

Лекция 2

Система сходящихся сил – линии действия сил пересекаются в одной точке.

План исследования любой системы сил соответствует последовательному решению трех вопросов :

1. Как упростить систему?
2. Каков простейший вид системы?
3. Каковы условия равновесия системы?

1. Перенесем все силы по линии их действия в точку пересечения (кинематическое состояние тела при этом не изменится – следствие из аксиомы присоединения).

Сложим первые две силы F_1 и F_2 (аксиома параллелограмма).
Количество сил уменьшилось на единицу.

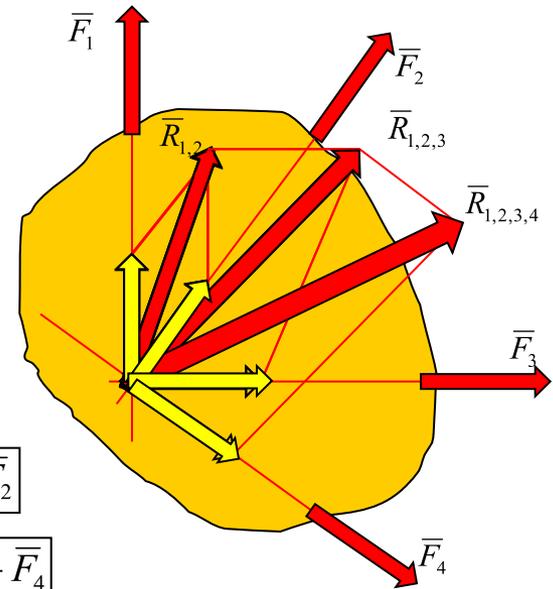
Сложим полученную равнодействующую R_{12} со следующей силой F_3 .
Количество сил вновь уменьшилось на единицу.

Повторим эту же операцию со следующей силой F_4 .
Осталась всего одна сила, эквивалентная исходной системе сил.

$$\bar{R}_{1,2} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

$$\bar{R}_{1,2,3} = \bar{R}_{1,2} + \bar{F}_3$$

$$\bar{R}_{1,2,3,4} = \bar{R}_{1,2,3} + \bar{F}_4$$



Сложение сил построением параллелограммов можно заменить построением **силового треугольника** – выбирается одна из сил или изображается параллельно самой себе с началом в любой произвольной точке, все другие **силы изображаются параллельными самим себе с началом, совпадающим с концом предыдущей силы**.

Результатом такого сложения является вектор, направленный из начала первой силы к концу последней из сил.

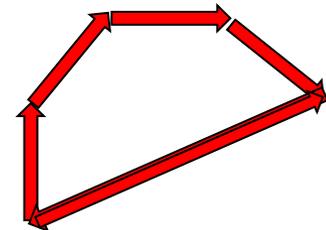
2. **Простейший вид системы** – сила, приложенная в точке пересечения исходных сил. Таким образом, сходящаяся система сил приводится к одной силе – **равнодействующей** (силе, эквивалентной исходной системе сил), равной геометрической сумме сил системы.

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 + \dots = \sum \bar{F}_i$$

3. Если равнодействующая системы оказывается не равной нулю, тело под действием такой системы силы будет двигаться в направлении равнодействующей (система сил не уравновешена). Для того, чтобы уравновесить систему достаточно приложить силу, равную полученной равнодействующей и направленной в противоположную сторону (аксиома о двух силах). Таким образом, **условием равновесия системы сходящихся сил является обращение равнодействующей в ноль**.

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0$$

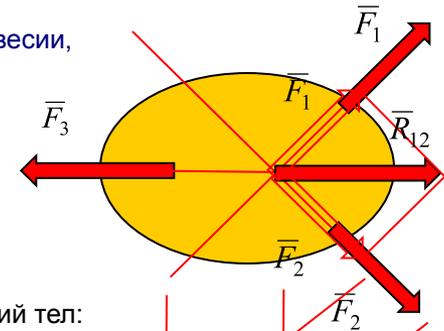
Это условие эквивалентно замкнутости силового треугольника определенным образом, а именно, **направление всех сил при обходе по контуру не изменяется по направлению**:



Лекция 2 (продолжение – 2.2)

- **Теорема о трех силах** – Если тело, под действием трех непараллельных сил находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

1. Перенесем две силы по линии их действия в точку их пересечения (кинематическое состояние тела при этом не изменится – следствие из аксиомы присоединения).
2. Сложим эти силы (аксиома параллелограмма). Теперь система состоит всего из двух сил. А такая система находится в равновесии, если эти силы равны между собой и направлены по одной линии в противоположные стороны. Таким образом, все три силы пересекаются в одной точке.

