Эндогенность. Инструментальные переменные.

Эндогенность

- Эндогенный регрессор — регрессор, который коррелирован со случайными ошибками модели: $Cov(x_i, \varepsilon_i) \neq 0$.
- Экзогенный регрессор — регрессор, который **не** коррелирован со случайными ошибками модели: $Cov(x_i, \varepsilon_i) = 0$.

Эндогенность

- Для использования МНК необходимо, чтобы все регрессоры были экзогенны (иначе получим смещенные и несостоятельные оценки)

Эндогенность

- $y_i = \beta_1 + \beta_2 * x_i + \varepsilon_i$
- x — эндогенный регрессор: $Cov(x_i, \varepsilon_i) \neq 0$
- В этом случае МНК-оценка $\widehat{\beta_2}$ несостоятельна **и смещена**

Пример (доска)

Когда возникает эндогенность

1. Пропуск существенных переменных
2. Ошибки измерения регрессоров
3. Самоотбор
4. Одновременность

Ошибка изменения регрессора

Замечание: если с ошибкой изменяется y, эндогенности не будет, будет просто потеря точности.

Модель в форме А:

$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и $Cov(x_i, \varepsilon_i) = 0$

Наблюдаем y_i и $x_i^* = x_i + u_i$,
где u_i, ошибка измерения регрессора x_i,
не зависит от x_i и ε_i

Ошибка измерения регрессора
Вывод другой формы модели

Подставим $x_i = x_i^* - u_i$ в форму А и получим:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2(x_i^* - u_i) + \varepsilon_i$$

и модель в форме Б:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i^* + w_i, \quad w_i = \varepsilon_i - \beta_2 u_i$$

Эндогенность в форме Б

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i^* + w_i, \quad w_i = \varepsilon_i - \beta_2 u_i$$

В форме Б:

$$Cov(x_i^*, w_i) = Cov(x_i + u_i, \varepsilon_i - \beta_2 u_i) =$$

$$= -\beta_2 Var(u_i) \neq 0$$

Пропущенная переменная

- Проблема смещения из-за пропуска пропущенных переменных (если переменная пропущена, то она косвенно присутствует в ошибках уравнения)
- Инструментальные переменные можно использовать, если нет данных по пропущенной переменной и нет данных по proxy – переменной.

Пропущенная переменная

Хотим оценить форму записи А:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 d_i + \varepsilon_i$$

где $Cov(x_i, d_i) \neq 0$, $Cov(x_i, \varepsilon_i) = 0$,
$Cov(d_i, \varepsilon_i) = 0$

Не наблюдаем d_i

Модель с пропущенным регрессором:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 d_i + \varepsilon_i$$

регрессор d_i не наблюдаем

Хотим оценить β_2, т.е. на сколько растёт y_i при росте x_i на единицу и фиксированном d_i

Форма записи Б:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \quad u_i = \beta_3 d_i + \varepsilon_i$$

Эндогенность:

$$Cov(x_i, u_i) = Cov(x_i, \beta_3 d_i + \varepsilon_i) =$$
$$= \beta_3 Cov(x_i, d_i)$$

Пример (доска)

Вывод

- При наличии эндогенности мы не можем использовать МНК

При МНК оценивании регрессии

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$$

получаем оценку $\hat{\beta}_2$ несостоятельную для β_2

- МНК оценивает на сколько растёт y_i при росте x_i на единицу (и сопряженных с этим изменениях в d_i)

Инструментальные переменные (IV)

- Пусть в нашем распоряжении есть переменная z, которая удовлетворяет двум свойствам:
  - Экзогенность: переменная не коррелирована со случайными ошибками $Cov(z_i, \varepsilon_i) = 0$
  - Релевантность: переменная коррелирована с регрессором $Cov(x_i, z_i) \neq 0$
- Тогда можно получить состоятельную оценку параметра β_2, используя **двухшаговый МНК**

Инструментальные переменные

Какая из следующих пар представляет собой удачную пару переменная и инструментальная переменная к ней соответственно?

Рост и образование родителей в регрессии среднего количества очков за матч баскетболиста на его рост.

