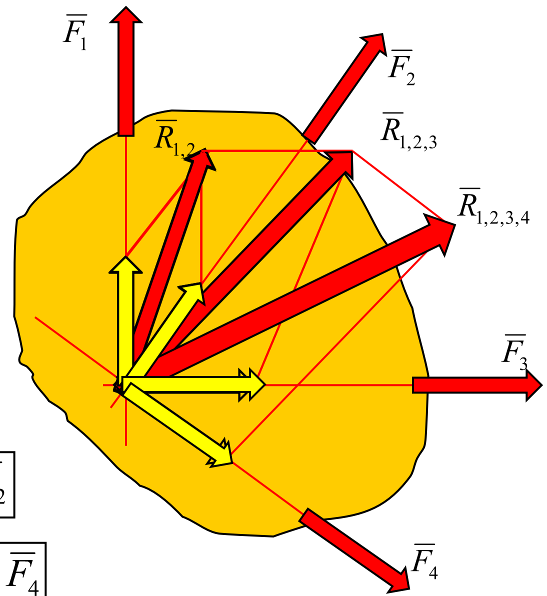
Лекция 2

- **Система сходящихся сил –** линии действия сил пересекаются в одной точке**.**

План исследования любой системы сил соответствует последовательному решению трех вопросов :

1. Как упростить систему?
2. Каков простейший вид системы?
3. Каковы условия равновесия системы?



1. Перенесем все силы по линии их действия в точку пересечения (кинематическое состояние тела при этом не изменится – следствие из аксиомы присоединения).

Сложим первые две силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ (аксиома параллелограмма). Количество сил уменьшилось на единицу.

$$\boxed{\overline{R}_{1,2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2}$$

Сложим полученную равнодействующую $\boldsymbol{R}_{12}$ со следующей силой $\boldsymbol{F}_3$. Количество сил вновь уменьшилось на единицу.

$$\boxed{\overline{R}_{1,2,3} = \overline{R}_{1,2} + \overline{F}_2}$$

Повторим эту же операцию со следующей силой $\boldsymbol{F}_4$. Осталась всего одна сила, эквивалентная исходной системе сил.

$$\boxed{\overline{R}_{1,2,3,4} = \overline{R}_{1,2,3} + \overline{F}_4}$$

Сложение сил построением параллелограммов можно заменить построением **силового треугольника** – выбирается одна из сил или изображается параллельно самой себе с началом в любой произвольной точке, все другие **силы изображаются параллельными самим себе с началом, совпадающим с концом предыдущей силы.**

Результатом такого сложения является вектор, направленный из начала первой силы к концу последней из сил.

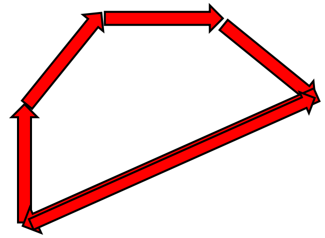
2. Простейший вид системы – сила, приложенная в точке пересечения исходных сил. Таким образом, сходящаяся система сил приводится к одной силе – **равнодействующей** (силе, эквивалентной исходной системе сил), равной геометрической сумме сил системы.

$$\boxed{\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4 + \ldots = \sum \overline{F}_i}$$

3. Если равнодействующая системы оказывается не равной нулю, тело под действием такой системы силы будет двигаться в направлении равнодействующей (система сил не уравновешена). Для того, чтобы уравновесить систему достаточно приложить силу, равную полученной равнодействующей и направленной в противоположную сторону (аксиома о двух силах). Таким образом, **условием равновесия системы сходящихся сил является обращение равнодействующей в ноль.**

$$\boxed{\overline{R} = \sum \overline{F}_i = 0}$$

Это условие эквивалентно замкнутости силового треугольника определенным образом, а именно, **направление всех сил при обходе по контуру не изменяется по направлению**:

