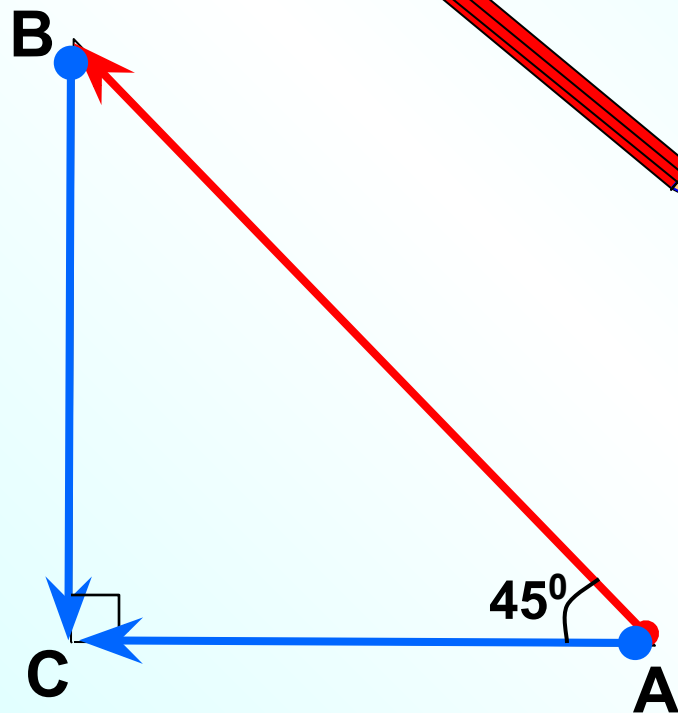




Сложение и вычитание векторов

Л.С. Атанасян "Геометрия 7-9"

Какая запись является верной?



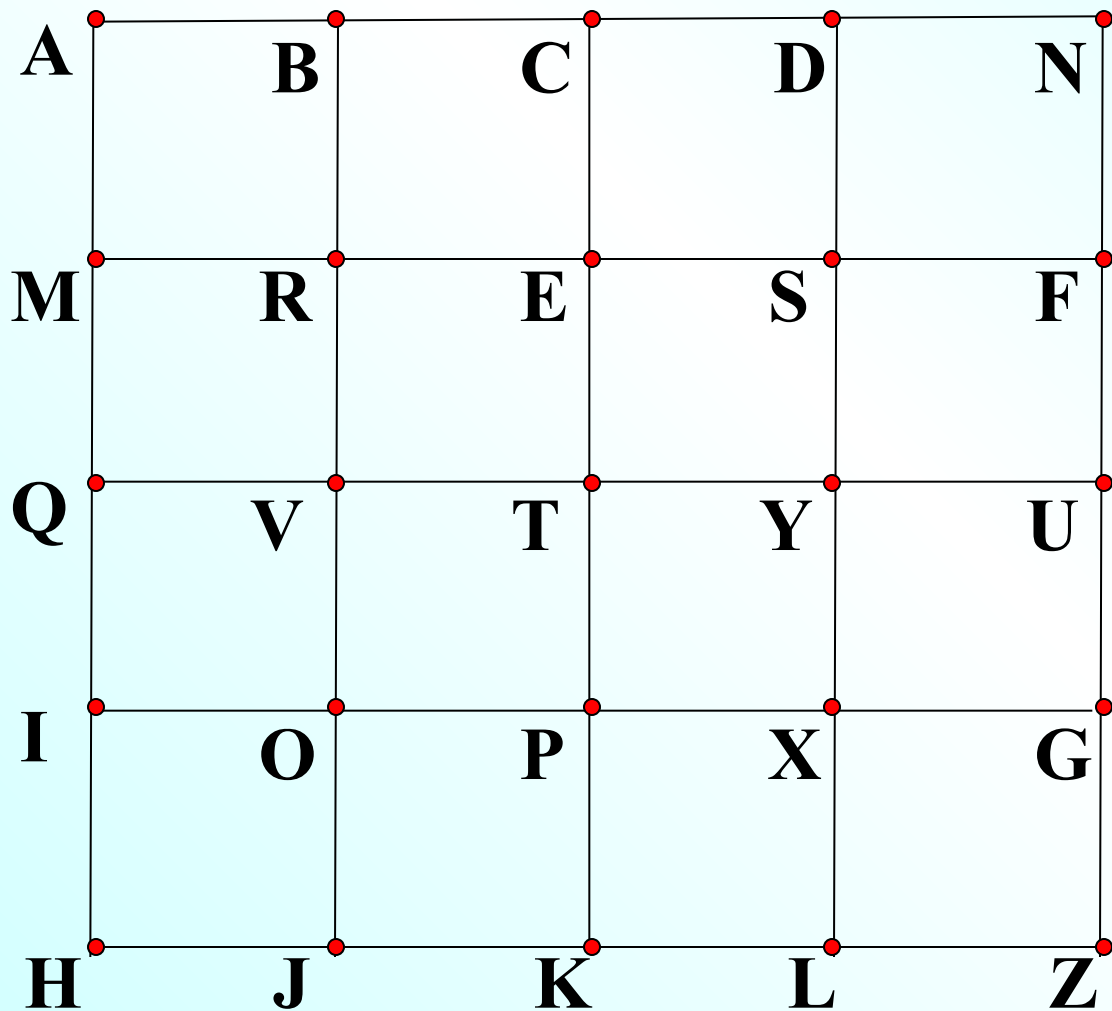
~~$\vec{AB} > \vec{BC};$~~

~~$|\vec{AB}| > |\vec{BC}|$~~

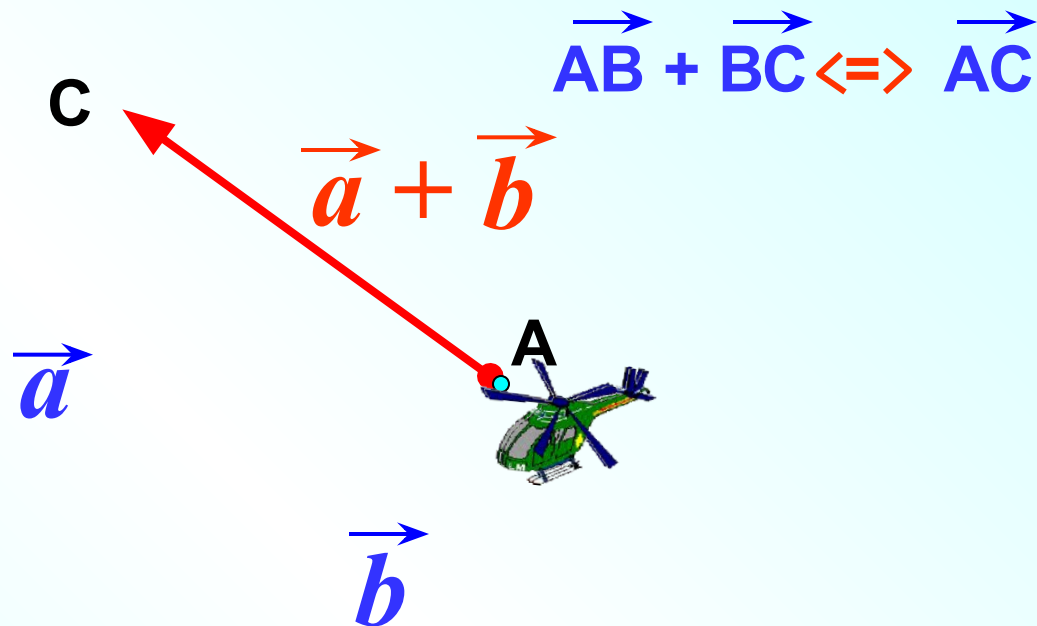
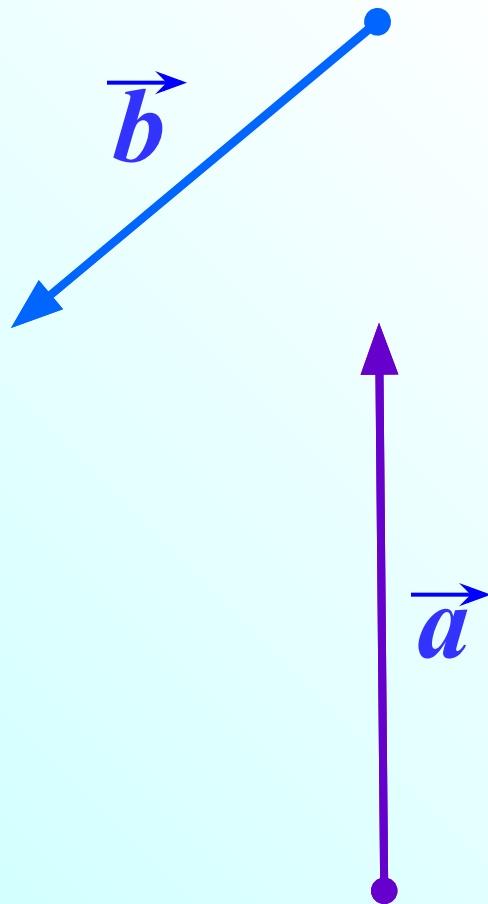
~~$|\vec{AC}| = |\vec{BC}|;$~~

