Логарифм. Свойства логарифмов

Понятие логарифма

При любом $a > 0$ и $a \neq 1$ степень a^p с произвольным действительным показателем p определена и равна некоторому положительному действительному числу b: $a^p = b$. Показатель p степени a^p называется логарифмом этой степени с основанием a.

* Логарифмом положительного числа x по положительному и не равному 1 основанию a: $log_a x$ называется показатель степени, при возведении в который числа a получается x.

$$a^{log_a x} = x, a > 0, a \neq 1$$

или

$$a^b = x, a > 0,$$

$$a \neq 1,$$

тогда

$$b = log_a x$$

* # Десятичный логарифм и натуральный логарифм

* Десятичным логарифмом называется логарифм, если его основание равно 10.
* Обозначение десятичного логарифма: $\lg x$.

* Натуральным логарифмом называется логарифм, если его основание равно числу e .
* Обозначение натурального логарифма: $\ln x$.

Логарифмы. Свойства логарифмов.

Логарифмом положительного числа b по основанию a $(a > 0,\ a \neq 1)$ называется такой показатель степени c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

a> 0, a≠1 , b> 0

$$a^{\log_a b} = b$$ - основное логарифмическое тождество

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Определение.

Логарифмом числа b $(b > 0)$ по основанию a $(a > 0, a \neq 1)$ называется показатель степени c, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b , т.е. если $a^c = b$, то можно записать $\log_a b = c$.

Примеры.

1) $\log_2 32$, здесь $b = 32$, $a = 2$, $c = 5$.

$\log_2 32 = 5$, т. к. $2^5 = 32$.

2) $\log_5 0{,}04$,

здесь $b = 0{,}04$, $a = 5$, $c = -2$.

$\log_5 0{,}04 = -2$, т. к. $5^{-2} = 1/25 = 0{,}04$.

3) Найти x, такое, что $\log_8 x = 1/3$.

По определению логарифма

$$x = 8^{1/3} = 2.$$

Основное логарифмическое тождество.

$$a^c = b \Leftrightarrow \log_a b = c$$

Откуда получаем основное логарифмическое тождество ($b > 0, a > 0, a \neq 1$)

$$a^{\log_a b} = b$$

1. Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов множителей.

$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$

Пример :

$\log_6 72 + \log_6 3 = \log_6 (72 \times 3) = \log_6 216 = \mathbf{3}$

2. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,$$

$a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0;\ c > 0.$

Пример:

$$\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = \mathbf{1}$$

Решение примеров с логарифмами

- № 1. $(log_2 16)\cdot(log_6 36) = log_2 2^4 \cdot log_6 6^2 = 4\cdot 2 = 8$.
- Ответ. 8.
- № 2. $7\cdot 5^{log_5 4} = 7\cdot 4 = 28$.
- Ответ. 28.
- № 3. $36^{log_6 5} = \left(6^2\right)^{log_6 5} = 6^{log_6 5^2} = 5^2 = 25$.
- Ответ. 25.
- № 4. $log_4 8 = log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} = 1,5$.
- Ответ. $1,5$.
- № 5. $log_5 0,2 + log_{0,5} 4 = log_5 5^{-1} + log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -1 - 2 =$
- $= -3$.
- Ответ. -3.

* № 6. $\boldsymbol{log_{0,3} 10 - log_{0,3} 3 = log_{0,3} \frac{10}{3} = log_{0,3} \left(\frac{3}{10}\right)^{-1} = -1}$.
* Ответ. $\boldsymbol{-1}$.
* № 7. $\boldsymbol{\frac{log_3 25}{log_3 5} = log_5 25 = log_5 5^2 = 2}$.
* Ответ. $\boldsymbol{2}$.
* № 8. $\boldsymbol{\frac{log_7 13}{log_{49} 13} = \frac{log_7 13}{log_{7^2} 13} = \frac{log_7 13}{\frac{1}{2} log_7 13} = 2}$.
* Ответ. $\boldsymbol{2}$.
* № 9. $\boldsymbol{log_5 9 \cdot log_3 25 = \frac{log_5 3^2 \cdot log_5 25}{log_5 3} = \frac{2 \, log_5 3 \cdot log_5 5^2}{log_5 3} =}$
* $\boldsymbol{= 2 \cdot 2 = 4}$.
* Ответ. $\boldsymbol{4}$.
* № 10. $\boldsymbol{\frac{9^{log_5 50}}{9^{log_5 2}} = 9^{log_5 50 - log_5 2} = 9^{log_5 25} = 9^2 = 81}$.
* Ответ. $\boldsymbol{81}$.

