



УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Решения задач по
классификации УМФ с
переменными коэффициентами и
приведение их к каноническому
виду.

Уравнение Трикоми.





При решении задач по этой теме необходимо помнить основные правила дифференцирования сложных функций, позволяющие преобразовать производные от функции $u(x, y)$ к новым переменным (ξ, η) .

Применяем следующие формулы:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x ,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y ,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2 u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} , \quad (1.10)$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} ,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2 u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} .$$



Пример 1. **Уравнение Трикоми:** $y u_{xx} + u_{yy} = 0$

1. Определить тип уравнения.
2. Найти характеристики.
3. Привести к каноническому виду.

Решение.

1. Сопоставим уравнение с общим видом ЛДУЧП-2:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Имеем $a_{11} = y$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$.

2. Вычислим дискриминант: $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$.

3. Определим тип уравнения (1). Согласно классификации оно *смешанного* типа, т.к.

- 1) в полуплоскости $y < 0$ — оно имеет *гиперболический* тип,
- 2) в полуплоскости $y > 0$ — *эллиптический* тип, а
- 3) на прямой $y = 0$ — *параболический* тип.



Замечание. Уравнение Трикоми представляет интерес для задач аэро- и газодинамики. В области *гиперболичности* оно соответствует *сверхзвуковому* движению, а в области *эллиптичности* – *дозвуковому*. Область *параболичности* – *граница*.

4 . Запишем *характеристическое уравнение* и найдём *характеристические функции*.
Общий вид характеристического уравнения следующий:

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dx dy + a_{22}dx^2 = 0.$$

В нашем случае ($a_{11} = y$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$) имеем:

$$ydy^2 + dx^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{-y}}$$

Имеем два ОДУ-1 с разделяющимися переменными. Решим их в каждой из выделенных областей.



а) В полуплоскости $y < 0$ (гиперболический тип) имеем:

$$dx = \pm \sqrt{-y} dy \Rightarrow x + C = \mp \frac{2}{3} (-y)^{\frac{3}{2}} .$$

В данном случае мы имеем два семейства вещественных характеристик уравнения Трикоми. Это следующие кривые (первые интегралы) :

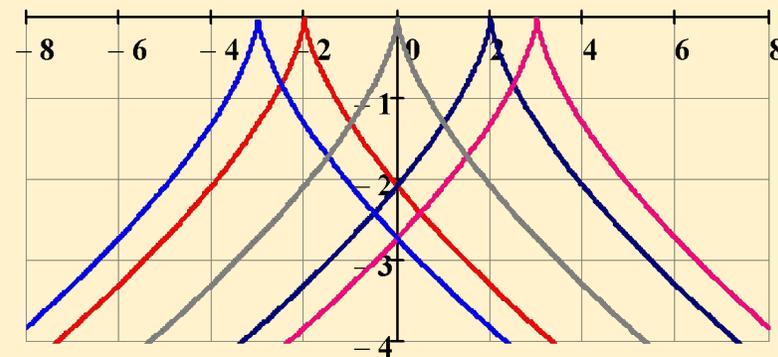
$$\varphi(x, y) = x + \frac{2}{3} \sqrt{-y^3} = C_1, \quad \psi(x, y) = x - \frac{2}{3} \sqrt{-y^3} = C_2 ,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Характерный вид кривых представлен на Рис. 1.

Полученные интегралы выбираем в качестве новых переменных:

$$\xi = x + \frac{2}{3} \sqrt{-y^3}, \quad \eta = x - \frac{2}{3} \sqrt{-y^3}$$



$\xi = C$

Рис. 1

$\eta = C$



b) В полуплоскости $y > 0$ (эллиптический тип) имеем следующие *характеристические уравнения*:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{i}{\sqrt{y}} \quad \Rightarrow$$

$$dx = \mp i \sqrt{y} dy \quad \Rightarrow \quad x + C = \pm i \frac{2}{3} \sqrt{y^3}.$$

Здесь i – мнимая единица. Имеем два семейства комплексных интегральных характеристик:

$$\varphi(x, y) = x + i \frac{2}{3} \sqrt{y^3} \quad \text{и} \quad \varphi^*(x, y) = x - i \frac{2}{3} \sqrt{y^3}$$

Чтобы не иметь дела с комплексными функциями, введём две вещественных функции α и β (линейные комбинации φ и φ^*):

$$\alpha(x, y) = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta(x, y) = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}.$$

Или после подстановки:

$$\alpha(x, y) = x, \quad \beta(x, y) = \frac{2}{3} \sqrt{y^3},$$



С. На прямой линии $y = 0$ (*параболический тип*). Т.о. все точки параболичности лежат на прямой линии.

