

**Секрет обучения заключается в уважении к ученику (Ральф Эмерсон).**

# **Линейная алгебра**

## **Лекция 6**

**Агаев Рафиг Пашаевич**  
**(доктор физ.-мат. наук)**

# Линейные пространства

- **Определение линейного пространства**
- **Базис**
- **Линейная оболочка**
- **Изменение базиса**
- **Матрица перехода**
- **Примеры**

# Определение линейного пространства

**Определение 1.** Множество  $L$  элементов  $x, y, z, \dots$  называется линейным пространством, если:

- a) имеется правило, посредством которого любым двум элементам  $x$  и  $y$  множества  $R$  ставится в соответствие третий элемент  $z$  этого множества, называемый суммой элементов  $x$  и  $y$  и обозначаемый через  $x + y$ ;
- b) Каждому элементу  $x$  и каждому числу  $\lambda$  из некоторого поля поставлен в соответствие элемент  $\lambda x$ , называемый произведением числа  $\lambda$  на элемент  $x$ ;

Эти две операции должны удовлетворять следующим требованиям (аксиомам):

- A. 1)  $x + y = y + x$  (коммутативность);
- 2)  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (ассоциативность);
- 3) Существует нулевой элемент  $\mathbf{0}$  такой, что  $x + \mathbf{0} = x$ ;
- 4) Для каждого элемента существует противоположный элемент, обозначаемый через  $-x$ , такой, что  $x + (-x) = \mathbf{0}$ .

# Определение линейного пространства

В. 5)  $1 \cdot x = x$ ;

6)  $\alpha(\beta x) = \alpha\beta(x)$ ;

7)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ;

8)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ .

Отметим, что иногда пункт 3) определяют как

3') Существует нулевой элемент  $\mathbf{0}$  такой, что для любого  $x$  верно  $\mathbf{0} \cdot x = \mathbf{0}$ .

## Примеры линейных пространств.

1) Векторы в трехмерном пространстве;

2) Система  $n$  чисел  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Для таких систем операции сложения и умножения на числа обычно определяется так: суммой систем  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, \dots, y_n)$  называется система  $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ . Произведением системы  $x = (x_1, \dots, x_n)$  на число  $\lambda$  мы считаем систему  $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ ;

3) Совокупность всех непрерывных функций, заданных на сегменте  $[a, b]$ ;

## Определение линейного пространства. Пример

- 4) Совокупность всех многочленов степени, не превышающей натурального числа  $n$ ;
- 5) Все матрицы порядка  $n$ ;

И.М. Гельфанд пишет: «Элементы линейного пространства мы будем называть векторами. То обстоятельство, что это слово часто употребляется в более узком смысле (так, как в примере 1), не должно нас смущать.»

Если числа  $\alpha, \beta, \dots$ , участвующие в определении линейного пространства, вещественны, то пространство называется **вещественным линейным пространством**. Если же эти числа  $\alpha, \beta, \dots$ , берутся из поля комплексных чисел, то  $R$  называется **комплексным линейным пространством**.

# Линейная зависимость векторов

**Определение 2.** Пусть  $R$  – лин. пространство. Векторы  $x, y, z, \dots, v$  называются **линейно зависимыми**, если существует такие числа  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \theta$ , из которых хотя бы одно отлично от нуля, что

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots + \theta v = \mathbf{0}.$$

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми, называются **линейно независимыми**. Другими словами,

векторы  $x, y, z, \dots, v$  называются **линейно независимыми**, если равенство

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots + \theta v = \mathbf{0}$$

возможно только при  $\alpha = \beta = \gamma = \dots = \theta = 0$ .

Если вектор  $x$  выражается через векторы  $y, z, \dots, v$  в виде

$$x = \lambda y + \mu z + \dots + \xi v,$$

то говорят, что  $x$  есть **линейная комбинация** векторов  $y, z, \dots, v$ .

Если векторы  $x, y, z, \dots, v$  линейно зависимы, то **хотя бы один из них** является линейной комбинацией остальных.

## О размерности линейного пространства

**Определение 3.** Линейное пространство  $R$  называется  **$n$ -мерным**, если в нем существует  $n$  линейно независимых векторов, и нет большего числа линейно независимых векторов.

$n$  - размерность пространства  $R$ . Обозначают как  $\dim R$ .

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть  $R$  – пространство, векторами которого являются системы  $n$  действительных чисел. Тогда следующие  $n$  векторов линейно независимы:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

2.  $R$  – пространство многочленов степени не выше  $n-1$ . В нем  $n$  многочленов  $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$  линейно независимы.

3. В пространстве квадратных матриц  $n^2$  матриц, у которых на одном месте стоит единица, а все остальные нули, линейно независимы

# Базис линейного пространства

**Определение 4.** Совокупность  $n$  линейно независимых векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$   $n$ -мерного пространства  $R$  называется базисом в  $R$ .