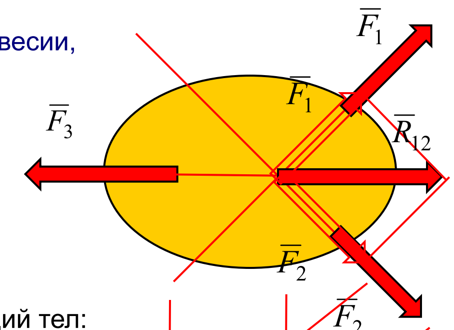


Лекция 2 (продолжение – 2.2)

- **Теорема о трех силах –** Если тело, под действием трех непараллельных сил находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке**.**

1. Перенесем две силы по линии их действия в точку их пересечения (кинематическое состояние тела при этом не изменится – следствие из аксиомы присоединения).

2. Сложим эти силы (аксиома параллелограмма). Теперь система состоит всего из двух сил. А такая система находится в равновесии, если эти силы равны между собой и направлены по одной линии в противоположные стороны. Таким образом, все три силы пересекаются в одной точке.

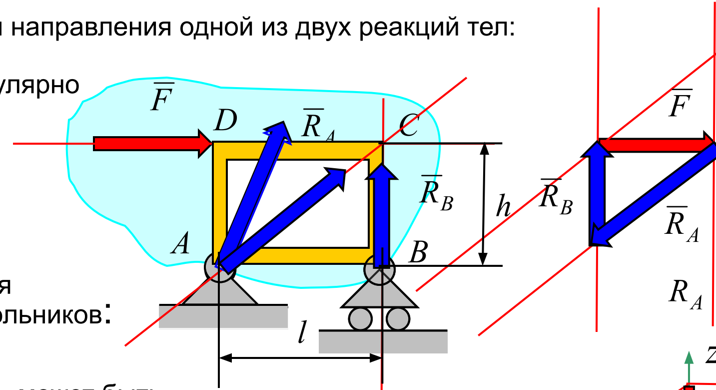


Теорема о трех силах может эффективно применяться для определения направления одной из двух реакций тел:

Реакция подвижного шарнира $\boldsymbol{R}_B$ направлена вертикально (перпендикулярно опорной плоскости). Направление (угол наклона к горизонту) реакции неподвижного шарнира $\boldsymbol{R}_A$ пока не определено.

Если тело под действием трех сил $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$ находится в равновесии, то все три силы должны пересекаться в одной точке (в точке C) :

Действительные направления и величины реакций легко определяются построением силового треугольника и использованием подобия треугольников:

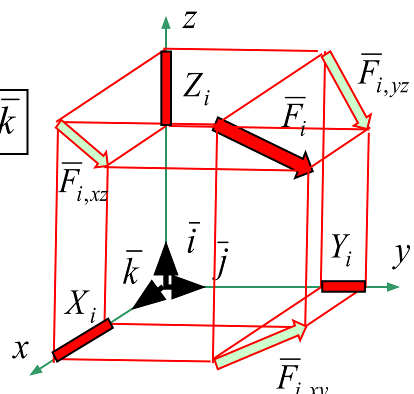


$$\frac{R_B}{F} = \frac{h}{l}$$

$$R_A = \sqrt{F^2 + R_B^2}$$

- **Аналитическое определение равнодействующей –** Каждая из сил, геометрическая сумма которых дает равнодействующую, может быть представлена через ее проекции на координатные оси и единичные векторы (орты):

$$\overline{F}_i = X_i\bar{i} + Y_i\bar{j} + Z_i\bar{k}$$



Тогда равнодействующая выражается через проекции сил в виде:

$$\overline{R} = \sum\overline{F}_i = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... = X_1\bar{i} + Y_1\bar{j} + Z_1\bar{k} + X_2\bar{i} + Y_2\bar{j} + Z_2\bar{k} + ...$$

Группировка по ортам дает выражения для проекций равнодействующей:

$$\overline{R} = (X_1 + X_2 + ...)\bar{i} + (Y_1 + Y_2 + ...)\bar{j} + (Z_1 + Z_2 + ...)\bar{k} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k}$$