В этом случае имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{0}{y} = 0$$

Откуда получаем:

$$0 \cdot dx = y dy \Rightarrow dx = 0 \Rightarrow x = C .$$

Поэтому единственный независимый первый интеграл имеет вид:

$$\delta(x, y) = x$$

Т.о. имеется лишь одно семейство вещественных характеристик.



5. Делаем замену переменных.

а) В полуплоскости $y < 0$ (гиперболический тип) имеем:

$$\xi = x + \frac{2}{3}\sqrt{-y^3}, \quad \eta = x - \frac{2}{3}\sqrt{-y^3}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда имеем: } \xi_x &= 1, & \xi_{xx} &= 0, & \xi_{xy} &= 0; & \eta_x &= 1, & \eta_{xx} &= 0, & \eta_{xy} &= 0; \\ \xi_y &= -\sqrt{-y}, & \xi_{yy} &= \frac{1}{2\sqrt{-y}}, & \xi_{yx} &= 0; & \eta_y &= \sqrt{-y}, & \eta_{yy} &= \frac{-1}{2\sqrt{-y}}, & \eta_{yx} &= 0 \end{aligned}$$

Поскольку вторые производные u_{xx} и u_{yy} имеют вид:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2 u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_{\xi} \xi_{xx} + u_{\eta} \eta_{xx}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2 u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_{\xi} \xi_{yy} + u_{\eta} \eta_{yy}. \end{aligned}$$

Тогда в нашем случае имеем:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2 u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}(-y) + 2 u_{\xi\eta} y + u_{\eta\eta}(-y) + u_{\xi} \frac{1}{2\sqrt{-y}} + u_{\eta} \left(\frac{-1}{2\sqrt{-y}} \right) = -y(u_{\xi\xi} - 2 u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - \frac{1}{2\sqrt{-y}}(-u_{\xi} + u_{\eta}).$$



Подставим полученные выражения в исходное уравнение Трикоми:

$$\begin{aligned} y u_{xx} + u_{yy} &= y(u_{\xi\xi} + 2 u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - y(u_{\xi\xi} - 2 u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - \frac{1}{2\sqrt{-y}}(-u_{\xi} + u_{\eta}) = \\ &= y \left[4u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\sqrt{-y^3}}(-u_{\xi} + u_{\eta}) \right] = 0 \end{aligned}$$

Разделив на $4y$, получим уравнение в виде:

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{8\sqrt{-y^3}}(-u_{\xi} + u_{\eta}) = 0$$

Поскольку $\xi - \eta = \left(x + \frac{2}{3}\sqrt{-y^3}\right) - \left(x - \frac{2}{3}\sqrt{-y^3}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{-y^3}$, получаем, что $\sqrt{-y^3} = \frac{3}{4}(\xi - \eta)$.

Подставляя в уравнение получаем следующий *канонический* вид уравнения Трикоми в переменных (ξ, η) :
в полуплоскости $y < 0$

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(-u_{\xi} + u_{\eta}) = 0 \quad (2. hiper)$$

Записанное в форме **(2. hiper)** через смешанную производную $u_{\xi\eta}$ уравнение иногда относят ко *второй* канонической форме гиперболического уравнения, тогда как под *первой* формой (видом) понимаю его запись через «чистые» вторые производные типа $u_{\xi\xi}$ и $u_{\eta\eta}$. Получим уравнение в первой канонической форме.



Введём другие независимые переменные в виде полусуммы и полуразности от ξ и η :

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2} = x, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{-y^3}$$

Тогда имеем:

$$\alpha_x = 1, \quad \alpha_{xx} = \alpha_{xy} = 0, \quad \beta_x = \beta_{xx} = \beta_{xy} = 0,$$
$$\alpha_y = \alpha_{yy} = \alpha_{yx} = 0, \quad \beta_y = -\sqrt{-y}, \quad \beta_{yy} = \frac{1}{2\sqrt{-y}}, \quad \beta_{yx} = 0$$

Вторые производные u_{xx} и u_{yy} имеют вид:

$$u_x = u_\alpha, \quad u_y = -\sqrt{-y} u_\beta$$
$$u_{xx} = u_{\alpha\alpha}, \quad u_{yy} = -u_{\beta\beta} y + u_\beta \frac{1}{2\sqrt{-y}}.$$

Подставив полученные выражения в исходное уравнение Трикоми, получим:

$$y u_{xx} + u_{yy} = y u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} y + \frac{1}{2\sqrt{-y}} u_\beta = y \left(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{1}{2\sqrt{-y^3}} u_\beta \right) = y \left(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{1}{3\eta} u_\beta \right) = 0$$

Поделив на y , получаем следующее каноническое уравнение Трикоми гиперболического типа в полуплоскости $y < 0$ в новой - первой форме:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{1}{3\eta} u_\beta = 0 \quad (1. hiper)$$



в) в полуплоскости $y > 0$ (эллиптический тип) имеем:

