Секрет обучения заключается в уважении к ученику (Ральф Эмерсон).

Линейная алгебра

Лекция 6

Агаев Рафиг Пашаевич

(доктор физ.-мат. наук)

Линейные пространства

- Определение линейного пространства
- Базис
- Линейная оболочка
- Изменение базиса
- Матрица перехода
- Примеры

Определение линейного пространства

- **Определение 1.** Множество L элементов $x, y, z, \dots$ называется линейным пространством, если:

a) имеется правило, посредством которого любым двум элементам x и y множества R ставится в соответствие третий элемент z этого множества, называемый суммой элементов x и y и обозначаемый через $x + y$;

b) Каждому элементу x и каждому числу λ из некоторого поля поставлен в соответствие элемент λx, называемый произведением числа λ на элемент x;

Эти две операции должны удовлетворять следующим требованиям (аксиомам):

A. 1) $x + y = y + x$ (коммутативность);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность);

3) Существует нулевой элемент $\mathbf{0}$ такой, что $x + \mathbf{0} = x$;

4) Для каждого элемента существует противоположный элемент, обозначаемый через $-x$, такой, что $x + (-x) = \mathbf{0}$.

Определение линейного пространства

В. 5) $1 \cdot x = x$;

6) $\alpha(\beta x) = \alpha\beta(x)$;

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Отметим, что иногда пункт 3) определяют как

3’) Существует нулевой элемент $\mathbf{0}$ такой, что для любого x верно $0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Примеры линейных пространств.

1) Векторы в трехмерном пространстве;

2) Система n чисел $x = (x_1, \dots, x_n)$. Для таких систем операции сложения и умножения на числа обычно определяется так: суммой систем $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ называется система $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. Произведением системы $x = (x_1, \dots, x_n)$ на число λ мы считаем систему $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$;

3) Совокупность всех непрерывных функций, заданных на сегменте $[a, b]$;

Определение линейного пространства. Пример

4) Совокупность всех многочленов степени, не превышающей натурального числа n;

5) Все матрицы порядка n;

И.М. Гельфанд пишет: «Элементы линейного пространства мы будем называть векторами. То обстоятельство, что это слово часто употребляется в более узком смысле (так, как в примере 1), не должно нас смущать.»

Если числа $\alpha, \ \beta, \ \ldots,$ участвующие в определении линейного пространства, вещественны, то пространство называется **вещественным линейным пространством**. Если же эти числа $\alpha, \ \beta, \ \ldots,$ берутся из поля комплексных чисел, то R называется **комплексным линейным пространством**.

Линейная зависимость векторов

Определение 2. Пусть R – лин. пространство. Векторы $x, y, z, \ldots, v$ называются **линейно зависимыми**, если существует такие числа $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots, \theta,$ из которых хотя бы одно отлично от нуля, что

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \ \ldots + \theta v = \mathbf{0}.$$

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми, называются линейно независимыми. Другими словами,

векторы $x, y, z, \ldots, v$ называются **линейно независимыми,** если равенство

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \ \ldots + \theta v = \mathbf{0}$$

возможно только при $\alpha = \ \beta = \ \ \gamma = \ \ldots = \ \theta = 0.$

Если вектор x выражается через векторы $y, z, \ldots, v$ в виде

$$x = \lambda y + \mu z + \ldots + \xi v,$$

то говорят, что x есть **линейная комбинация** векторов $y, z, \ldots, v$.

Если векторы $x, y, z, \ldots, v$ линейно зависимы, то **хотя бы один из них** является линейной комбинацией остальных.

О размерности линейного пространства

- **Определение 3.** Линейное пространство R называется **n-мерным**, если в нем существует n линейно независимых векторов, и нет большего числа линейно независимых векторов.

n - размерность пространства R. Обозначают как $\dim R$.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть R – пространство, векторами которого являются системы n действительных чисел. Тогда следующие n векторов линейно независимы:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$
$$e_2 = (0\ 1, \ldots, 0),$$
$$e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

2. R – пространство многочленов степени не выше n-1. В нем n многочленов $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$ линейно независимы.

3. В пространстве квадратных матриц n^2 матриц, у которых на одном месте стоит единица, а все остальные нули, линейно независимы

Базис линейного пространства

Определение 4. Совокупность n линейно независимых векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ n-мерного пространства R называется базисов в R.

Теорема 1. Каждый вектор x из n-мерного пространства R, можно представить, и притом единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса.

Определение 5. Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ есть базис в n-мерном пространстве и

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n,$$

то числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называются **координатами** вектора x в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Определение 6. Линейные пространства R и R' называются **изоморфными,** если между векторами $x \in R$ и $x' \in R'$ можно установить взаимно однозначное соответствие так, что если x соответствует вектору x', а вектор y соответствует вектору y', тогда

1) Вектор $x + y$ соответствует вектору $x' + y'$;

2) Вектор λx соответствует вектору $\lambda x'$.

Важно знать! Линейно независимым векторам из R соответствуют лин.независим. из R'.

Теорема 2. Два пространства одного размера изоморфны.