**Теорема 1.** Каждый вектор  $x$  из  $n$ -мерного пространства  $R$ , можно представить, и притом единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса.

**Определение 5.** Если  $e_1, e_2, \dots, e_n$  есть базис в  $n$ -мерном пространстве и

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n,$$

то числа  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  называются **координатами** вектора  $x$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

**Определение 6.** Линейные пространства  $R$  и  $R'$  называются **изоморфными**, если между векторами  $x \in R$  и  $x' \in R'$  можно установить взаимно однозначное соответствие так, что если  $x$  соответствует вектору  $x'$ , а вектор  $y$  соответствует вектору  $y'$ , тогда

- 1) Вектор  $x + y$  соответствует вектору  $x' + y'$ ;
- 2) Вектор  $\lambda x$  соответствует вектору  $\lambda x'$ .

Важно знать! Линейно независимым векторам из  $R$  соответствуют лин.независим. из  $R'$ .

**Теорема 2.** Два пространства одного размера изоморфны.



# Подпространство

**Определение 7.** Подпространством  $R'$  пространства  $R$  называется совокупность элементов из  $R$  таких, что они сами образуют линейное пространство относительно уже введенных в  $R$  операции сложения и умножения на числа.

**Пример 1.** Нулевое подпространство.

**Пример 2.** В трехмерном пространстве любая плоскость, проходящая через начало координат.

**Пример 3.** В  $n$ -мерном пространстве с векторами  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  всевозможные вектора  $x = (0, x_2, x_3, \dots, x_n)$  образуют подпространство размерности  $n - 1$ .

Подпространство  $R'$  является **порожденным** векторами  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , если каждый его вектор является **линейной комбинацией векторов**  $v_1, v_2, \dots, v_k$ .

Если векторы  $v_1, v_2, \dots, v_k$  лин. независимы, то размерность подпространства  $R'$  равна  $k$ , и сами векторы  $v_1, v_2, \dots, v_k$  образуют в нем базис.

# Разложение пространства в прямую сумму

Пусть заданы два подпространства  $n$ -мерного пространства  $R$ :  $R_1$  и  $R_2$ .

**Определение 8.** Если каждый вектор  $x$  пространства  $R$  можно, и притом единственным образом, представить как сумму двух векторов,

$$x = x_1 + x_2,$$

где  $x_1 \in R_1$ , а  $x_2 \in R_2$ , то говорят, что пространство  $R$  разложена в прямую сумму подпространств  $R_1$  и  $R_2$  и пишут

$$R = R_1 \oplus R_2.$$

**Теорема 3.** Для того, чтобы пространства  $R$  разлагалась в прямую сумму подпространств  $R_1$  и  $R_2$ , достаточно, чтобы;

Подпространства  $R_1$  и  $R_2$  имели только один общий нулевой вектор  $x = \mathbf{0}$ ;

Сумма размерностей этих подпространств была равна размерности пространства  $R$ .

Рассмотрим такой вопрос: если  $R(A)$  и  $N(A)$  – образ и ядро матрицы порядка  $n$ , то в каком случае верно  $R = R_1 \oplus R_2$ , где  $R$  –  $n$ -мерное пространство? Исследовать на примере матрицы  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

## Линейная оболочка

- 4) Совокупность всех многочленов степени, не превышающей натурального числа  $n$ ;
- 5) Все матрицы порядка  $n$ ;

И.М. Гельфанд пишет: «Элементы линейного пространства мы будем называть векторами. То обстоятельство, что это слово часто употребляется в более узком смысле (так, как в примере 1), не должно нас смущать.»

Если числа  $\alpha, \beta, \dots$ , участвующие в определении линейного пространства, вещественны, то пространство называется **вещественным линейным пространством**. Если же эти числа  $\alpha, \beta, \dots$ , берутся из поля комплексных чисел, то  $R$  называется **комплексным линейным пространством**.



## Пример

**Пример 1.** [Икрамов, 1.4.39]. Найти размерность и какой-либо базис линейной оболочки, **натянутый** на следующую систему многочленов:

$$t^6 + t^4, \quad t^6 + 3t^4 - t, \quad t^6 - 2t^4 + t, \quad t^6 - 4t^4 + 2t.$$

**Решение.** Представим эти многочлены в векторном виде из 6 компонент, поскольку минимальная степень равна 1 (степень  $t$ ).

$$t^6 + t^4 \rightarrow [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T,$$

$$t^6 + 3t^4 - t \rightarrow [-1 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 1]^T,$$

$$t^6 - 2t^4 + t \rightarrow [1 \ 0 \ 0 \ -2 \ 0 \ 1]^T,$$

$$t^6 - 4t^4 + 2t \rightarrow [2 \ 0 \ 0 \ -4 \ 0 \ 1]^T.$$

Эти векторы запишем в виде строк матриц и исследуем ее ранг.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В качестве базиса можно использовать многочлены

$$t^6, \quad t^4, \quad t.$$

## Линейная оболочка

**Утверждение 1.** Каждая линейная оболочка  $L(x, y, z, \dots, v)$  является линейным подпространством  $R'$  пространства  $R$ , содержащего векторы  $x, y, z, \dots, v$ .