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{2}{3}\sqrt{y^3}$$

$$\text{Тогда имеем: } \xi_x = 1, \quad \xi_{xx} = \xi_{xy} = 0, \quad \eta_x = \eta_{xx} = \eta_{xy} = 0,$$

$$\xi_y = \xi_{yy} = \xi_{yx} = 0, \quad \eta_y = \sqrt{y}, \quad \eta_{yy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \eta_{yx} = 0$$

Вторые производные u_{xx} и u_{yy} имеют вид:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}, \quad u_{yy} = u_{\eta\eta}y + u_{\eta} \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Подставив полученные выражения в исходное уравнение Трикоми, получим:

$$y u_{xx} + u_{yy} = y(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} u_{\eta} = y \left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{y^3}} u_{\eta} \right) = y \left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta} u_{\eta} \right) = 0$$

Поделив на y , получаем следующее каноническое уравнение в полуплоскости $y > 0$:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta} u_{\eta} = 0 \quad (1. \text{ellip})$$



С. На прямой линии $y = 0$ (параболический тип). Точки параболичности лежат на прямой линии.

1) Т.к. $y = 0$, то вообще говоря, уравнение Трикоми в этом случае уже имеет канонический вид вид:

$$u_{yy} = 0 \quad (p. 1a)$$

и таким образом задача решена.

2) Если же мы пойдём стандартным путём, то тогда нам надо некоторым образом выбрать новые независимые переменные $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$. Первую, так как мы имеем единственный первый интеграл $\delta(x, y) = x$ по принятой технологии полагаем:

$$\xi = x.$$

Вторую (опять же по теории) выбираем произвольным образом но так, чтобы функции ξ, η образовывали линейно независимую пару — чтобы якобиан не был равен нулю). Например, для простоты положим

$$\eta = y.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \xi_x = 1, \quad \xi_{xx} = \xi_{xy} = 0, & \quad \eta_x = \eta_{xx} = \eta_{xy} = 0; \\ \xi_y = \xi_{yy} = \xi_{yx} = 0; & \quad \eta_y = 1, \quad \eta_{yy} = \eta_{yx} = 0. \end{aligned}$$

Якобиан равен:

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$



Находим первые u_x , u_y и вторые производные u_{xx} , u_{yy} . Они имеют вид:

$$u_x = u_\xi, \quad u_y = u_\eta, \quad u_{xx} = u_{\xi\xi}, \quad u_{yy} = u_{\eta\eta}.$$

Подставляя в уравнение Трикоми получаем его *канонический* вид в переменных (ξ, η) на прямой $y = 0$:

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0 \cdot u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$$

$$u_{\eta\eta} = 0$$

(1. *parab*)

Ответ:

1. В полуплоскости $y < 0$, *гиперболический* тип:

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi-\eta)} (-u_\xi + u_\eta) = 0;$$

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{1}{3\eta} u_\beta = 0$$

2. В полуплоскости $y > 0$, *эллиптический* тип:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta} u_\eta = 0;$$

3. На прямой линии $y = 0$, *параболический* тип:

$$u_{\eta\eta} = 0;$$



Франческо Джакомо Трикоми

(итал. Francesco Giacomo Tricomi; 5 мая 1897, Неаполь, Италия — 21 ноября 1978, Турин, Италия)

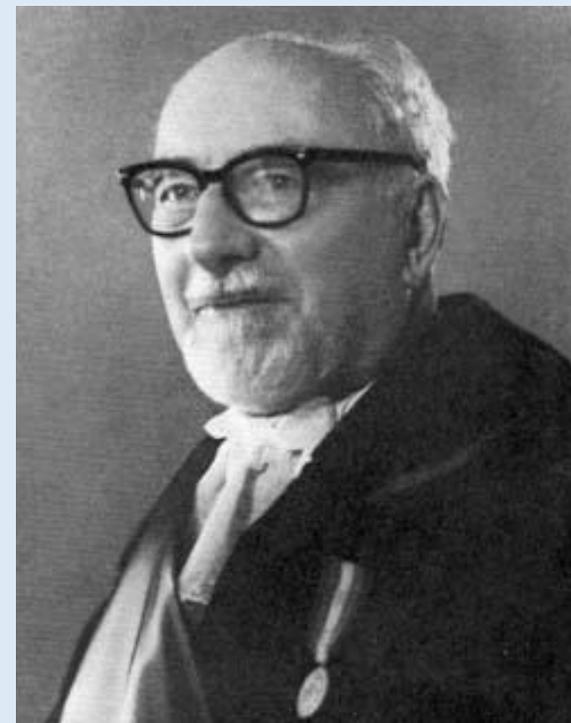
Итальянский математик, член Национальной академии деи Линчеи.

