Тригонометрические уравнения

1. Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a,$

$\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, где a — действительное число.

1) если $|a| \leqslant 1$, то решения уравнения $\cos x = a$ имеют вид

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n;$$

2) если $|a| \leqslant 1$, то решения уравнения $\sin x = a$ имеют вид

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$$

$$x = \arcsin a + 2\pi k, \quad x = \pi - \arcsin a + 2\pi k;$$

3) если $|a| > 1$, то уравнения $\cos x = a$, $\sin x = a$ не имеют решений;

4) решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ для любого значения a имеют вид

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n;$$

5) следует выделить частные случаи:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n;$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n;$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n.$$

Во всех перечисленных формулах подразумевается, что параметр (n, k) принимает любые целочисленные значения ($n \in Z$, $k \in Z$).

Решить уравнения:

а) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

Введем новую переменную $t = 2x$.

$\sin t = \frac{1}{2}$

$t = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$

$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$

Пример 2. Найти те корни уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$, которые принадлежат отрезку $[0; \pi]$.

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$$

Если $n = 0$, то $x = (-1)^0 \frac{\pi}{12} + 0 = \frac{\pi}{12}$. Это число принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$.

Если $n = 1$, то $x = (-1)^1 \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}$. Это число принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$.

Если $n = 2$, то $x = (-1)^2 \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$. Это число не принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$.

Пусть теперь $n = -1$. Тогда

$$x = (-1)^{-1} \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{12}.$$

Это число не принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$.

Итак, заданному отрезку $[0; \pi]$ принадлежат те корни уравнения, которые получаются из общей формулы при следующих значениях параметра n: $n = 0$, $n = 1$. Эти корни таковы: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$

2. Два основных метода решения тригонометрических уравнений

. Решить уравнения:

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0;$$

Введем новую переменную: $z = \sin x$.

$$2z^2 - 5z + 2 = 0 \qquad z_1 = 2,\ z_2 = \frac{1}{2}$$

либо $\sin x = 2$, либо $\sin x = \frac{1}{2}$

не имеет корней

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Решить уравнение $\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\cos x + \frac{2}{5}\right) = 0.$

$$\sin x = \frac{1}{3}; \quad \cos x = -\frac{2}{5}.$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n; \quad x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi n.$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos 5x - \cos 5x = 0.$$

$$\cos 5x\left(2\sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0.$$

$$\cos 5x = 0; \quad \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \frac{x}{2} = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}. \quad x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in Z$.