* № 11. $(1 - \log_2 12)(1 - \log_6 12) = \big(1 - (\log_2 2 + \log_2 6)\big) \cdot$
* $\cdot \big(1 - (\log_6 6 + \log_6 2)\big) = (1 - 1 - \log_2 6) \cdot$
* $\cdot (1 - 1 - \log_6 2) = -\log_2 6 \cdot (-\log_6 2) = \log_2 2 = 1$.

Ответ. 1.

* № 12. $6 \log_7 \sqrt[3]{7} = 6 \log_7 7^{\frac{1}{3}} = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$.
* Ответ. 2.
* № 13. $\frac{\log_3 18}{2+\log_3 2} = \frac{\log_3 9+\log_3 2}{2+\log_3 2} = \frac{2+\log_3 2}{2+\log_3 2} = 1$.
* Ответ. 1.
* № 14. $\frac{\log_3 5}{\log_3 7} + \log_7 0,2 = \log_7 5 + \log_7 0,2 = \log_7 1 = 0$.
* Ответ. 0.

- № 15. $\boldsymbol{log_{0,8} 3 \cdot log_3 1,25 = \frac{1}{log_3 0,8} \cdot log_3 1,25 =}$
- $\boldsymbol{= log_{0,8} 1,25 = log_{0,8} \frac{10}{8} = -1}$.
- Ответ. $\boldsymbol{-1}$.
- № 16. $\boldsymbol{5^{log_{25} 49} = 5^{log_{5^2} 7^2} = 5^{log_5 7} = 7}$.
- Ответ. 7.
- № 17. $\boldsymbol{\left(log_{\sqrt{7}} 49\right)^2 = \left(log_{7^{\frac{1}{2}}} 7^2\right)^2 = 4^2 = 16}$.
- Ответ. $\boldsymbol{16}$.
- № 18. $\boldsymbol{5^{3+log_5 2} = 5^3 \cdot 5^{log_5 3} = 125 \cdot 2 = 250}$.
- Ответ. $\boldsymbol{250}$.
- № 19. $\boldsymbol{8^{2\,log_8 3} = 8^{log_8 3^2} = 3^2 = 9}$.
- Ответ. 9.

* № 20. $64^{\log_8 \sqrt{3}} = 8^{2\log_8 \sqrt{3}} = 8^{\log_8 3} = 3$.
* Ответ. 3.
* № 21. $\log_4 \log_5 25 = \log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2} = 0,5$.
* Ответ. $0,5$.
* № 22. $\frac{24}{3^{\log_3 2}} = \frac{24}{2} = 12$.
* Ответ. 12.
* № 23. $\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13} = \log_{13^{-1}} 13^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} = -0,5$.
* № 24. $\frac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13} = \log_{13} \sqrt{13} = \frac{1}{2} = 0,5$.
* Ответ. $0,5$.
* № 25. $\left(3^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^{\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3$.
* Ответ. 3.

* № 26. $\log_a(ab^3) = \log_a a + \log_a b^3 = 1 + 3\log_a b$.
* Если $\log_b a = \frac{1}{7}$, то $1 + 3\log_a b = 1 + 3 \cdot \frac{1}{\log_b a} =$
* $= 1 + 3 \cdot 7 = 22$.
* Ответ. 22.
* № 27. $\log_a \frac{a}{b^3} = \log_a a - \log_a b^3 = 1 - 3\log_a b$.
* Если $\log_a b = 5$, то $1 - 3\log_a b = 1 - 3 \cdot 5 = -14$.
* Ответ. -14.
* № 28. $\log_a(a^2b^3) = \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2 + 3\log_a b$.
* Если $\log_a b = -2$, то $2 + 3\log_a b = 2 + 3 \cdot (-2) = -4$.
* Ответ. -4.
*