Производство самогона и покупка сахара домохозяйством в регрессии потребления самогона на его производство.

Инструментальные переменные

Какая из следующих пар представляет собой удачную пару переменная и инструментальная переменная к ней соответственно?

Рост и образование родителей в регрессии среднего количества очков за матч баскетболиста на его рост.

Рост слабо кореллирует с образованием родителей, лучше подобрать какой-нибудь более явный инструмент.

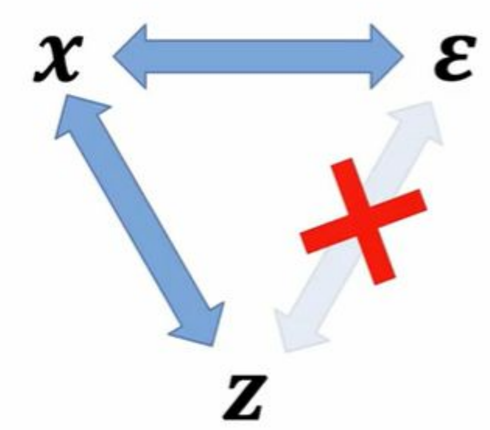
Производство самогона и покупка сахара домохозяйством в регрессии потребления самогона на его производство.

Верно! Потребление самогона зависит от склонности человека к потреблению спиртного, что не коррелярует с объёмами покупок сахара. А так как сахар является ингридиентом при производстве самогона, то эти две переменные скорелированы.

Переменная $\boldsymbol{z}$ может использоваться как **инструментальная переменная** (коротко — **инструмент**), если она является **валидной**, то есть обладает двумя свойствами:

- **Экзогенность**: переменная не коррелирована со случайными ошибками $Cov(z_i, \varepsilon_i) = 0$
- **Релевантность**: переменная коррелирована с регрессором $Cov(x_i, z_i) \neq 0$

Требования к инструментам



Двухшаговый МНК (метод инструментальных переменных)

Первый шаг

Оцениваем регрессию: $x_i = \theta_1 + \theta_2 z_i + v_i$

Получаем прогнозные значения $\hat{x}_i = \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 z_i$.

Второй шаг

Оцениваем регрессию: $y_i = \beta_1 + \beta_2 \hat{x}_i + \varepsilon_i$.

$$\left.\begin{array}{c} Cov(z_i, \varepsilon_i) = 0 \\ \hat{x}_i \text{ – линейно выражено через } z_i \end{array}\right\} \Rightarrow Cov(\hat{x}_i, \varepsilon_i) = 0$$

=> Проблема эндогенности регрессора решена

Двухшаговый МНК

Указанная процедура приводит к следующей формуле оценки коэффициента:

$$\widehat{\beta_2^{TSLS}} = \frac{\frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}$$

$$\widehat{\beta_2^{TSLS}} = \frac{\frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})} \xrightarrow{p} \frac{Cov(y_i, z_i)}{Cov(x_i, z_i)} = \beta_2$$

Мы доказали, что двухшаговый МНК дает состоятельную оценку.

Двухшаговый МНК

При $n \to \infty$ выборочные ковариации сходятся к своим теоретическим аналогам =>

$$\widehat{\beta_2^{TSLS}} = \frac{\frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})} \xrightarrow{p} \frac{Cov(y_i, z_i)}{Cov(x_i, z_i)} =$$

$$= \frac{Cov(y_i, z_i)}{Cov(x_i, z_i)} = \frac{Cov(\beta_1 + \beta_2 * x_i + \varepsilon_i, z_i)}{Cov(x_i, z_i)} =$$

$$= \frac{\beta_2 Cov(x_i, z_i) + Cov(\varepsilon_i, z_i)}{Cov(x_i, z_i)} = \beta_2$$

Метод двухшагового МНК также называют методом инструментальных переменных:

$$\hat{\beta}^{2OLS} = \hat{\beta}^{IV}$$

Как найти инструментальную переменную?