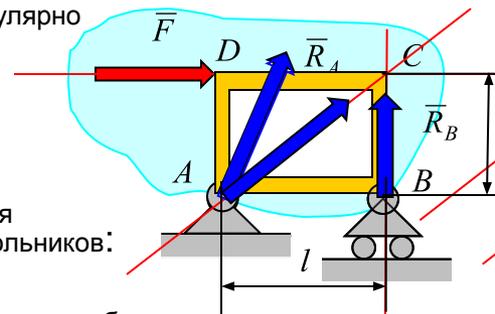


Теорема о трех силах может эффективно применяться для определения направления одной из двух реакций тел:

Реакция подвижного шарнира R_B направлена вертикально (перпендикулярно опорной плоскости). Направление (угол наклона к горизонту) реакции неподвижного шарнира R_A пока не определено.

Если тело под действием трех сил F , R_A и R_B находится в равновесии, то все три силы должны пересекаться в одной точке (в точке C) :

Действительные направления и величины реакций легко определяются построением силового треугольника и использованием подобия треугольников:



$$\frac{R_B}{F} = \frac{h}{l}$$

$$R_A = \sqrt{F^2 + R_B^2}$$

- **Аналитическое определение равнодействующей** – Каждая из сил, геометрическая сумма которых дает **равнодействующую**, может быть представлена через ее проекции на координатные оси и единичные векторы (орты):

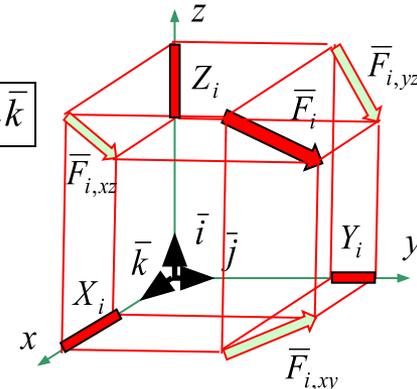
Тогда равнодействующая выражается через проекции сил в виде:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k} + X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k} + \dots$$

Группировка по ортам дает выражения для проекций равнодействующей:

$$\vec{R} = (X_1 + X_2 + \dots)\vec{i} + (Y_1 + Y_2 + \dots)\vec{j} + (Z_1 + Z_2 + \dots)\vec{k} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$$

$$\vec{F}_i = X_i\vec{i} + Y_i\vec{j} + Z_i\vec{k}$$



Отсюда проекции равнодействующей :

$$R_x = \sum X_i;$$

$$R_y = \sum Y_i;$$

$$R_z = \sum Z_i;$$

Направляющие косинусы равнодействующей :

$$\cos(\vec{R}, x) = \frac{R_x}{R};$$

$$\cos(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{R}.$$

- **Уравнения равновесия сходящейся системы сил**

Условие равновесия:
Равнодействующая должна обращаться в ноль:

$$\vec{R} = 0$$

Отсюда **уравнения равновесия** :

$$\sum X_i = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;$$

$$\sum Z_i = 0.$$

Модуль равнодействующей :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Лекция 2

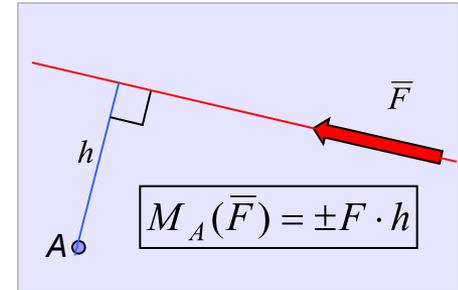
- **Плоская произвольная система сил** – силы лежат в одной плоскости и их линии действия не пересекаются в одной точке.

Для рассмотрения такой системы сил необходимо ввести новые понятия:

1. Момент силы относительно точки на плоскости.
2. Пара сил. Момент пары сил.

- **Момент силы относительно точки на плоскости** – алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятая со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием силы происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

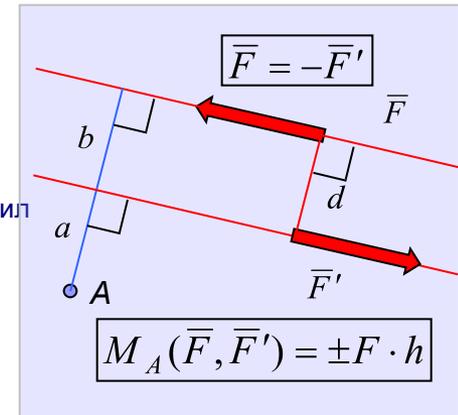
Плечо силы – длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы.



