 \cdot \log_3 25 = \frac{\log_5 3^2 \cdot \log_5 25}{\log_5 3} = \frac{2 \log_5 3 \cdot \log_5 5^2}{\log_5 3} =$

* $= 2 \cdot 2 = 4$.

* ОТВЕТ. 4 .

* № 10. $\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 25} = 9^2 = 81$.

* ОТВЕТ. 81.

* № 11. $(1 - \log_2 12)(1 - \log_6 12) = (1 - (\log_2 2 + \log_2 6)) \cdot$

* $(1 - (\log_6 6 + \log_6 2)) = (1 - 1 - \log_2 6) \cdot$

* $(1 - 1 - \log_6 2) = -\log_2 6 \cdot (-\log_6 2) = \log_2 2 = 1 .$

ОТВЕТ. 1.

* № 12. $6 \log_7 \sqrt[3]{7} = 6 \log_7 7^{\frac{1}{3}} = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 .$

* ОТВЕТ. 2.

* № 13. $\frac{\log_3 18}{2 + \log_3 2} = \frac{\log_3 9 + \log_3 2}{2 + \log_3 2} = \frac{2 + \log_3 2}{2 + \log_3 2} = 1 .$

* ОТВЕТ. 1.

* № 14. $\frac{\log_3 5}{\log_3 7} + \log_7 0,2 = \log_7 5 + \log_7 0,2 = \log_7 1 = 0 .$

* ОТВЕТ. 0.

* № 15. $\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25 = \frac{1}{\log_3 0,8} \cdot \log_3 1,25 =$

* $= \log_{0,8} 1,25 = \log_{0,8} \frac{10}{8} = -1 .$

* ОТВЕТ. -1 .

* № 16. $5^{\log_{25} 49} = 5^{\log_{5^2} 7^2} = 5^{\log_5 7} = 7 .$

* ОТВЕТ. 7 .

* № 17. $(\log_{\sqrt{7}} 49)^2 = \left(\log_{\frac{1}{7^2}} 7^2\right)^2 = 4^2 = 16 .$

* ОТВЕТ. 16 .

* № 18. $5^{3+\log_5 2} = 5^3 \cdot 5^{\log_5 2} = 125 \cdot 2 = 250 .$

* ОТВЕТ. 250 .

* № 19. $8^{2 \log_8 3} = 8^{\log_8 3^2} = 3^2 = 9 .$

* ОТВЕТ. 9 .

* № 20. $64^{\log_8 \sqrt{3}} = 8^2 \log_8 \sqrt{3} = 8^{\log_8 3} = 3$.

* ОТВЕТ. 3.

* № 21. $\log_4 \log_5 25 = \log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2} = 0,5$.

* ОТВЕТ. 0,5.

* № 22. $\frac{24}{3^{\log_3 2}} = \frac{24}{2} = 12$.

* ОТВЕТ. 12.

* № 23. $\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13} = \log_{13^{-1}} 13^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} = -0,5$.

* № 24. $\frac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13} = \log_{13} \sqrt{13} = \frac{1}{2} = 0,5$.

* ОТВЕТ. 0,5.

* № 25. $(3^{\log_2 3})^{\log_3 2} = (3^{\log_3 2})^{\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3$.

* ОТВЕТ. 3.

* № 26. $\log_a(ab^3) = \log_a a + \log_a b^3 = 1 + 3 \log_a b$.

* Если $\log_b a = \frac{1}{7}$, то $1 + 3 \log_a b = 1 + 3 \cdot \frac{1}{\log_b a} =$

* $= 1 + 3 \cdot 7 = 22$.

* Ответ. 22.

* № 27. $\log_a \frac{a}{b^3} = \log_a a - \log_a b^3 = 1 - 3 \log_a b$.

* Если $\log_a b = 5$, то $1 - 3 \log_a b = 1 - 3 \cdot 5 = -14$.

* Ответ. -14.

* № 28. $\log_a(a^2b^3) = \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2 + 3 \log_a b$.

* Если $\log_a b = -2$, то $2 + 3 \log_a b = 2 + 3 \cdot (-2) = -4$.

* Ответ. -4.

*