~~$\vec{AC} = \vec{BC}$~~

Назовите **равные** векторы



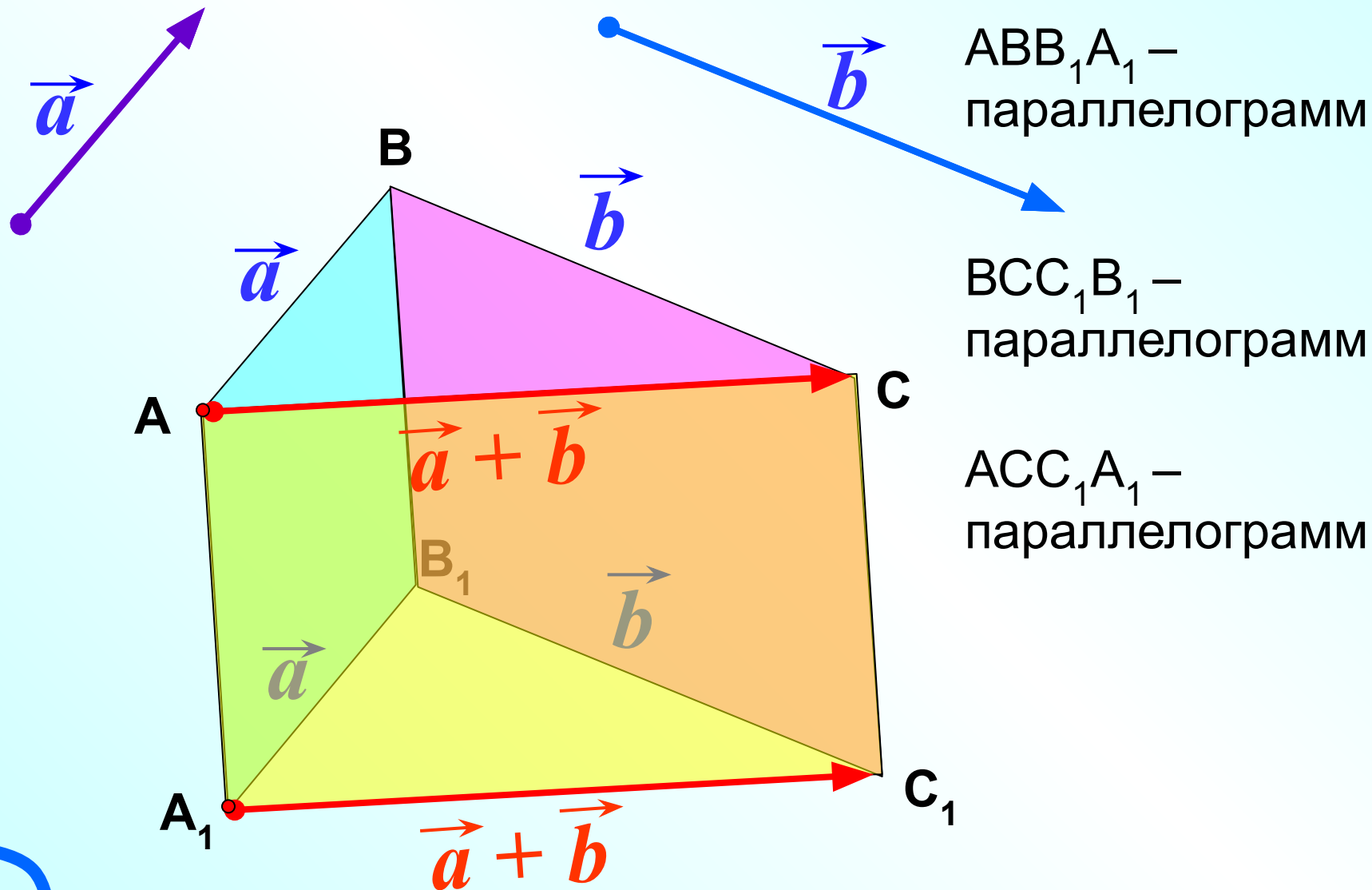
Сложение векторов. Правило треугольника.



Для любого нулевого вектора справедливо равенство

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad !$$

Докажем, что если при сложении векторов точку A заменить другой точкой A_1 , то полученный вектор $\vec{A_1C_1}$ будет равен \vec{AC} . Рассмотрим случай.



Правило треугольника.

$$\vec{AB} + \vec{BC} \Rightarrow \vec{AC}$$

$$\vec{AO} + \vec{OP} = \vec{AP}$$

$$\vec{MN} + \vec{NR} = \vec{MR}$$

$$\vec{MK} + \vec{KM} \Rightarrow \vec{MM} = \vec{0}$$

$$\vec{MK} + \vec{OM} \Rightarrow \vec{OM} + \vec{MK} = \vec{OK}$$



Правило треугольника.

$$\vec{AC} \Rightarrow \vec{AB} + \vec{BC}$$

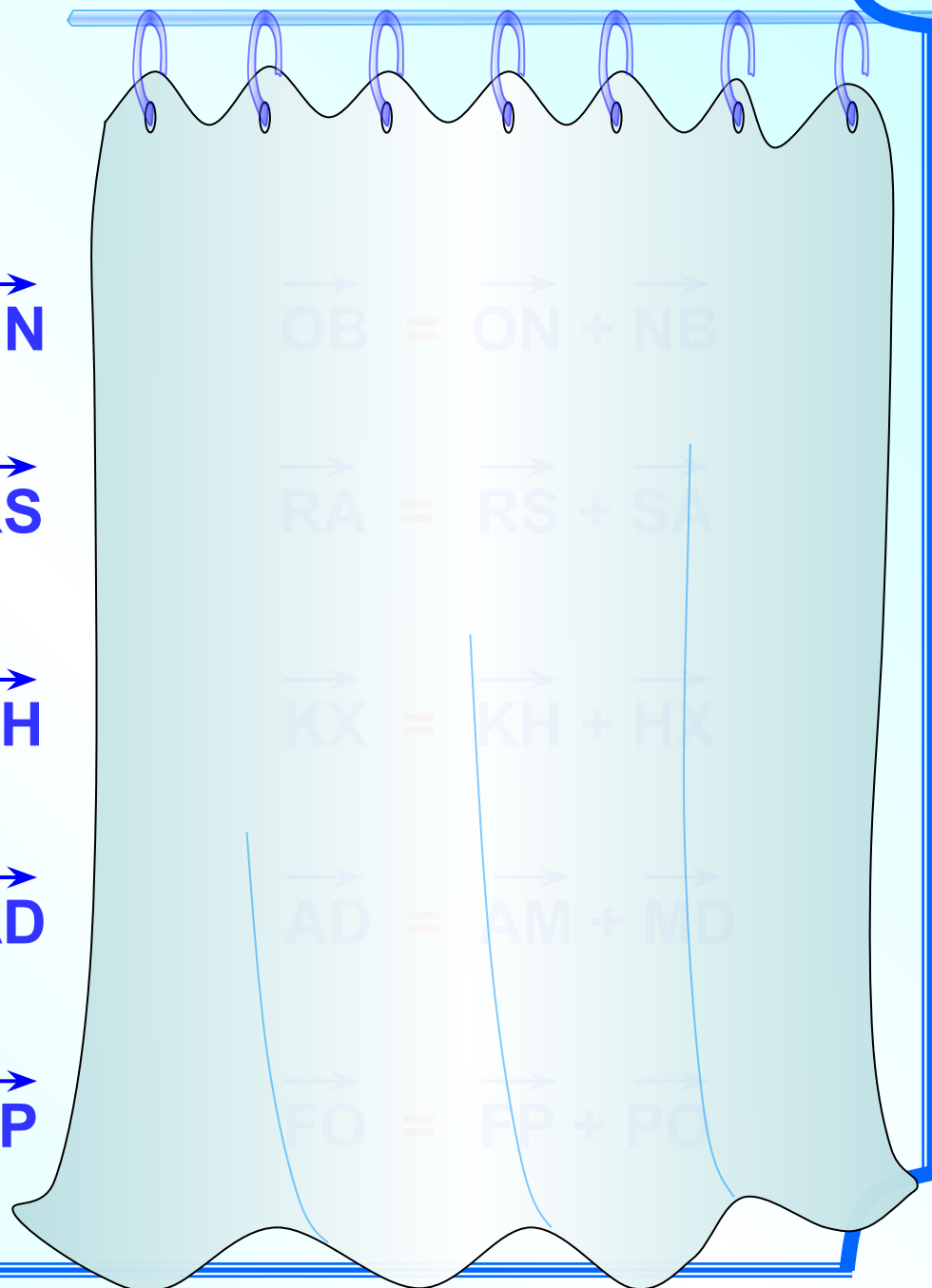
$$\text{из } \triangle OBN \quad \vec{ON} = \vec{OB} + \vec{BN}$$

