БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Решения задач по классификации УМФ с переменными коэффициентами и приведение их к каноническому виду.

Уравнение Трикоми.

При решении задач по этой теме необходимо помнить основные правила дифференцирования сложных функций, позволяющие преобразовать производные от функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ к новым переменным $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$.

Применяем следующие формулы:

$$u_x = u_\xi \, \xi_x + u_\eta \, \eta_x \,,$$

$$u_y = u_\xi \, \xi_y + u_\eta \, \eta_y \,,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \, \xi_x^2 + 2\, u_{\xi\eta} \, \xi_x \, \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \, \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \,, \qquad (1.10)$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \, \xi_x \, \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \, \eta_y + \xi_y \, \eta_x) + u_{\eta\eta} \, \eta_x \, \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \, \eta_{xy} \,,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \, \xi_y^2 + 2\, u_{\xi\eta} \, \xi_y \, \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \, \xi_{yy} + u_\eta \, \eta_{yy} \,.$$

Пример 1. **Уравнение Трикоми:** $y\,u_{xx} + u_{yy} = 0$

1. Определить тип уравнения.
2. Найти характеристики.
3. Привести к каноническому виду.

Решение.

1. Сопоставим уравнение с общим видом ЛДУЧП-2:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Имеем $a_{11} = y$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$.

2. Вычислим дискриминант: $\Delta = {a_{12}}^2 - a_{11}a_{22} = -y$.

3. Определим тип уравнения (1). Согласно классификации оно ***смешанного*** типа, т.к.

1) в полуплоскости $y < 0$ – оно имеет ***гиперболический*** тип,
2) в полуплоскости $y > 0$ – ***эллиптический*** тип, а
3) на прямой $y = 0$ – ***параболический*** тип.

Замечание. Уравнение Трикоми представляет интерес для задач аэро- и газодинамики. В области ***гиперболичности*** оно соответствует ***сверхзвуковому*** движению, а в области ***эллиптичности – дозвуковому***. Область ***параболичности – граница***.

4 . Запишем ***характеристическое уравнение*** и найдём ***характеристические функции***. Общий вид характеристического уравнения следующий:

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0.$$

В нашем случае $(a_{11} = y,\ a_{12} = 0,\ a_{22} = 1)$ имеем:

$$ydy^2 + dx^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{-y}}$$

Имеем два ОДУ-1 с разделяющимися переменными. Решим их в каждой из выделенных областей.

а) В полуплоскости $y < 0$ (гиперболический тип) имеем:

$$dx = \pm\sqrt{-y}dy \quad \Rightarrow \quad x + C = \mp\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} .$$

В данном случае мы имеем два семейства вещественных характеристик уравнения Трикоми. Это следующие кривые (первые интегралы) :

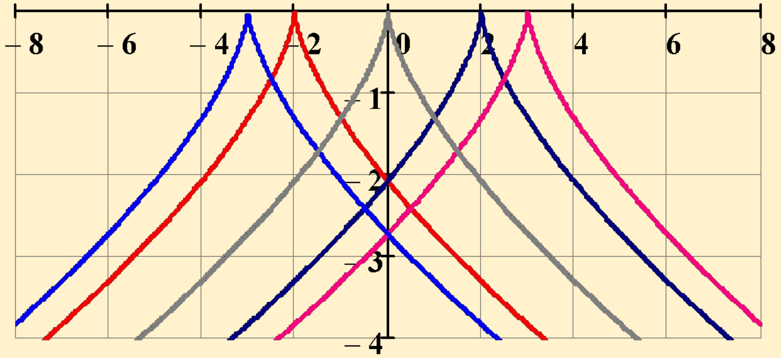
$$\varphi(x,y) = x + \frac{2}{3}\sqrt{-y^3} = C_1 , \quad \psi(x,y) = x - \frac{2}{3}\sqrt{-y^3} = C_2 ,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Характерный вид кривых представлен на Рис. 1.