Автор более трёхсот научных работ, посвящённых теории дифференциальных и интегральных уравнений, теории функций, теории вероятностей и её приложениям к теории аэродинамики, теории сингулярных интегралов. Virtuозно используя математический аппарат, решил ряд нетривиальных прикладных задач.

Преподавал в университетах Турина, Рима, Падуи и Флоренции. В период 1948 — 1950 гг. работал в Калифорнийском технологическом институте (США) над так называемым проектом Бейтмана. Итогом явилось создание пятитомной энциклопедии по специальным функциям и функциональным преобразованиям. В 1961 году получил премию имени Антонио Фелтринелли за выдающиеся достижения в математике и механике.

Стал широко известен в **1923** году благодаря своей работе, в которой *исследовал корректные краевые задачи для линейных уравнений в частных производных второго порядка смешанного типа; в его честь простейшее уравнение такого типа названо уравнением Трикоми.*

Его имя носят также и другие математические понятия — функция Трикоми и газ Трикоми. С помощью построенной им функции Трикоми удалось решить одну старую задачу из теории чисел, а также новую задачу из области теоретической биологии: дать теоретическое обоснование для количественной характеристики устойчивости колонии бактерий к антибиотику. За рубежом, особенно **в США и СССР, Трикоми считали легендарной личностью, одним из крупнейших математиков двадцатого столетия.** Трикоми похоронен согласно его желанию на маленьком кладбище в Торре-Пелличе — городе, с которым его связывали многие яркие воспоминания.





Мария Чибрарио

(итал. Maria Cibrario; 6 сентября 1905, Генуя, Италия — 16 мая 1992, Павия, Италия)

Известный итальянский математик, профессор (1947), член Национальной академии деи Линчеи.

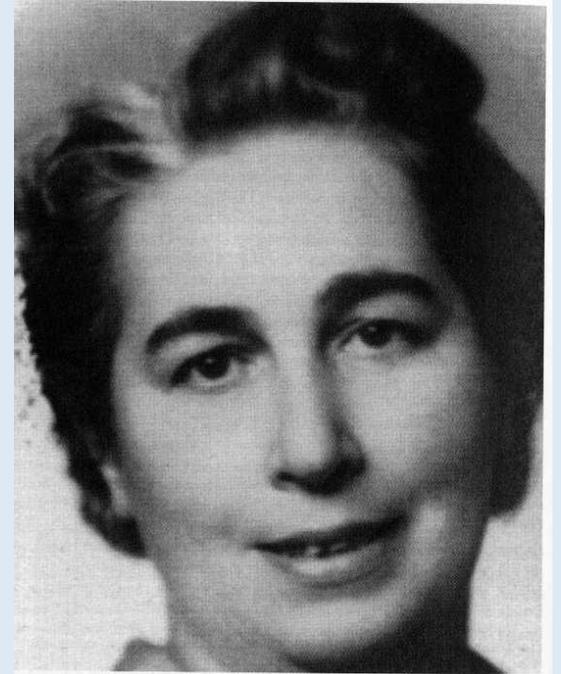
Автор около ста научных работ, посвящённых теории дифференциальных уравнений в частных производных и смежным вопросам.

Относится к числу наиболее известных женщин-математиков в мире.

Окончила университет Турина в 1927 году. Преподавала в университетах Турина и Павия, а также некоторое время — в университетах Кальяри и Модена.

Профессор математики с 1947 года. В 1938 году вышла замуж за профессора математики Сильвио Чинквини, после чего носила двойную фамилию

Чинквини-Чибрарио (итал. Cinquini-Cibrario). Имела троих детей: Джузеппе, Витторию и Карло.



Maria Cinquini Cibrario

Основные работы М. Чибрарио посвящены классификации линейных уравнений в частных производных второго порядка смешанного типа, включая множество теорем существования и единственности решений для таких уравнений, а также исследованию систем нелинейных гиперболических уравнений. В этой области она ушла далеко вперёд своих знаменитых предшественников — Ф. Трикоми и С. В. Ковалевской.

В её честь В. И. Арнольдом названа одна из нормальных форм дифференциальных уравнений, не разрешённых относительно производной.



Было рассмотрено уравнение Трикоми: $y u_{xx} + u_{yy} = 0$

Задание на дом.

Определить тип уравнений и привести к каноническому виду.

1. $x u_{xx} + u_{yy} = 0$

2. $u_{xx} + x u_{yy} = 0$

3. $u_{xx} + y u_{yy} = 0$

4. $u_{xx} + y u_{yy} + \frac{1}{2} u_y = 0$

5. $y u_{xx} + x u_{yy} = 0$

6. $x u_{xx} + y u_{yy} = 0$

7. $u_{xx} + x y u_{yy} = 0$

Сравнить номера **3.** и **4.** К чему привело дополнительное слагаемое?



БЛАГОДАРЮ

ЗА

ВНИМАНИЕ