$$\text{из } \triangle ASR \quad \vec{AS} = \vec{AR} + \vec{RS}$$

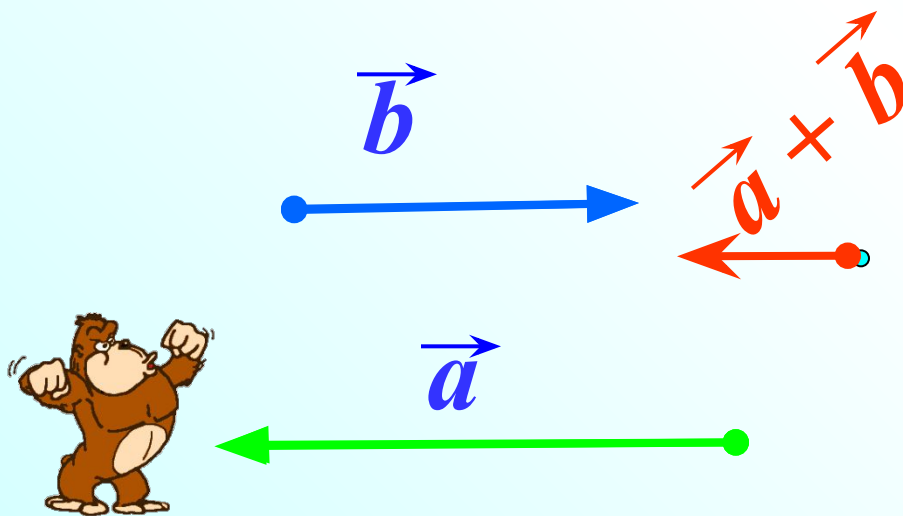
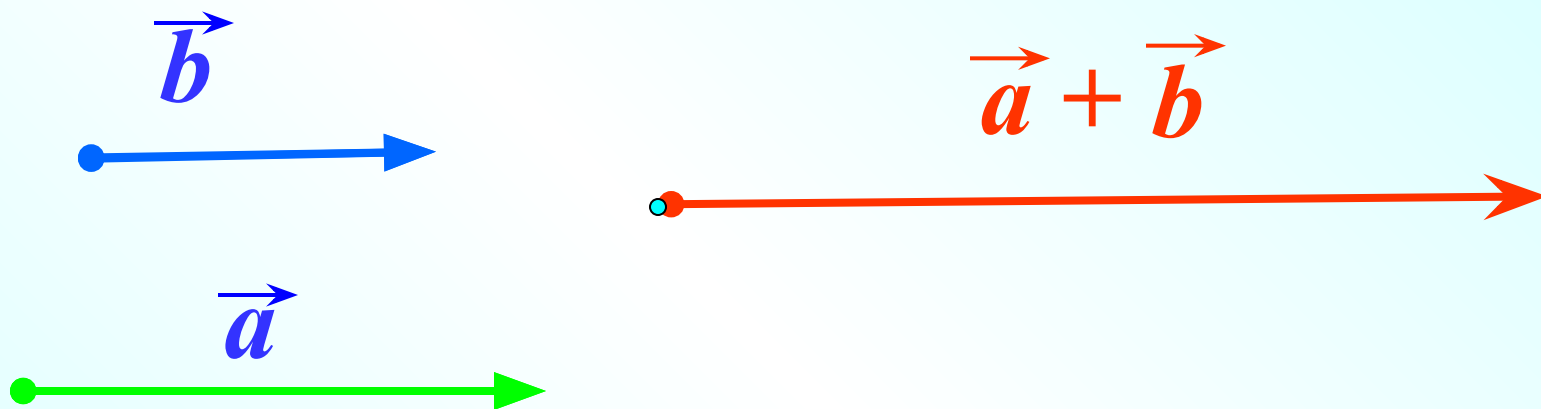
$$\text{из } \triangle XKH \quad \vec{XH} = \vec{XK} + \vec{KH}$$

$$\text{из } \triangle AMD \quad \vec{MD} = \vec{MA} + \vec{AD}$$

$$\text{из } \triangle FPO \quad \vec{OP} = \vec{OF} + \vec{FP}$$



По правилу треугольника складываются и коллинеарные векторы, хотя при их сложении треугольника и не получается





\vec{b}



$\vec{a} + \vec{b}$



\vec{a}



\vec{f}



$\vec{c} + \vec{f}$



\vec{c}



Законы сложения векторов

Теорема

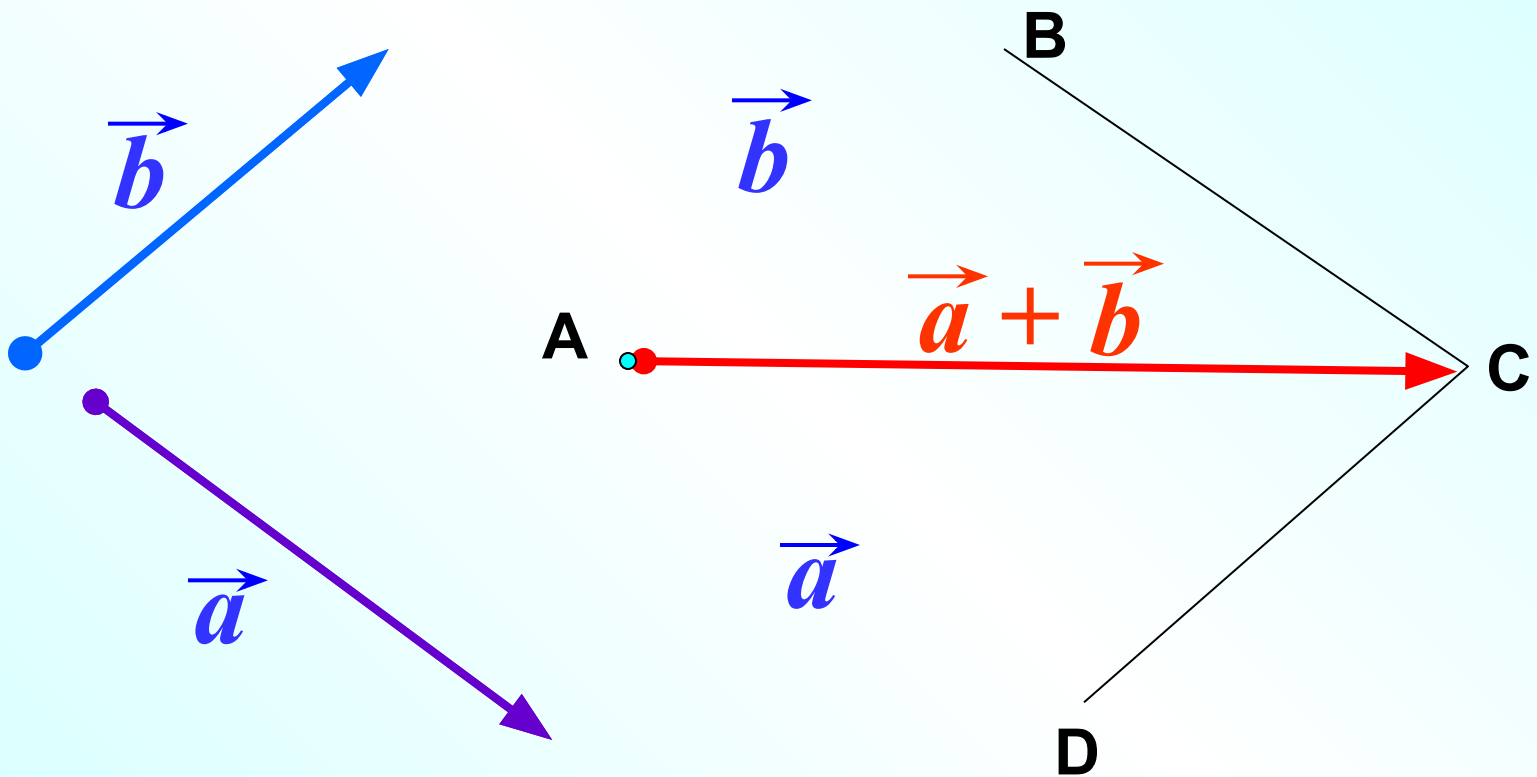
Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедливы равенства:

1 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *переместительный закон* !

2 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ *сочетательный закон* !

Докажем свойство ①

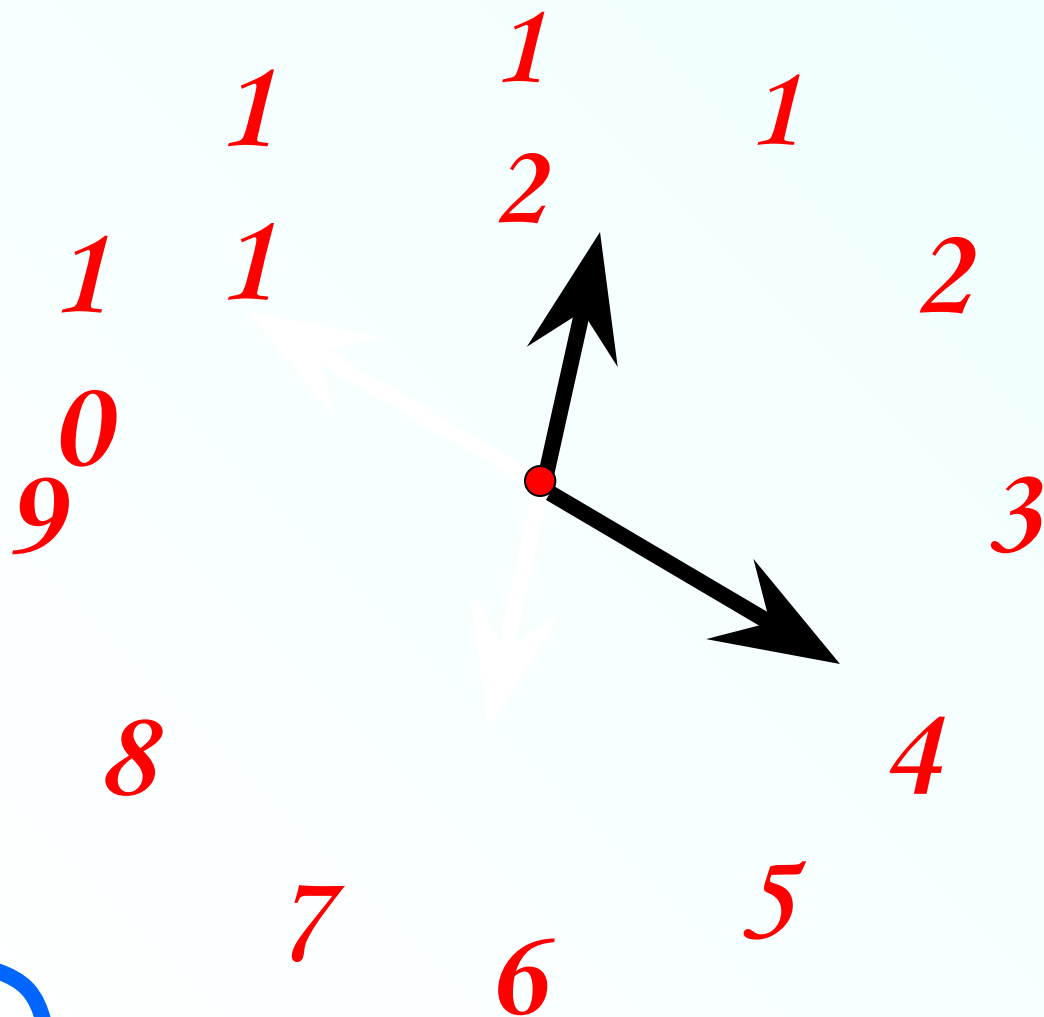
Рассмотрим случай, когда векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны.



