

\*Логарифм.  
Свойства  
логарифмов

# *Понятие логарифма*

При любом  $a > 0$  и  $a \neq 1$  степень  $a^p$  с произвольным действительным показателем  $p$  определена и равна некоторому положительному действительному числу  $b$ :  $a^p = b$ . Показатель  $p$  степени  $a^p$  называется логарифмом этой степени с основанием  $a$ .

\*Логарифмом положительного числа  $x$  по положительному и не равному 1 основанию  $a$ :  $\log_a x$  называется показатель степени, при возведении в который числа  $a$  получается  $x$ .

$$a^{\log_a x} = x, a > 0, a \neq 1$$

или

$$a^b = x, a > 0,$$

$$a \neq 1,$$

тогда

$$b = \log_a x$$

## \* \* Десятичный логарифм и натуральный логарифм

- \* Десятичным логарифмом называется логарифм, если его основание равно 10.
  - \* Обозначение десятичного логарифма:  $\lg x$ .
- 
- \* Натуральным логарифмом называется логарифм, если его основание равно числу  $e$ .
  - \* Обозначение натурального логарифма:  $\ln x$ .

## Логарифмы. Свойства логарифмов.

Логарифмом положительного числа  $b$  по основанию  $a$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) называется такой показатель степени  $c$ , в которую надо возвести число  $a$ , чтобы получить число  $b$ :

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

$a > 0, a \neq 1, b > 0$

$$a^{\log_a b} = b \quad \begin{array}{l} \text{основное} \\ \text{логарифмическое} \\ \text{тождество} \end{array}$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$



### Определение.

Логарифмом числа  $b$  ( $b > 0$ ) по основанию  $a$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) называется показатель степени  $c$ , в которую нужно возвести основание  $a$ , чтобы получить число  $b$ , т.е. если  $a^c = b$ , то можно записать  $\log_a b = c$ .

## Примеры.

1)  $\log_2 32$ , здесь  $b = 32$ ,  $a = 2$ ,  $c = 5$ .

$$\log_2 32 = 5, \text{ т. к. } 2^5 = 32.$$

2)  $\log_5 0,04$ ,

здесь  $b = 0,04$ ,  $a = 5$ ,  $c = -2$ .

$$\log_5 0,04 = -2, \text{ т. к. } 5^{-2} = 1/25 = 0,04.$$

3) Найти  $x$ , такое, что  $\log_8 x = 1/3$ .

По определению логарифма

$$x = 8^{1/3} = 2.$$

## Основное логарифмическое тождество.

$$a^c = b \Leftrightarrow \log_a b = c$$

Откуда получаем основное  
логарифмическое тождество

$$(b > 0, a > 0, a \neq 1)$$

$$a^{\log_a b} = b$$



1. Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов множителей.

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

Пример :

$$\log_6 72 + \log_6 3 = \log_6(72 \times 3) = \log_6 216 = 3$$



2. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,$$

$a > 0; a \neq 1; b > 0; c > 0.$

Пример:

$$\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = 1$$

\* \* Решение примеров с логарифмами

\* № 1.  $(\log_2 16) \cdot (\log_6 36) = \log_2 2^4 \cdot \log_6 6^2 = 4 \cdot 2 = 8$ .

\* Ответ. 8.

\* № 2.  $7 \cdot 5^{\log_5 4} = 7 \cdot 4 = 28$ .

\* Ответ. 28.

\* № 3.  $36^{\log_6 5} = (6^2)^{\log_6 5} = 6^{\log_6 5^2} = 5^2 = 25$ .

\* Ответ. 25.

\* № 4.  $\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} = 1,5$ .

\* Ответ. 1,5.

\* № 5.  $\log_5 0,2 + \log_{0,5} 4 = \log_5 5^{-1} + \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -1 - 2 =$

\* = -3.

\* Ответ. -3.

\* № 6.  $\log_{0,3} 10 - \log_{0,3} 3 = \log_{0,3} \frac{10}{3} = \log_{0,3} \left(\frac{3}{10}\right)^{-1} = -1$ .

\* Ответ. **-1**.

\* № 7.  $\frac{\log_3 25}{\log_3 5} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$ .

\* Ответ. **2**.

\* № 8.  $\frac{\log_7 13}{\log_{49} 13} = \frac{\log_7 13}{\log_{7^2} 13} = \frac{\log_7 13}{\frac{1}{2} \log_7 13} = 2$ .