Утверждение можно доказать простой проверкой аксиом линейного пространства, приведенных в определении 1.

**Утверждение 2.** Рассмотрим линейно независимые векторы  $e_1, e_2, \dots, e_k \in R$ . Тогда подпространство  $R' = L(e_1, e_2, \dots, e_k)$ , порожденное этими векторами, является  $k$ -мерным, и линейно независимые векторы  $e_1, e_2, \dots, e_k$  образуют в  $R'$  базис.







## изменение базиса

- $$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \dots + a_{1n}x'_n, \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \dots + a_{2n}x'_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n = a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \dots + a_{nn}x'_n. \end{cases} \quad (3)$$

Из (3) очевидно, что если  $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  и  $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  координаты этого же вектора в базисах  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ , соответственно, тогда

$$X = AX', \quad (4)$$

т.е. матрица  $A$  выражает «старые» координаты через «новые» и в силу невырожденности матрицы  $A$

$$X' = A^{-1}X.$$

**Заметка.** Пусть  $E$  – матрица из столбцов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , т.е.

$E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Также положим  $E' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ . Тогда (1) можно представить как

$$E' = EA \text{ или же } E = A^{-1}E'. \quad (5)$$

**$k$ -й столбец матрицы  $A$  содержит «старые» координаты  $k$ -го «нового» базисного вектора.**



## Примеры

**Пример 2.** Найти матрицу перехода  $A$  от базиса  $E = (e_1, e_2, e_3)$  к базису  $E' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ , где векторы заданы своими координатами в некотором базисе:

$$e_1 = (1, 1, 1)^T; e_2 = (1, 2, 3)^T; e_3 = (1, 0, 1)^T;$$

$$e'_1 = (-1, 0, 1)^T; e'_2 = (1, 3, 3)^T; e'_3 = (1, -1, -1)^T.$$

Составляем две матрицы  $E'$  и  $E$  воспользуемся формулой (5) из которой следует

$$E^{-1}E' = A.$$
$$E' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу и определяем матрицу перехода  $A$ :

$$A = E^{-1}E' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Примеры

**Пример 3.** В линейном пространстве многочленов степени не выше 2 даны два базиса  $E = (e_1, e_2, e_3)$  и  $E' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ . Найти матрицу перехода  $A$  от базиса  $E$  к базису  $E'$ , где векторы заданы своими координатами в некотором базисе:

$$a_1 = 3 + x^2, \quad a_2 = x + 2, \quad a_3 = x^2 + x, \\ a'_1 = 1, \quad a'_2 = x - 1, \quad a'_3 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

Эти базисы запишем в виде векторов

$$e_1 = (3, 0, 1)^T; \quad e_2 = (2, 1, 0)^T; \quad e_3 = (0, 1, 1)^T; \\ e'_1 = (1, 0, 0)^T; \quad e'_2 = (-1, 1, 0)^T; \quad e'_3 = (1, -2, 1)^T.$$

Составляем две матрицы  $E'$  и  $E$  воспользуемся формулой (5) из которой следует

$$E^{-1}E' = A. \\ E' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу и определяем матрицу перехода  $A$ :

$$A = E^{-1}E' = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -8 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

# Преобразование координат вектора при замене базиса пространства

**Пример 4.** Пусть в линейном пространстве задан вектор  $\mathbf{x} = (1, 4, -1)^T$  в базисе  $E$  и новый базис  $E'$ :  $e'_1 = (5, -1, 2)^T$ ;  $e'_2 = (2, 3, 0)^T$ ;  $e'_3 = (-2, 1, 1)^T$ . Найти координаты  $\mathbf{x}$  в базисе  $E'$ .

**Решение.**

Имеет место

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} x'_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} x'_2 + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x'_3 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} -13 \\ 42 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

## Проверка на лн. независимость и представление вектора относительно этого базиса

**Пример 5.** Докажите, что многочлены  $3t^2 + 2t + 1$ ,  $-t^2 + 2t$ ,  $t^2 - t$  образуют базис в пространстве многочленов степени не выше 2 и представить многочлен  $6t^2 - 5t + 8$  относительно этого базиса, т.е. найти его координаты в этом базисе.

**Решение.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Данные многочлены линейно независимы и образуют базис.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -39 \\ -57 \end{bmatrix}.$$

**a**

**b**