$$\text{из } \triangle ABC \quad \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{b} + \vec{a}$$

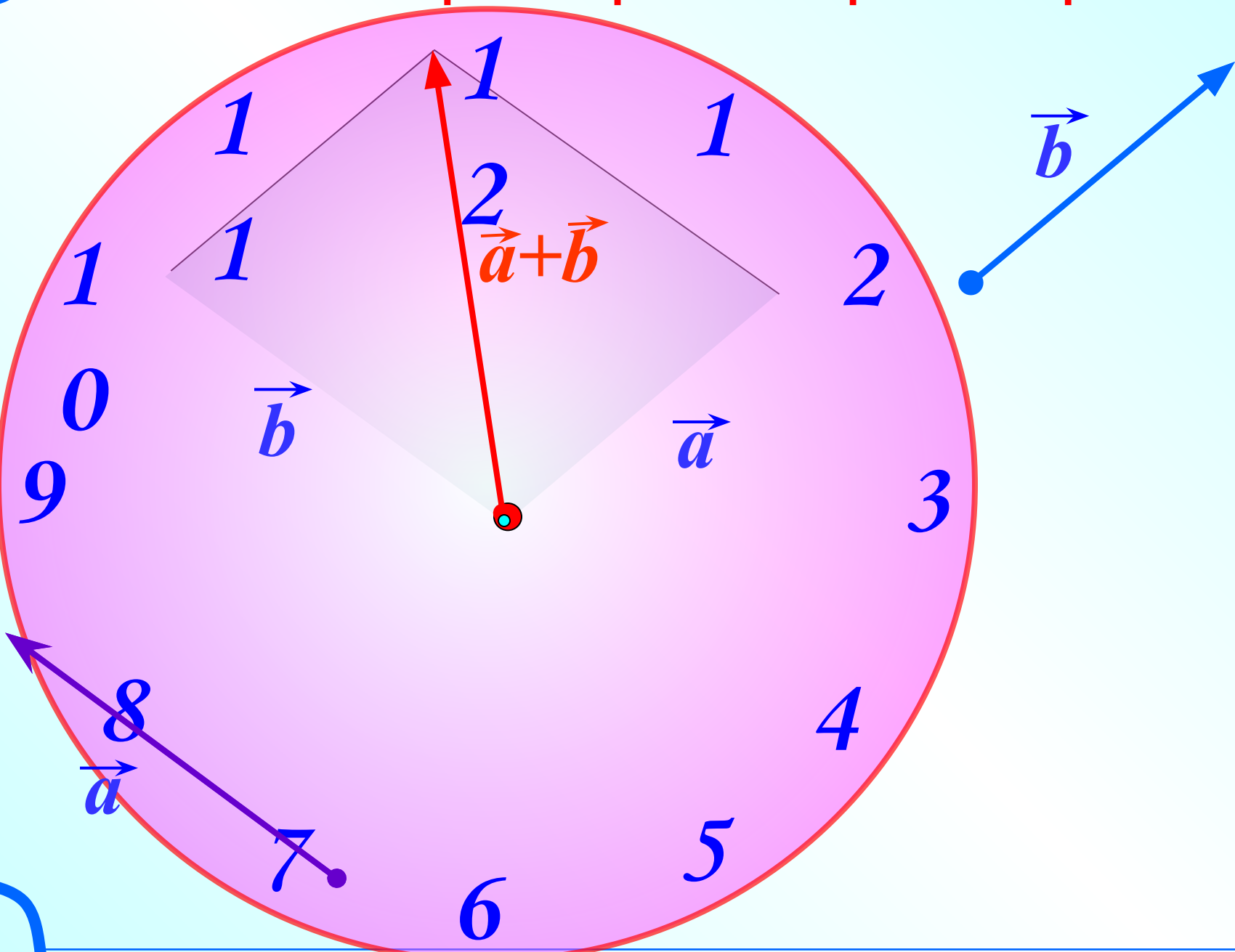
$$\text{из } \triangle ADC \quad \vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{a} + \vec{b}$$

При доказательстве свойства 1^0 мы обосновали правило параллелограмма сложения неколлинеарных векторов.

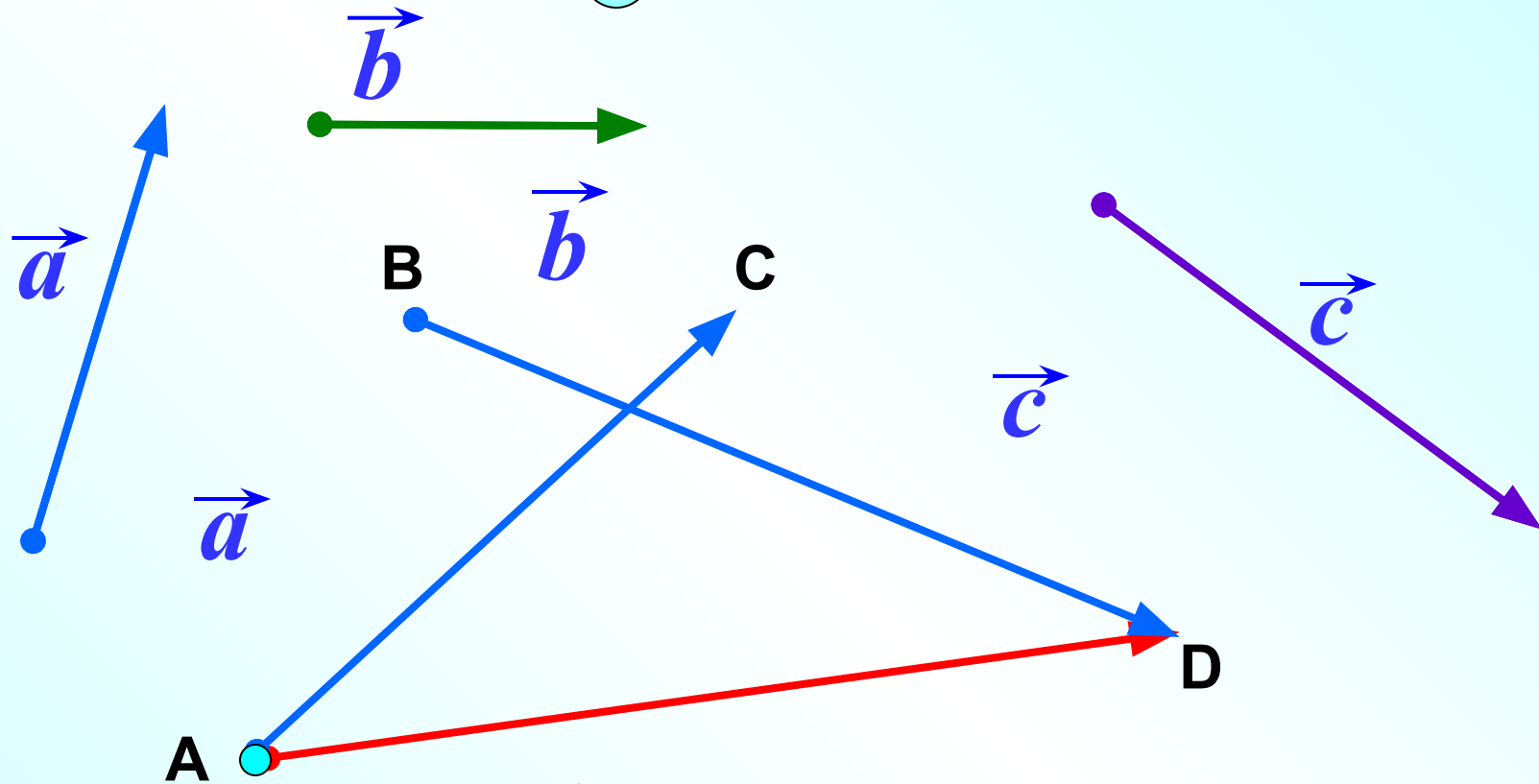


Чтобы применить правило параллелограмма, надо отложить векторы от одной точки, как стрелки часов.

Сложение векторов. Правило параллелограмма.