Подпространство

- **Определение 7.** Подпространством R' пространства R называется совокупность элементов из R таких, что они сами образуют линейное пространство относительно уже введенных в R операции сложения и умножения на числа.

Пример 1. Нулевое подпространство.

Пример 2. В трехмерном пространстве любая плоскость , проходящая через начало координат.

Пример 3. В n-мерном пространстве с векторами $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ всевозможные вектора $x = (0, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ образуют подпространство размерности $n - 1$.

Подпространство R' является **порожденным** векторами $v_1, v_2, \ldots, v_k$, если каждый его вектор является линейной комбинацией векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Если векторы $v_1, v_2, \ldots, v_k$ лин. независимы, то размерность подпространства R' равна k, и сами векторы $v_1, v_2, \ldots, v_k$ образуют в нем базис.

Разложение пространства в прямую сумму

- Пусть заданы два подпространства n–мерного пространства R: R_1 и R_2.

Определение 8. Если каждый вектор x пространства R можно, и притом единственным образом, представить как сумму двух векторов,

$$x = x_1 + x_2,$$

где $x_1 \in R_1$, а $x_2 \in R_2$, то говорят, что пространство R разложена в прямую сумму подпространств R_1 и R_2 и пишут

$R = R_1 \oplus R_2$.

Теорема 3. Для того, чтобы пространства R разлагалась в прямую сумму подпространств R_1 и R_2, достаточно, чтобы;

Подпространства R_1 и R_2 имели только один общий нулевой вектор $x = \mathbf{0}$;

Сумма размерностей этих подпространств была равна размерности пространства R .

Рассмотрим такой вопрос: если $R(A)$ и $N(A)$ – образ и ядро матрицы порядка n, то в каком случае верно $R = R_1 \oplus R_2$, где R – n-мерное пространство? Исследовать на примере матрицы A=[0 1 0;0 0 1;0 0 0].

Линейная оболочка

4) Совокупность всех многочленов степени, не превышающей натурального числа n;

5) Все матрицы порядка n;

И.М. Гельфанд пишет: «Элементы линейного пространства мы будем называть векторами. То обстоятельство, что это слово часто употребляется в более узком смысле (так, как в примере 1), не должно нас смущать.»

Если числа $\alpha,\ \beta,\ \ldots,$ участвующие в определении линейного пространства, вещественны, то пространство называется **вещественным линейным пространством**. Если же эти числа $\alpha,\ \beta,\ \ldots,$ берутся из поля комплексных чисел, то R называется **комплексным линейным пространством**.

Пример

Пример1. [Ikramov, 1.4.39]. Найти размерность и какой-либо базис линейной оболочки, натянутый на следующую систему многочленов:

$$t^6+t^4,\ t^6+3t^4-t,\ t^6-2t^4+t,\ t^6-4t^4+2t.$$

Решение. Представим эти многочлены в векторном виде из 6 компонент, поскольку минимальная степень равна 1 (степень t).

$t^6+t^4 \quad \to [0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$,

$t^6+3t^4-t \to [-1\ 0\ 0\ 3\ 0\ 1]^T$,

$t^6-2t^4+t \to [1\ 0\ 0\ \ -2\ 0\ 1]^T$,

$t^6-4t^4+2t \to [2\ 0\ 0\ \ -4\ 0\ 1]^T$.

Эти векторы запишем в виде строк матриц и исследуем ее ранг.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В качестве базиса можно использовать многочлены

$t^6,\ t^4,\quad t.$

Линейная оболочка

- **Утверждение 1.** Каждая линейная оболочка $L(x, y, z, \ldots, v)$ является линейным подпространством R' пространства R, содержащего векторы $x, y, z, \ldots, v$.

Утверждение можно доказать простой проверкой аксиом линейного пространства, приведенных в определении 1.

Утверждение 2. Рассмотрим линейно независимые векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k \in R$. Тогда подпространство $R' = L(e_1, e_2, \ldots, e_k)$, порожденное этими векторами, является k-мерным, и линейно независимые векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k$ образуют в R' базис.

Преобразование координат при изменении базиса

- **Теорема 4.** Пусть заданы два подпространства R_1 и R_2 пространства R. Тогда сумма размерностей R_1 и R_2 равна размерности их суммы плюс размерность их пересечения.

Отметим, что пересечение двух подпространств лин. пространства снова является (под)пространством.

Преобразование координат при изменении базиса

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ два базиса n-мерного пространства. Пусть каждый вектор e'_i выражается через векторы первого базиса формулами

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n, \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Тогда переход от первого базиса к второму задается невырожденной матрицей $A = [a_{ik}]$.

Рассмотрим вектор x в n-мерном пространстве. Пусть $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $X'=(x_1',x_2',\ldots,x_n')$ координаты этого же вектора в базисах $e_1,e_2,\ldots,e_n$ и $e_1',e_2',\ldots,e_n'$, соответственно.