Инструментальная переменная z_i для регрессора x_i может влиять на y_i через через регрессор x_i, но не через ошибку ε_i

Связи инструментальной переменной

Модель с эндогенностью:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$$

$$\begin{tikzcd} z_i \arrow[r] & x_i \arrow[r] & y_i \\ & \varepsilon_i \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

- Проблема смещения из-за пропуска пропущенных переменных (если переменная пропущена, то она косвенно присутствует в ошибках уравнения)
- Инструментальные переменные можно использовать, если нет данных по пропущенной переменной и нет данных по proxy – переменной.

Пример

Пусть истинная модель имеет вид

$$y = \beta_1 + \beta_2 x^{(2)} + \beta_3 x^{(3)} + u$$

При этом переменная $x^{(3)}$ ненаблюдаема: у нас нет данных о ней.

Пример: на уровень дохода работника (y) влияет его талант ($x^{(3)}$), но у нас нет статистических данных об уровне таланта.

$x^{(2)}$ — число лет обучения — переменная, эффект которой нас интересует

Пример

Пусть истинная модель имеет вид

$$(1)\ y = \beta_1 + \beta_2 x^{(2)} + \beta_3 x^{(3)} + u$$

$$(2)\ y = \beta_1 + \beta_2 x^{(2)} + \varepsilon$$

где $\varepsilon = \beta_3 x^{(3)} + u$

Если $\mathrm{Cov}\left(x^{(2)}, x^{(3)}\right) \neq 0$,

то и $\mathrm{Cov}\left(x^{(2)}, \varepsilon\right) \neq 0$, то есть

регрессор в модели (2) — эндогенный

Пример

- Нам нужно придумать инструментальную переменную, которая коррелированна с уровнем образования, но некоррелированна с уровнем таланта. Это сложная задача.
- Например: насколько далеко индивид живет от колледжа.

Пример в R-studio

```
# эндогенность

data("CigarettesSW")
h <- CigarettesSW
help("CigarettesSW")

h2 <- mutate(h, rprice = price/cpi,
             rincome=income/cpi/population, rtax=tax/cpi)
h3 <- filter(h2, year=="1995")

model_0 <- lm(data=h3, log(packs)~log(rprice))
summary(model_0)
```

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  10.3389     1.0353   9.986 4.25e-13 ***
log(rprice)  -1.2131     0.2164  -5.604 1.13e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Пример в R-studio

- Как ценовые меры, используемые государством, повлияют на потребление сигарет?

- При оценке модели `log(packs)~log(rprice)` МНК мы предполагаем, что регрессор не коррелирует с ошибкой.

- Но если это не так, нужно использовать двухшаговый МНК

Двухшаговый МНК

- Выберем инструментальную переменную, которая влияет на цену, но не влияет на спрос (акцизные сборы)
- Можно ожидать, что акцизы будут хорошей инструментальной переменной (доказать это мы не сможем)

Двухшаговый МНК

```
# two stage OLS
# Step 1
st_1 <- lm(data=h3, log(rprice)~rtax)
h3$log_price_hat <- fitted(st_1)
# Step 2
st_2 <- lm(data=h3, log(packs)~log_price_hat)
summary(st_2)
```

```
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    10.0385     1.1651   8.616 3.72e-11 ***
log_price_hat  -1.1502     0.2436  -4.722 2.22e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

- Вот этот коэффициент уже можно еинтерпретировать как причинный, т.е. можно сказать, что при увеличении цены на 1% потребление сигарет снизится на 1,5%.

Двухшаговый МНК

```
model_iv <- ivreg(data=h3, log(packs)~log(rprice)|rtax)
summary(model_iv)
```

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   10.039      1.095   9.164 6.06e-12 ***
log(rprice)   -1.150      0.229  -5.022 8.16e-06 ***
---
```

```
mtable(model_0, st_2, model_iv)
```

```
============================================
               model_0    st_2     model_iv
--------------------------------------------
(Intercept)   10.339*** 10.039*** 10.039***
              (1.035)   (1.165)   (1.095)
log(rprice)   -1.213***           -1.150***
              (0.216)             (0.229)
log_price_hat           -1.150***
                        (0.244)
```

Тест Хаусмана