Докажем свойство 2

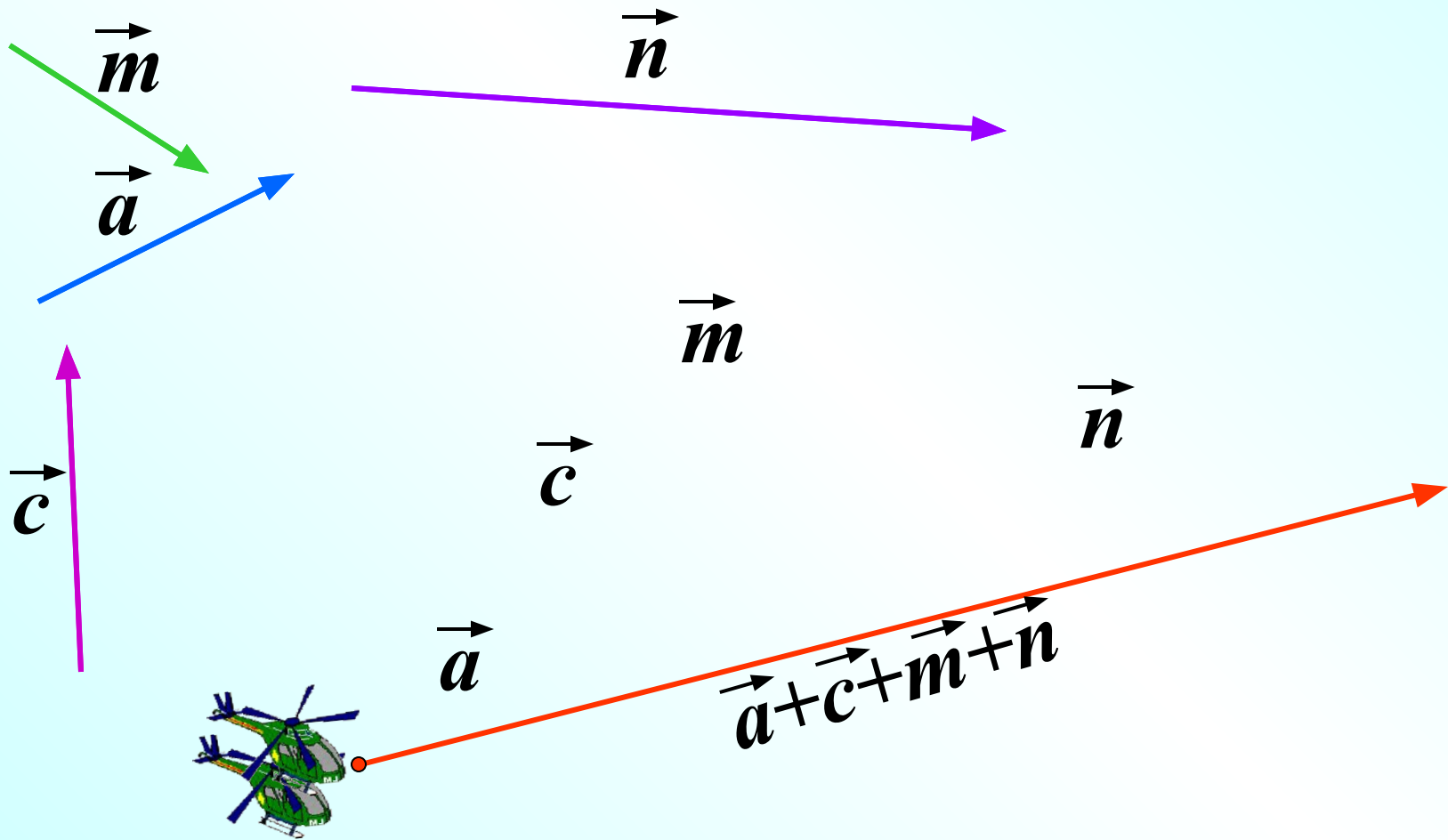


$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

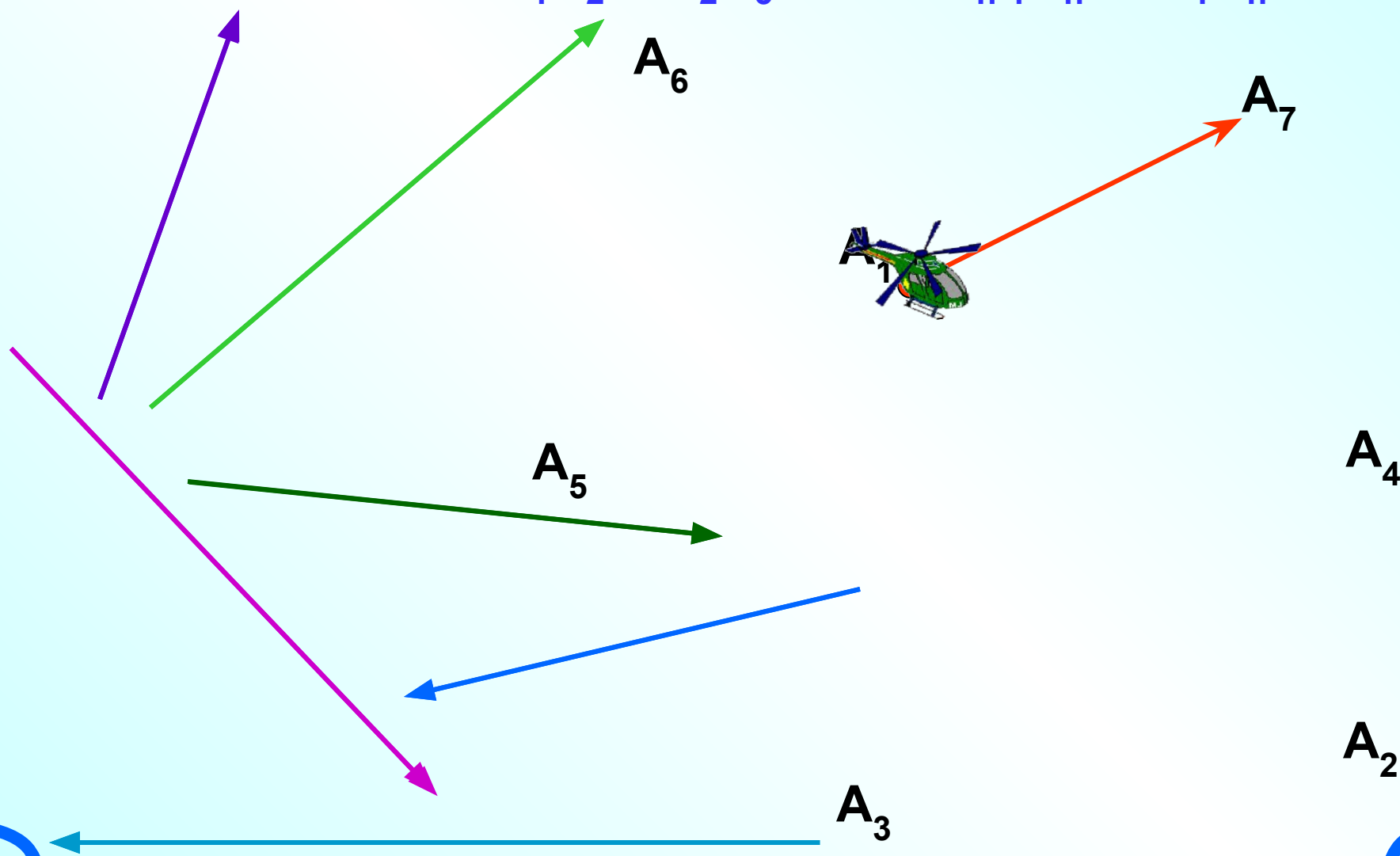
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$$

Сложение векторов. Правило многоугольника.

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DO} = \vec{AO}$$



Правило многоугольника можно сформулировать также следующим образом: если A_1, A_2, \dots, A_n – произвольные точки плоскости, то $\vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \dots + \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{A_1A_n}$