- **Пара сил** – совокупность двух параллельных друг другу сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны. Пара сил более не может быть упрощена (не может быть заменена одной силой) и представляет собой новую силовую характеристику механического взаимодействия.

- **Момент пары сил на плоскости (теорема о моменте пары сил)** – не зависит от выбора центра приведения (полюса) и равен произведению модуля любой из сил пары на плечо пары, взятым со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием пары сил происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

Плечо пары сил – длина перпендикуляра, опущенного из любой точки на линии действия одной из сил пары на линию действия другой силы этой пары.



В независимости момента пары от выбора полюса можно убедиться вычислением суммы моментов от каждой из сил относительно любого центра.

$$M_A(\vec{F}, \vec{F}') = F \cdot (a + b) - F'a = Fb = Fd$$

- **О переносе пары сил в плоскости ее действия** – Пару сил можно перенести в любое место в плоскости ее действия. Кинематическое состояние тела не изменится.

- **Об эквивалентности пар сил** – Пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты алгебраически равны. Кинематическое состояние тела не изменится.

$$M(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) = F_1 d_1, \quad M(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) = F_2 d_2; \quad F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}'_1) \equiv (\vec{F}_2, \vec{F}'_2)$$

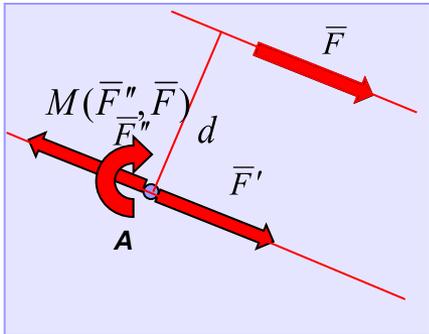
- **О сложении пар сил на плоскости** – Систему пар сил на плоскости можно заменить одной парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных пар. Кинематическое состояние тела не изменится.

- **Условие равновесия системы пар сил** -

$$M = \sum M_i = 0$$

Лекция 2

Приведение силы к заданному центру (метод Пуансо) – силу можно перенести параллельно самой себе в любую точку плоскости, если добавить соответствующую пару сил, момент которой равен моменту этой силы относительно рассматриваемой точки.



Добавим к системе в точке A две силы, равные по величине между собой и величине заданной силы, направленные по одной прямой в противоположные стороны и параллельные заданной силе:

$$\vec{F}'' = -\vec{F}$$

Кинематическое состояние не изменилось (аксиома о присоединении).

Исходная сила и одна из добавленных сил противоположно направленная образуют пару сил.

Момент этой пары численно равен моменту исходной силы относительно центра приведения.

$$M(\vec{F}'', \vec{F}) - F \cdot d = -F \cdot h = M_A(\vec{F})$$

Во многих случаях пару сил удобно изображать дуговой стрелкой.

Приведение плоской произвольной системы сил к заданному центру – выбираем произвольную точку на плоскости и каждую из сил переносим по методу Пуансо в эту точку. Вместо исходной произвольной системы получим сходящуюся систему сил и систему пар.

Сходящаяся система сил приводится к одной силе, называемой равнодействующей, но теперь эта сила (и система пар), момент которой равен алгебраической сумме моментов сил относительно центра приведения.

В общем случае плоская произвольная система сил приводится к одной силе, называемой главным вектором и к паре с моментом, равным главному моменту всех сил системы относительно центра приведения:

$$\vec{R}^* = \sum \vec{F}_i \quad \text{главный вектор,}$$

$$M = M_A = \sum M_{iA} \quad \text{главный момент.}$$

Условием равновесия плоской произвольной системы сил является одновременное обращение главного вектора и главного момента системы в ноль:

$$\vec{R}^* = \sum \vec{F}_i = 0$$

$$M = M_A = \sum M_{iA} = 0$$

Уравнения равновесия (I форма) получаются в виде системы трех уравнений из условий равновесия с использованием выражений для проекций главного вектора:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{cases}$$

Существуют еще две формы уравнений Равновесия (II и III формы):

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{cases} \begin{matrix} x \\ \perp \\ AB \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \sum M_{iC} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{cases} \begin{matrix} C \\ \notin \\ AB \end{matrix}$$