Полученные интегралы выбираем в качестве новых переменных:

$$\xi = x + \frac{2}{3}\sqrt{-y^3} , \quad \eta = x - \frac{2}{3}\sqrt{-y^3}$$



$\xi = C$ Рис. 1 $\eta = C$

b) В полуплоскости $y > 0$ (***эллиптический тип***) имеем следующие ***характеристические уравнения***:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{i}{\sqrt{y}} \qquad \Rightarrow$$

$$dx = \mp\, i\sqrt{y}dy \quad \Rightarrow \quad x + C = \pm\, i\,\frac{2}{3}\sqrt{y^3}.$$

Здесь i – мнимая единица. Имеем два семейства комплексных интегральных характеристик:

$$\varphi(x,y) = x + i\,\frac{2}{3}\sqrt{y^3} \quad \text{и} \quad \varphi^*(x,y) = x - i\,\frac{2}{3}\sqrt{y^3}$$

Чтобы не иметь дела с комплексными функциями, введём две вещественных функции α и β (линейные комбинации φ и φ^*):

$$\alpha(x,y) = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \qquad \beta(x,y) = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}.$$

Или после подстановки:

$$\alpha(x,y) = x\,, \quad \beta(x,y) = \frac{2}{3}\sqrt{y^3}\,,$$

С. На прямой линии $y = 0$ (***параболический тип***). Т.о. все точки параболичности лежат на прямой линии.

В этом случае имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{0}{y} = 0$$

Откуда получаем:

$$0 \cdot dx = y\,dy \quad \Rightarrow \quad dx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = C \ .$$

Поэтому единственный независимый первый интеграл имеет вид:

$$\delta(x, y) = x$$

Т.о. имеется лишь одно семейство вещественных характеристик.

5. Делаем замену переменных.

а) ***В полуплоскости $y<0$ (гиперболический тип)*** имеем:

$$\xi = x + \frac{2}{3}\sqrt{-y^3}\,, \qquad \eta = x - \frac{2}{3}\sqrt{-y^3}$$

Тогда имеем: $\xi_x = 1\,,\quad \xi_{xx} = 0,\quad \xi_{xy} = 0;\quad \eta_x = 1\,,\quad \eta_{xx} = 0,\quad \eta_{xy} = 0;$

$\xi_y = -\sqrt{-y},\quad \xi_{yy} = \frac{1}{2\sqrt{-y}},\quad \xi_{yx} = 0;\quad \eta_y = \sqrt{-y}\,,\quad \eta_{yy} = \frac{-1}{2\sqrt{-y}},\quad \eta_{yx} = 0$

Поскольку вторые производные u_{xx} и u_{yy} имеют вид:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\,\xi_x^2 + 2\,u_{\xi\eta}\,\xi_x\,\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\,\xi_{xx} + u_\eta\,\eta_{xx}\,,$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\,\xi_y^2 + 2\,u_{\xi\eta}\,\xi_y\,\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\,\xi_{yy} + u_\eta\,\eta_{yy}\,.$$

Тогда в нашем случае имеем:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2\,u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\,,$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi}(-y) + 2\,u_{\xi\eta}\,y + u_{\eta\eta}(-y) + u_\xi\frac{1}{2\sqrt{-y}} + u_\eta\left(\frac{-1}{2\sqrt{-y}}\right) = -y(u_{\xi\xi} - 2\,u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - \frac{1}{2\sqrt{-y}}(-u_\xi + u_\eta).$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение Трикоми:

$$y\,u_{xx}+u_{yy}=y(u_{\xi\xi}+2\,u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})-y(u_{\xi\xi}-2\,u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})-\frac{1}{2\sqrt{-y}}(-u_{\xi}+u_{\eta})=$$

$$=y\left[4u_{\xi\eta}-\frac{1}{2\sqrt{-y^3}}(-u_{\xi}+u_{\eta})\right]=0$$

Разделив на $4y$, получим уравнение в виде:

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{8\sqrt{-y^3}}(-u_{\xi}+u_{\eta})=0$$

Поскольку $\xi-\eta=\left(x+\frac{2}{3}\sqrt{-y^3}\right)-\left(x-\frac{2}{3}\sqrt{-y^3}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{-y^3}$, получаем, что $\sqrt{-y^3}=\frac{3}{4}(\xi-\eta)$.

Подставляя в уравнение получаем следующий ***канонический*** вид уравнения Трикоми в переменных (ξ,η): в полуплоскости $y<0$

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}(-u_{\xi}+u_{\eta})=0 \qquad (2.hiper)$$

Записанное в форме $(2.hiper)$ через смешанную производную $u_{\xi\eta}$ уравнение иногда относят ко ***второй*** канонической форме гиперболического уравнения, тогда как под ***первой*** формой (видом) понимаю его запись через «чистые» вторые производные типа $u_{\xi\xi}$ и $u_{\eta\eta}$. Получим уравнение в первой канонической форме.