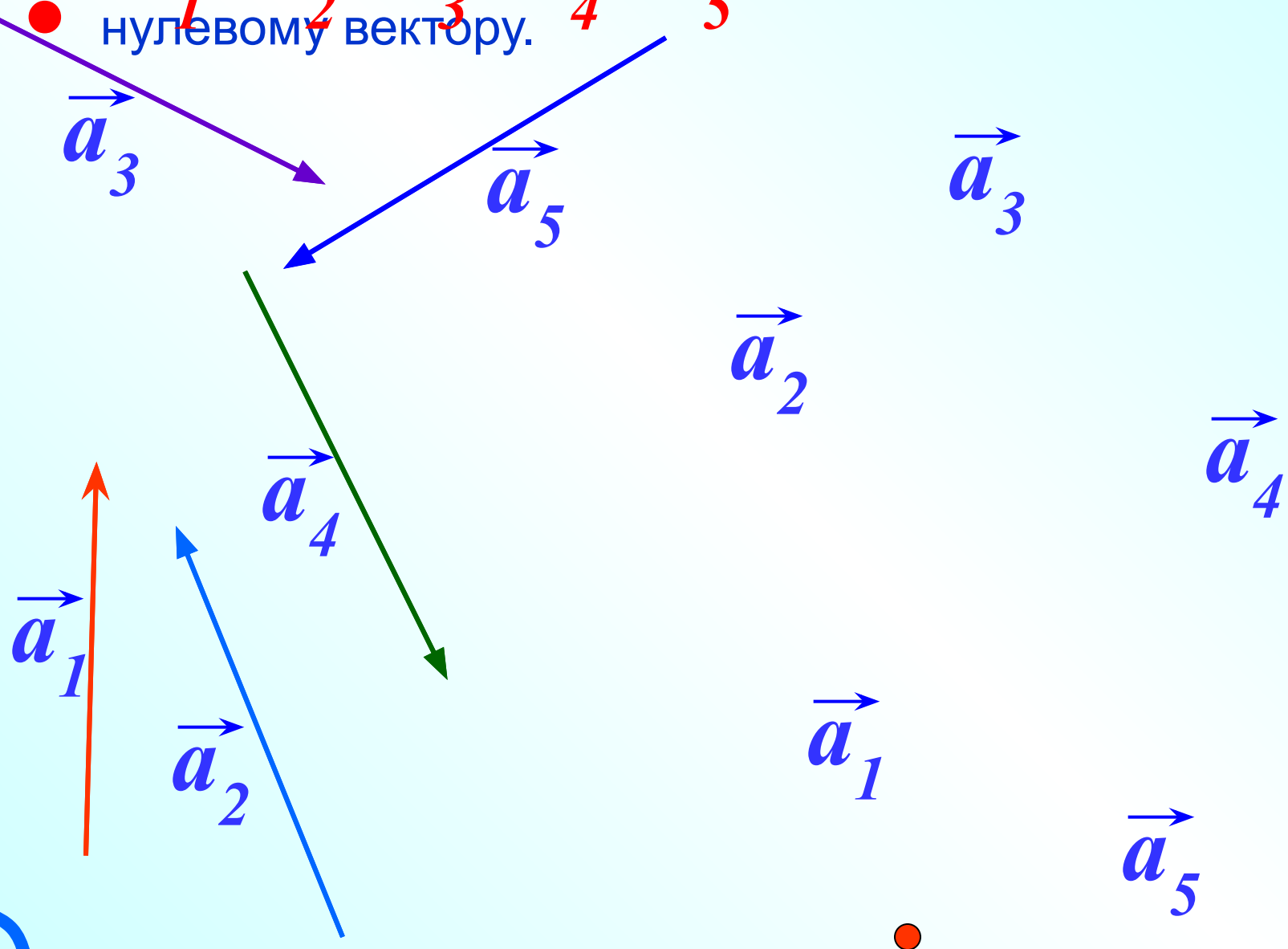




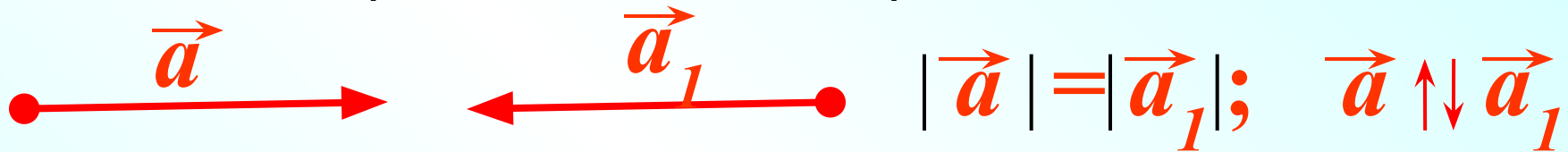
Если начало первого вектора совпадает с концом последнего вектора, то сумма данных векторов равна нулевому вектору.

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 = \vec{0}$$

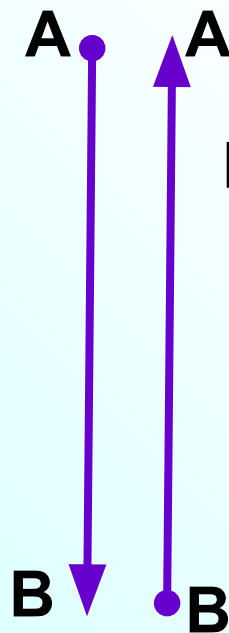
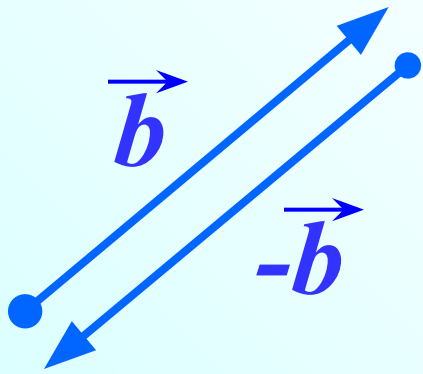
$$= \vec{0}$$



Вектор \vec{a}_1 называется **противоположным** вектору \vec{a} , если векторы \vec{a} и \vec{a}_1 имеют равные длины и противоположно направлены.



Вектор $-\vec{b}$, противоположный вектору \vec{b}

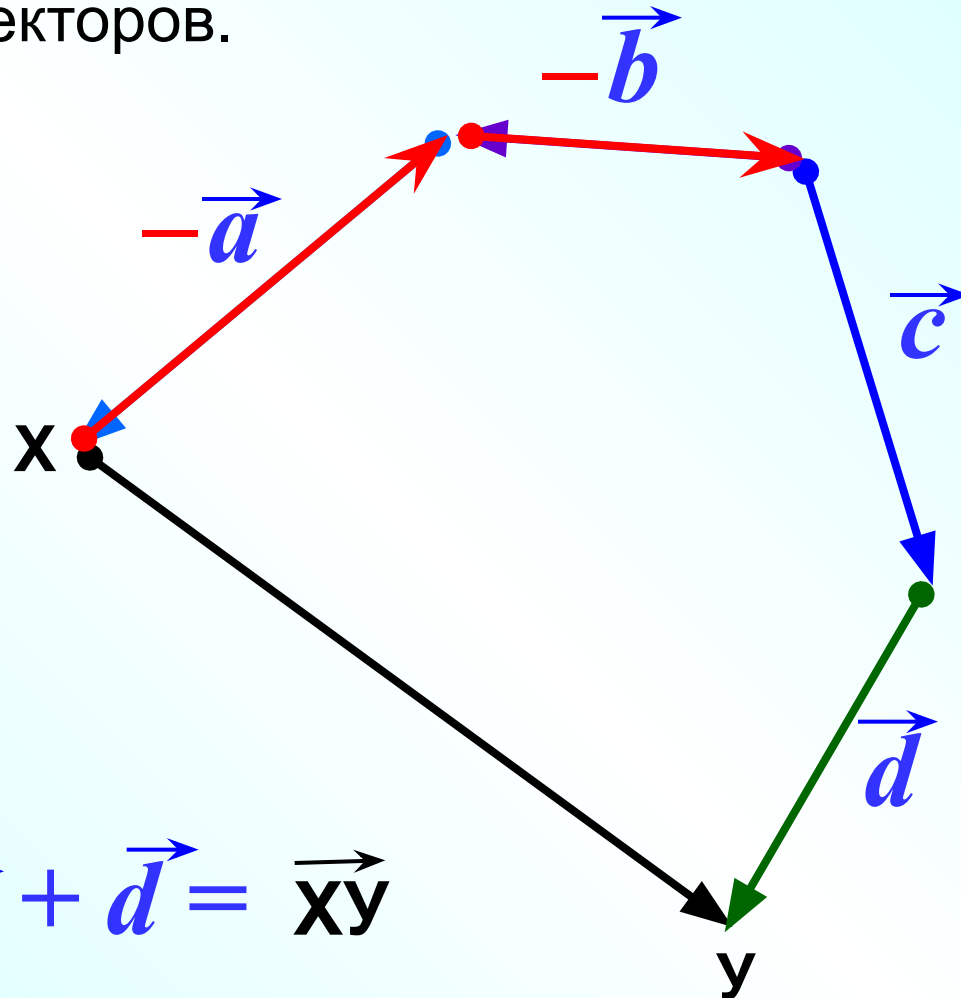


Вектор \vec{BA} , противоположный вектору \vec{AB}

$$\vec{BA} = -\vec{AB}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

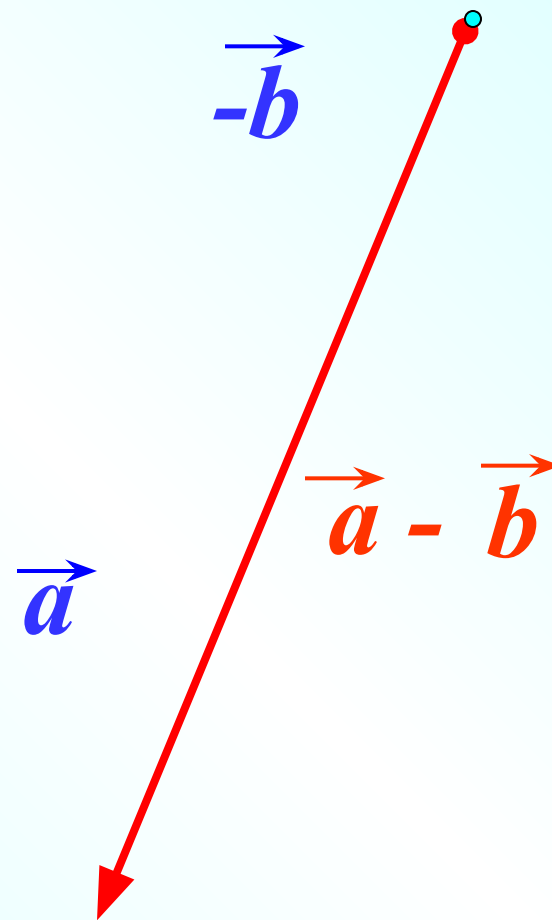
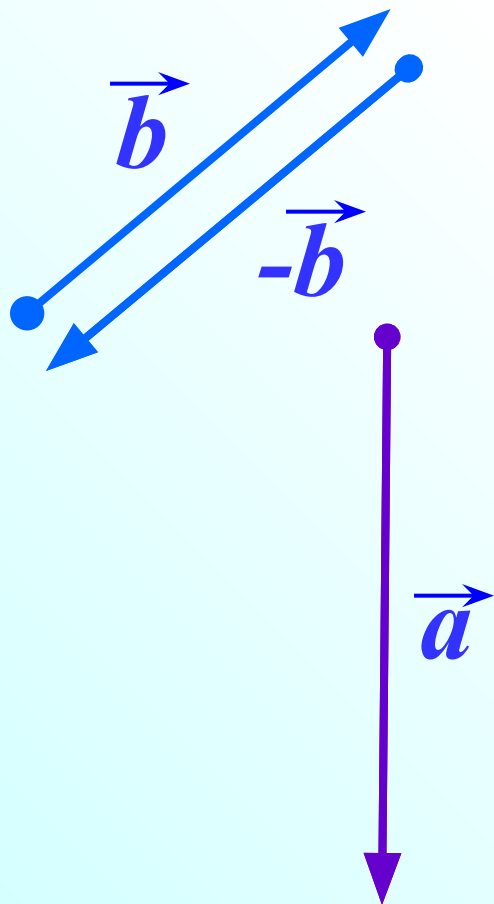
№ 766 На рисунке изображены векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} \vec{XU} . Представьте вектор \vec{XU} в виде суммы остальных или их противоположных векторов.