Отсюда проекции равнодействующей :

$$R_x = \sum X_i; \quad R_y = \sum Y_i; \quad R_z = \sum Z_i;$$

Направляющие косинусы равнодействующей :

$$\cos(\overline{R}, x) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\overline{R}, y) = \frac{R_y}{R}.$$

Модуль равнодействующей :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

- **Уравнения равновесия сходящейся системы сил**

Условие равновесия: Равнодействующая должна обращаться в ноль:

$$\overline{R} = 0$$

Отсюда **уравнения равновесия** :

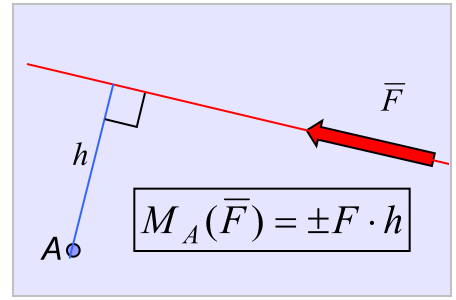
$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum Z_i = 0.$$

Лекция 2

- **Плоская произвольная система сил –** силы лежат в одной плоскости и их линии действия не пересекаются в одной точке**.**

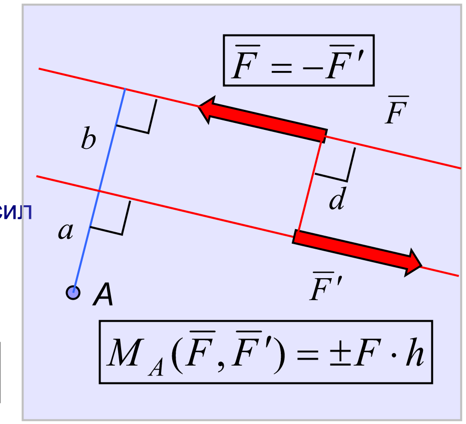
Для рассмотрения такой системы сил необходимо ввести новые понятия:

1. Момент силы относительно точки на плоскости.
2. Пара сил. Момент пары сил.



- **Момент силы относительно точки на плоскости –** алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятая со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием силы происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

  Плечо силы – длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы.



- **Пара сил –** совокупность двух параллельных друг другу сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны. Пара сил более не может быть упрощена (не может быть заменена одной силой) и представляет собой новую силовую характеристику механического взаимодействия.
- **Момент пары сил на плоскости** (теорема о моменте пары сил) **–** не зависит от выбора центра приведения (полюса) и равен произведению модуля любой из сил пары на плечо пары, взятым со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием пары сил происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

  Плечо пары сил – длина перпендикуляра, опущенного из любой точки на линии действия одной из сил пары на линию действия другой силы этой пары.

В независимости момента пары от выбора полюса можно убедиться вычислением суммы моментов от каждой из сил относительно любого центра.

$$\boxed{M_A(\overline{F}, \overline{F}') = F \cdot (a+b) - F'a = Fb = Fd}$$

- **О переносе пары сил в плоскости ее действия** – Пару сил можно перенести в любое место в плоскости ее действия. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **Об эквивалентности пар сил** – Пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты алгебраически равны. Кинематическое состояние тела не изменится.

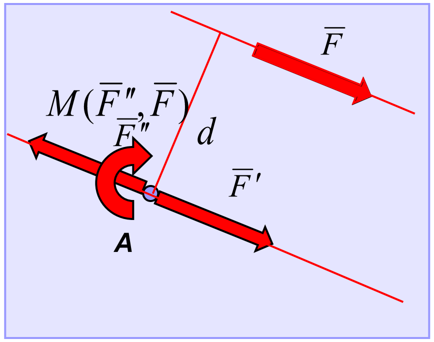
$$\boxed{M(\overline{F}_1, \overline{F}_1') = F_1 d_1, \quad M(\overline{F}_2, \overline{F}_2') = F_2 d_2; \quad F_1 d_1 = F_2 d_2 \;\Rightarrow\; (\overline{F}_1, \overline{F}_1') \equiv (\overline{F}_2, \overline{F}_2')}$$