\* Ответ. **2**.

\* № 9.  $\log_5 9 \cdot \log_3 25 = \frac{\log_5 3^2 \cdot \log_5 25}{\log_5 3} = \frac{2 \log_5 3 \cdot \log_5 5^2}{\log_5 3} =$

\*  $= 2 \cdot 2 = 4$ .

\* Ответ. **4**.

\* № 10.  $\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 25} = 9^2 = 81$ .

\* Ответ. **81**.

$$*\text{№ 11. } (1 - \log_2 12)(1 - \log_6 12) = (1 - (\log_2 2 + \log_2 6)) \cdot$$

$$*\cdot (1 - (\log_6 6 + \log_6 2)) = (1 - 1 - \log_2 6) \cdot$$

$$*\cdot (1 - 1 - \log_6 2) = -\log_2 6 \cdot (-\log_6 2) = \log_2 2 = 1 .$$

Ответ. 1.

$$*\text{№ 12. } 6 \log_7 \sqrt[3]{7} = 6 \log_7 7^{\frac{1}{3}} = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 .$$

\*\text{Ответ. 2.}

$$*\text{№ 13. } \frac{\log_3 18}{2 + \log_3 2} = \frac{\log_3 9 + \log_3 2}{2 + \log_3 2} = \frac{2 + \log_3 2}{2 + \log_3 2} = 1 .$$

\*\text{Ответ. 1.}

$$*\text{№ 14. } \frac{\log_3 5}{\log_3 7} + \log_7 0,2 = \log_7 5 + \log_7 0,2 = \log_7 1 = 0 .$$

\*\text{Ответ. 0.}

\* № 15.  $\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25 = \frac{1}{\log_3 0,8} \cdot \log_3 1,25 =$

\*  $= \log_{0,8} 1,25 = \log_{0,8} \frac{10}{8} = -1$ .

\* Ответ. **-1**.

\* № 16.  $5^{\log_{25} 49} = 5^{\log_{5^2} 7^2} = 5^{\log_5 7} = 7$ .

\* Ответ. **7**.

\* № 17.  $(\log_{\sqrt{7}} 49)^2 = (\log_{7^{\frac{1}{2}}} 7^2)^2 = 4^2 = 16$ .

\* Ответ. **16**.

\* № 18.  $5^{3+\log_5 2} = 5^3 \cdot 5^{\log_5 2} = 125 \cdot 2 = 250$ .

\* Ответ. **250**.

\* № 19.  $8^{2 \log_8 3} = 8^{\log_8 3^2} = 3^2 = 9$ .

\* Ответ. **9**.

\* № 20.  $64^{\log_8 \sqrt{3}} = 8^{2 \log_8 \sqrt{3}} = 8^{\log_8 3} = 3$ .

\* Ответ. 3.

\* № 21.  $\log_4 \log_5 25 = \log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2} = 0,5$ .

\* Ответ. 0,5.

\* № 22.  $\frac{24}{3^{\log_3 2}} = \frac{24}{2} = 12$ .

\* Ответ. 12.

\* № 23.  $\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13} = \log_{13^{-1}} 13^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} = -0,5$ .

\* № 24.  $\frac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13} = \log_{13} \sqrt{13} = \frac{1}{2} = 0,5$ .

\* Ответ. 0,5.

\* № 25.  $(3^{\log_2 3})^{\log_3 2} = (3^{\log_3 2})^{\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3$ .

\* Ответ. 3.

\* № 26.  $\log_a(ab^3) = \log_a a + \log_a b^3 = 1 + 3 \log_a b$ .

\* Если  $\log_b a = \frac{1}{7}$ , то  $1 + 3 \log_a b = 1 + 3 \cdot \frac{1}{\log_b a} =$

=  $1 + 3 \cdot 7 = 22$ .

\* Ответ. 22.

\* № 27.  $\log_a \frac{a}{b^3} = \log_a a - \log_a b^3 = 1 - 3 \log_a b$ .

\* Если  $\log_a b = 5$ , то  $1 - 3 \log_a b = 1 - 3 \cdot 5 = -14$ .

\* Ответ. -14.

\* № 28.  $\log_a(a^2b^3) = \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2 + 3 \log_a b$ .

\* Если  $\log_a b = -2$ , то  $2 + 3 \log_a b = 2 + 3 \cdot (-2) = -4$ .

\* Ответ. -4.

\*