$$-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{XU}$$

Вычитание векторов.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



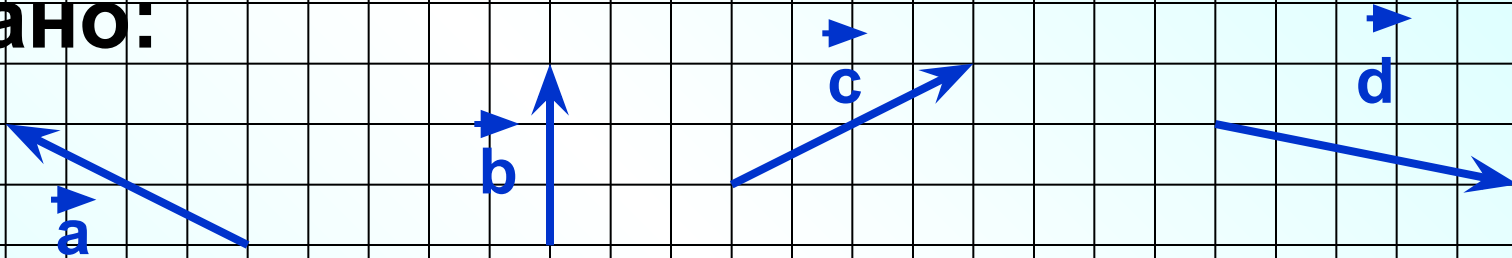
Вычитание векторов.

$$\vec{MF} - \vec{SF} = \vec{MF} + \vec{FS} = \vec{MS}$$

$$\vec{RO} - \vec{RM} = \vec{RO} + \vec{MR} = \vec{MR} + \vec{RO} = \vec{MO}$$

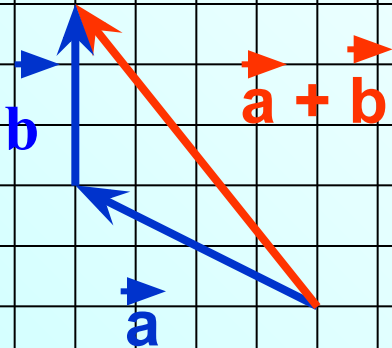
1) Постройте сумму $\vec{a} + \vec{b}$,
используя правило треугольника.

Дано:



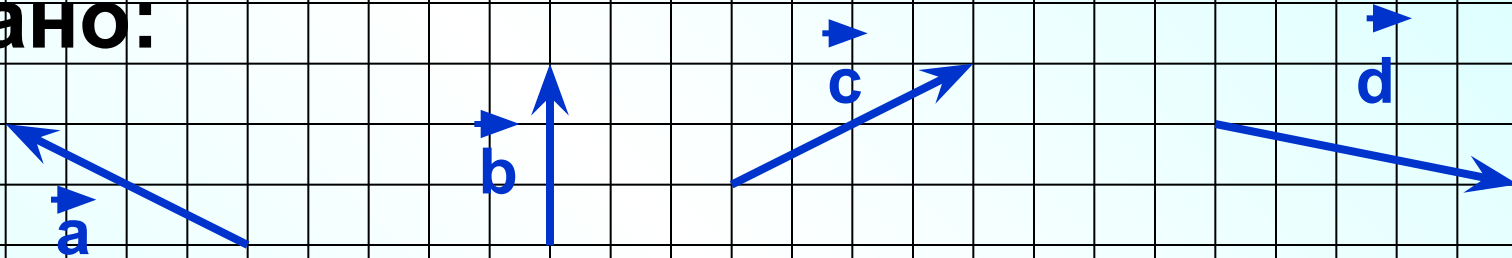
Построение:

1)



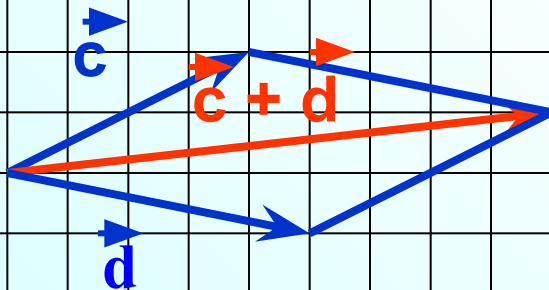
2) Постройте сумму $\vec{c} + \vec{d}$,
используя правило параллелограмма .

Дано:



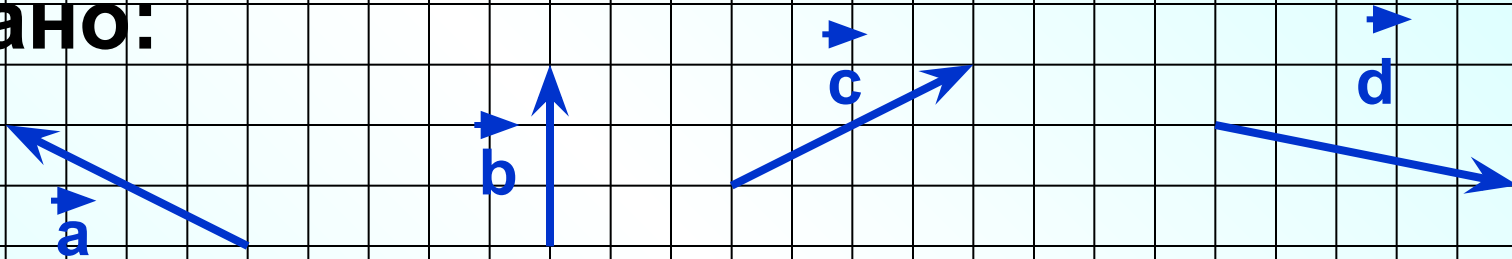
Построение:

2)



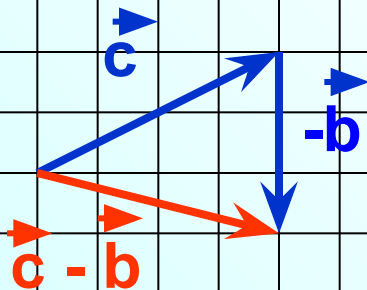
3) Постройте разность $\vec{c} - \vec{b}$, используя правило разности векторов.

Дано:



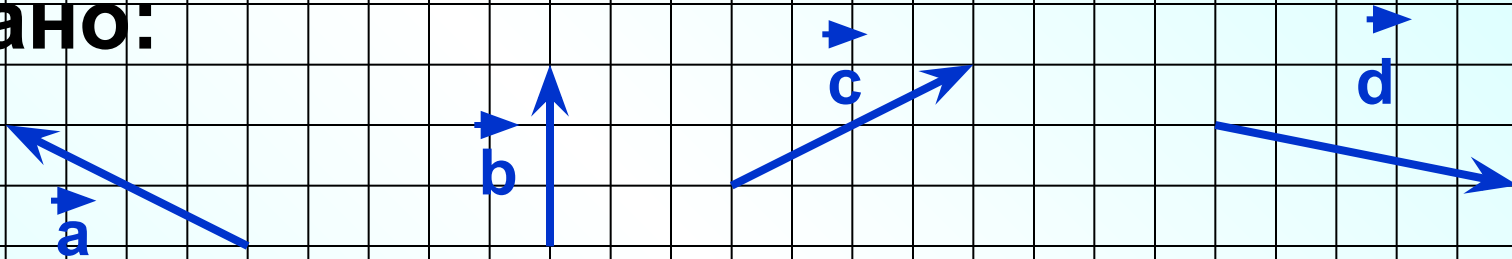
Построение:

3)



4) Постройте разность $\vec{d} - \vec{a}$,
используя правило вычитания векторов .