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\ldots x_ne_n=x_1'e_1'+x_2'e_2'+\cdots+x_n'e_n' \qquad (2).$$

В (2) вместо e_i' подставив их выражения (1) через $e_1,e_2,\ldots,e_n$ и получим

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\ldots x_ne_n=x_1'e_1'+x_2'e_2'+\cdots+x_n'e_n'=$$
$$=x_1'(a_{11}e_1+a_{21}e_2+\cdots+a_{n1}e_n)+$$
$$+x_2'(a_{12}e_1+a_{22}e_2+\cdots+a_{n2}e_n)+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+x_n'(a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+\cdots+a_{nn}e_n).$$

С другой стороны, вектор x однозначно определяется по базису $e_1,e_2,\ldots,e_n$, и поэтому коэффициенты при векторах e_i одинаковы, т.е.:

$$\begin{cases} x_1=a_{11}x_1'+a_{12}x_2'+\cdots+a_{1n}x_n', \\ x_2=a_{21}x_1'+a_{22}x_2'+\cdots+a_{2n}x_n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=a_{n1}x_1'+a_{n2}x_2'+\cdots+a_{nn}x_n'. \end{cases} \qquad (3)$$

изменение базиса

- $$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \cdots + a_{1n}x_n', \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \cdots + a_{2n}x_n', \\ \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \cdots + a_{nn}x_n'. \end{cases} \tag{3}$$

Из (3) очевидно, что если $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ и $X' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ координаты этого же вектора в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e_1', e_2', \ldots, e_n'$, соответственно, тогда

$$X = AX', \tag{4}$$

т.е. матрица A выражает **«старые» координаты** через «новые» и в силу невырожденности матрицы A

$$X' = A^{-1}X.$$

Заметка. Пусть E – матрица из столбцов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, т.е. $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Также положим $E' = (e_1', e_2', \ldots, e_n')$. Тогда (1) можно представить как

$$E' = EA \text{ или же } E = A^{-1}E'. \tag{5}$$

***k*-й столбец матрицы *A* содержит «старые» координаты *k*-го «нового» базисного вектора.**

Примеры

- Пример 2. Найти матрицу перехода A от базиса $E = (e_1, e_2, e_3)$ к базису $E' = (e_1', e_2', e_3')$, где векторы заданы своими координатами в некотором базисе:

$e_1 = (1, 1, 1)^T$; $e_2 = (1, 2, 3)^T$; $e_3 = (1, 0, 1)^T$;

$e_1' = (-1, 0, 1)^T$; $e_2' = (1, 3, 3)^T$; $e_3' = (1, -1, -1)^T$.

Составляем две матрицы E' и E воспользуемся формулой (5) из которой следует

$$E^{-1}E' = A\,.$$

$$E' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix};\ E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу и определяем матрицу перехода A:

$$A = E^{-1}E' = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Примеры

Пример 3. В линейном пространстве многочленов степени не выше 2 даны два базиса $E = (e_1, e_2, e_3)$ и $E = (e_1, e_2, e_3)$. Найти матрицу перехода A от базиса E к базису E', где векторы заданы своими координатами в некотором базисе:

$a_1 = 3 + x^2, \qquad a_2 = x + 2, \qquad a_3 = x^2 + x,$

$a_1' = 1,\ a_2' = x - 1, \qquad a_3' = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$

Эти базисы запишем в виде векторов

$e_1 = (3, 0, 1)^T;\ e_2 = (2, 1, 0)^T; e_3 = (0, 1, 1)^T;$

$e_1' = (1, 0, 0)^T;\ e_2' = (-1, 1, 0)^T; e_3' = (1, -2,\ 1)^T.$

Составляем две матрицы E' и E воспользуемся формулой (5) из которой следует

$$E^{-1}E' = A\,.$$

$$E' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ E = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу и определяем матрицу перехода A:

$$A = E^{-1}E' = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -8 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Преобразование координат вектора при замене базиса пространства

- **Пример 4**. Пусть в линейном пространстве задан вектор $\mathbf{x}=(1,4,-1)^{\mathbf{T}}$ в базисе E и новый базис E': $e_1'=(5,-1,2)^T$; $e_2'=(2,3,0)^T$; $e_3'=(-2,1,\ \ 1)^T$. Найти координаты $\mathbf{x}$ в базисе E'.

Решение.

Имеет место

$$\begin{bmatrix}1\\4\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-1\\2\end{bmatrix}x'_1+\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}x'_2+\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}x'_3=\begin{bmatrix}5&2&-2\\-1&3&1\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2&-2\\-1&3&1\\2&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\4\\-1\end{bmatrix}=\frac{1}{33}\begin{bmatrix}-13\\42\\-7\end{bmatrix}.$$

Проверка на лин. независимость и представление вектора относительно этого базиса

- Пример 5. Докажите, что многочлены $3t^2 + 2t + 1$, $-t^2 + 2t$, $t^2 - t$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше 2 и представить многочлен $6t^2 - 5t + 8$ относительно этого базиса, т.е. найти его координаты в этом базисе.

Решение.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Данные многочлены линейно независимы и образуют базис.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -39 \\ -57 \end{bmatrix}.$$

a

b