- **О сложении пар сил на плоскости** – Систему пар сил на плоскости можно заменить одной парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных пар. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **Условие равновесия системы пар сил** -

$$\boxed{M = \sum M_i = 0}$$

Лекция 2

- **Приведение силы к заданному центру (метод Пуансо)** – силу можно перенести параллельно самой себе в любую точку плоскости, если добавить соответствующую пару сил, момент которой равен моменту этой силы относительно рассматриваемой точки.



Добавим к системе в точке *A* две силы, равные по величине между собой и величине заданной силы, направленные по одной прямой в противоположные стороны и параллельные заданной силе:

$$\boxed{\overline{F}'' = -\overline{F}' = -\overline{F}}$$

Кинематическое состояние не изменилось (аксиома о присоединении).

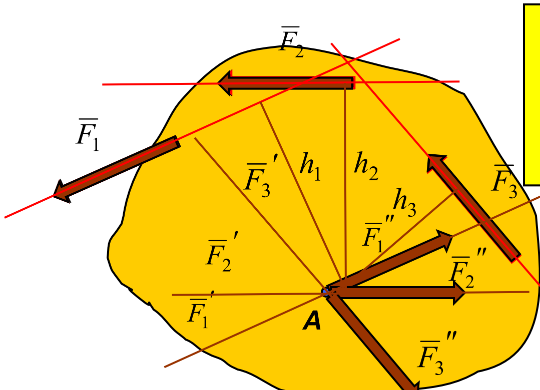
Исходная сила и одна из добавленных сил противоположно направленная образуют пару сил.

Момент этой пары численно равен моменту исходной силы относительно центра приведения.

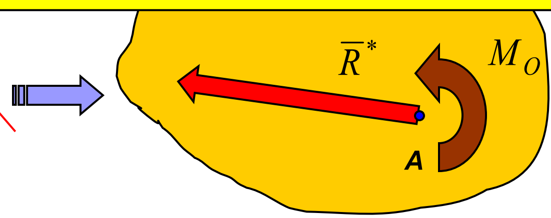
$$\boxed{M(\overline{F}'',\overline{F}) - F\cdot d = -F\cdot h = M_A(\overline{F})}$$

Во многих случаях пару сил удобно изображать дуговой стрелкой.

- **Приведение плоской произвольной системы сил к заданному центру** – выбираем произвольную точку на плоскости и каждую из сил переносим по методу Пуансо в эту точку. Вместо исходной произвольной системы получим сходящуюся систему сил и систему пар.



Сходящаяся система сил приводится к одной
называлась равнодействующей, но теперь эта
после приведения возникла система пар. Сис
пар), момент которой равен алгебраической с
приведения.



В общем случае плоская произвольная система сил приводится к одной силе, называемой главным вектором и к паре с моментом, равным главному моменту всех сил системы относительно центра приведения:

$\boxed{\overline{R}^* = \sum \overline{F}_i}$ **- главный вектор,**

$\boxed{M = M_A = \sum M_{iA}}$ **- главный момент.**

- **Условием равновесия плоской произвольной системы сил** является одновременное обращение главного вектора и главного момента системы в ноль:

$$\boxed{\overline{R}^* = \sum \overline{F}_i = 0} \qquad \boxed{M = M_A = \sum M_{iA} = 0}$$

- **Уравнения равновесия (I форма)** получаются в виде системы трех уравнений из условий равновесия с использованием выражений для проекций главного вектора:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{array}}$$

Существуют еще две формы уравнений Равновесия (II и III формы):

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum X_i = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{array}} \boxed{\begin{array}{l} x \\ \perp \\ AB \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \sum M_{iC} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{array}} \boxed{\begin{array}{l} C \\ \notin \\ AB \end{array}}$$