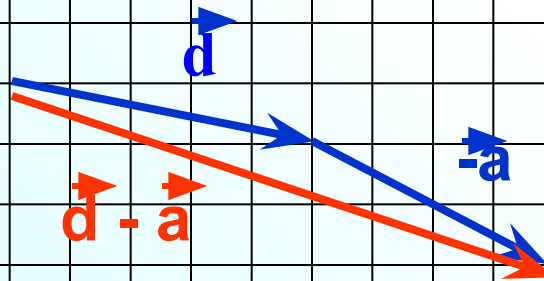
Дано:



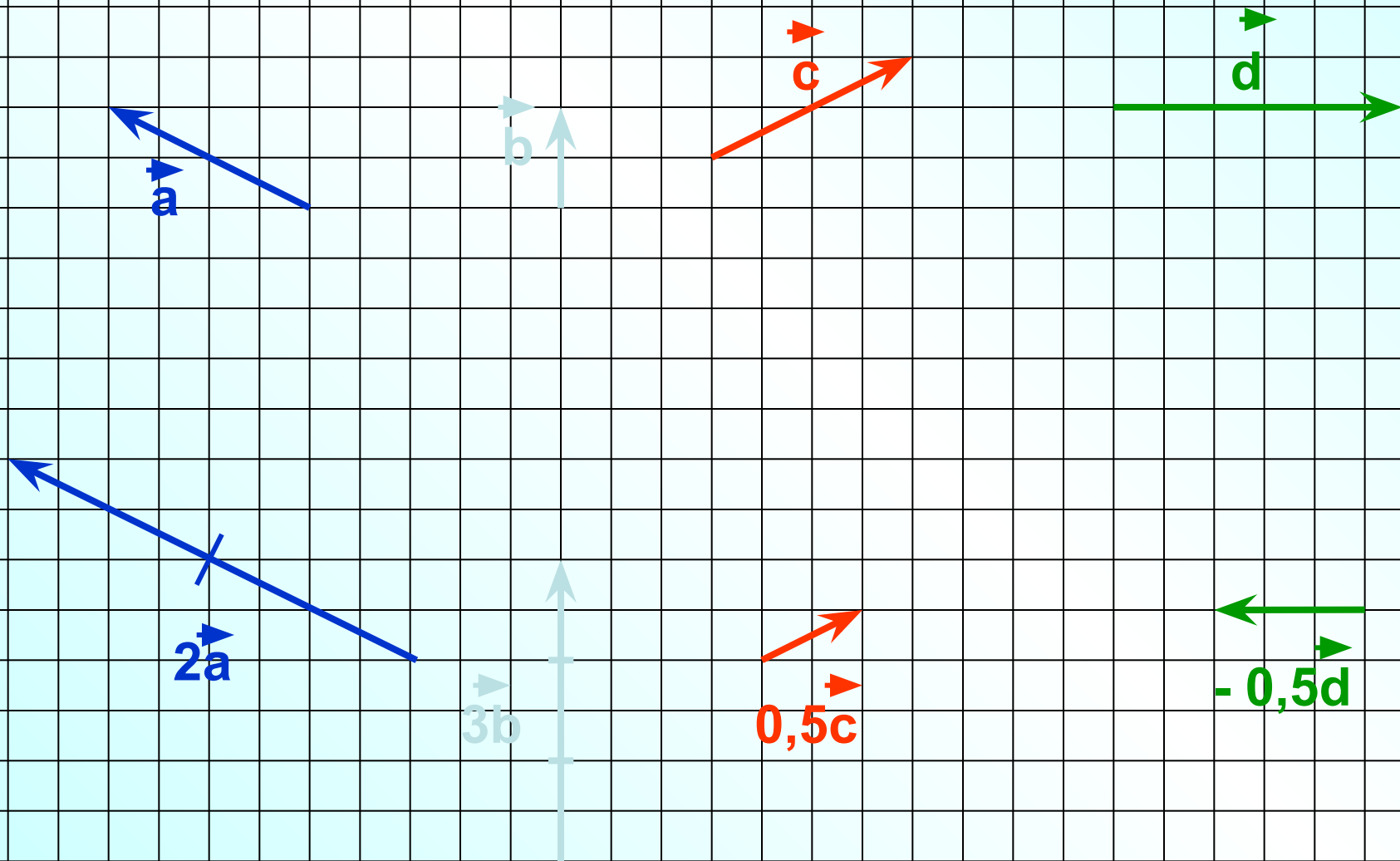
Построение:

4) $\vec{x} = \vec{d} - \vec{a}$, значит $\vec{x} = \vec{d} + (-$

a)



Что получается при умножении вектора на число?



5) Упростите выражение:

1 вариант.

$$\vec{CA} - \vec{OB} - \vec{CD} + \vec{AB} =$$

$$= \vec{CA} + \vec{BO} + \vec{DC} + \vec{AB} =$$

$$= \vec{DC} + \vec{CA} + \vec{AB} + \vec{BO} =$$

$$= \vec{DO}.$$

2 вариант.

$$\vec{BA} + \vec{CD} - \vec{OD} - \vec{CA} =$$

$$= \vec{BA} + \vec{CD} + \vec{DO} + \vec{AC} =$$

$$= \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DO} =$$

$$= \vec{BO}.$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} =$$

$$\vec{AO} + \vec{OP} =$$

$$\vec{MN} + \vec{NR} =$$

$$\vec{MK} + \vec{KM} =$$

$$\vec{MK} + \vec{OM} =$$

$$u_3 \Delta OBN \quad \vec{ON} =$$

$$u_3 \Delta ASR \quad \vec{AS} =$$

$$u_3 \Delta XKH \quad \vec{XH} =$$

$$u_3 \Delta AMD \quad \vec{MD} =$$

$$u_3 \Delta FPO \quad \vec{OP} =$$

$$\vec{AS} + \vec{SC} =$$

$$\vec{NM} + \vec{ML} =$$

$$\vec{RP} + \vec{PR} =$$

$$\vec{ZK} + \vec{KZ} =$$

$$\vec{DE} + \vec{KD} =$$

$$u_3 \Delta OBN \quad \vec{OB} =$$

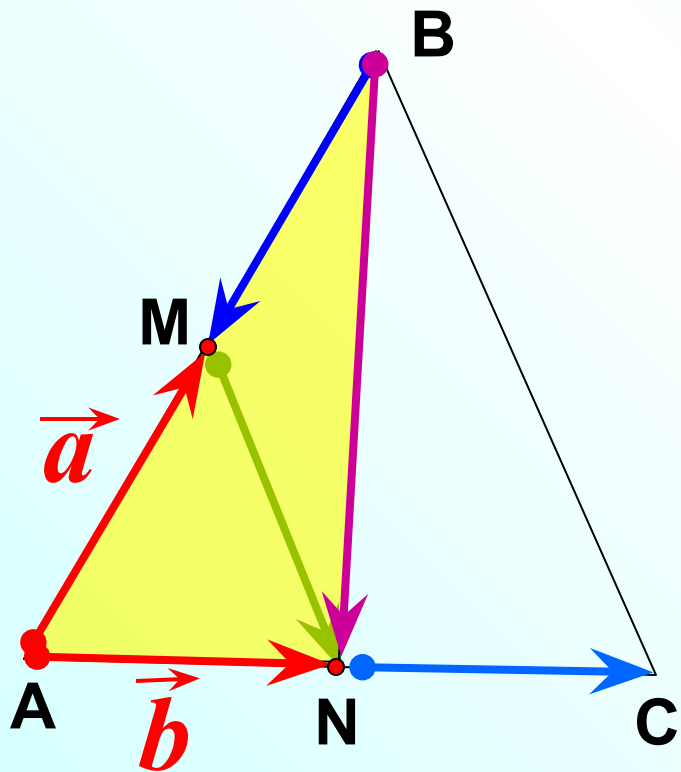
$$u_3 \Delta ASR \quad \vec{RA} =$$

$$u_3 \Delta XKH \quad \vec{KX} =$$

$$u_3 \Delta AMD \quad \vec{AD} =$$

$$u_3 \Delta FPO \quad \vec{FO} =$$

№ 768 Точки М и N – середины сторон АВ и АС
треугольника АВС. Выразите векторы \vec{BM} , \vec{NC} , \vec{MN} , \vec{BN}
через векторы $\vec{a} = \vec{AM}$ и $\vec{b} = \vec{AN}$



$$\vec{BM} = -\vec{a}$$

$$\vec{NC} = \vec{b}$$

из ΔAMN

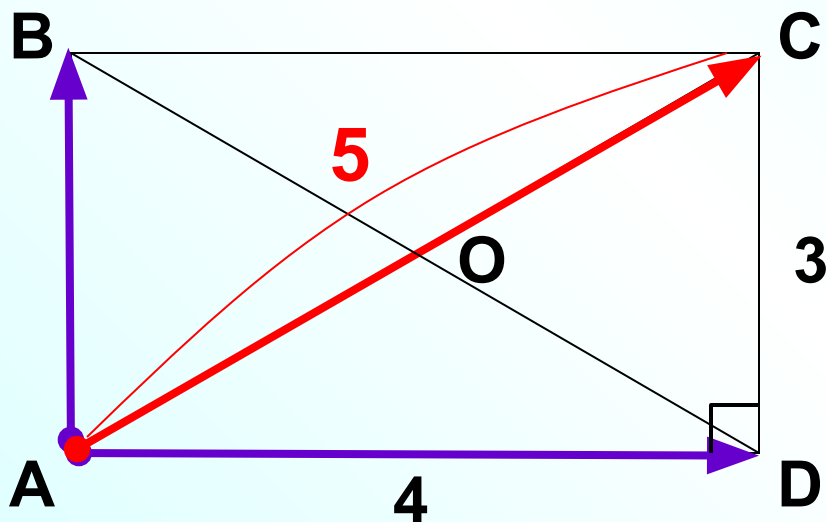
$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = -\vec{a} + \vec{b}$$

из ΔABN

$$\vec{BN} = \vec{BA} + \vec{AN} = -\vec{a} - \vec{a} + \vec{b}$$

Найдите $|\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{DC} - \vec{OD}|$

ABCD - прямоугольник



$$\left(\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{DC} - \vec{OD} \right) = \vec{AC} - \vec{DC} - \vec{OD} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DO} = \vec{AO}$$

$$|\vec{AO}| = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,5$$