Введём другие независимые переменные в виде полусуммы и полуразности от $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$:

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2} = x\,, \qquad \beta = \frac{\xi - \eta}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{-y^3}$$

Тогда имеем: $\alpha_x = 1\,,\ \alpha_{xx} = \alpha_{xy} = 0, \qquad \beta_x = \beta_{xx} = \beta_{xy} = 0\,,$

$$\alpha_y = \alpha_{yy} = \alpha_{yx} = 0, \qquad \beta_y = -\sqrt{-y}\,, \quad \beta_{yy} = \frac{1}{2\sqrt{-y}}, \quad \beta_{yx} = 0$$

Вторые производные $\boldsymbol{u_{xx}}$ и $\boldsymbol{u_{yy}}$ имеют вид:

$$u_x = u_\alpha\,, \qquad u_y = -\sqrt{-y}\,u_\beta$$

$$u_{xx} = u_{\alpha\alpha}\,, \qquad u_{yy} = -\,u_{\beta\beta}\,y + u_\beta\,\frac{1}{2\sqrt{-y}}.$$

Подставив полученные выражения в исходное уравнение Трикоми, получим:

$$y\,u_{xx} + u_{yy} = y\,u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}\,y + \frac{1}{2\sqrt{-y}}u_\beta = y\left(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{1}{2\sqrt{-y^3}}u_\beta\right) = y\left(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{1}{3\eta}u_\beta\right) = 0$$

Поделив на $\boldsymbol{y}$, получаем следующее каноническое уравнение Трикоми гиперболического типа в полуплоскости $y < 0$ в новой - первой форме:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{1}{3\eta}u_\beta = 0 \qquad\qquad (1.\,hiper)$$

b) в полуплоскости $y > 0$ (*эллиптический тип*) имеем:

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{2}{3}\sqrt{y^3}$$

Тогда имеем: $\xi_x = 1$, $\xi_{xx} = \xi_{xy} = 0$, $\eta_x = \eta_{xx} = \eta_{xy} = 0$,

$$\xi_y = \xi_{yy} = \xi_{yx} = 0, \qquad \eta_y = \sqrt{y}, \quad \eta_{yy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \eta_{yx} = 0$$

Вторые производные u_{xx} и u_{yy} имеют вид:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}, \qquad u_{yy} = u_{\eta\eta}y + u_\eta \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Подставив полученные выражения в исходное уравнение Трикоми, получим:

$$y\,u_{xx} + u_{yy} = y(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\eta = y\left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{y^3}}u_\eta\right) = y\left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_\eta\right) = 0$$

Поделив на y, получаем следующее каноническое уравнение в полуплоскости $y > 0$:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0 \qquad (1.ellip)$$

С. На прямой линии $y = 0$ (***параболический тип***). Точки параболичности лежат на прямой линии.

1) Т.к. $y = 0$, то вообще говоря, уравнение Трикоми в этом случае уже имеет канонический вид вид:

$$u_{yy} = 0 \qquad (p.1a)$$

и таким образом задача решена.

2) Если же мы пойдём стандартным путём, то тогда нам надо некоторым образом выбрать новые независимые переменные $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$. Первую, так как мы имеем единственный первый интеграл $\delta(x, y) = x$ по принятой технологии полагаем: $\xi = x$.

Вторую (опять же по теории) выбираем произвольным образом но так, чтобы функции ξ , η образовывали линейно независимую пару – чтобы якобиан не был равен нулю). Например, для простоты положим

$$\eta = y.$$

Тогда имеем: $\xi_x = 1$, $\xi_{xx} = \xi_{xy} = 0$, $\quad \eta_x = \eta_{xx} = \eta_{xy} = 0$;

$\xi_y = \xi_{yy} = \xi_{yx} = 0$; $\quad \eta_y = 1$, $\eta_{yy} = \eta_{yx} = 0$.

Якобиан равен:

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Находим первые u_x , u_y и вторые производные u_{xx} , u_{yy}. Они имеют вид:

$$u_x = u_\xi\,, \quad u_y = u_\eta\,, \quad u_{xx} = u_{\xi\xi}\,, \quad u_{yy} = u_{\eta\eta}.$$

Подставляя в уравнение Трикоми получаем его ***канонический*** вид в переменных (ξ, η) на прямой $y = 0$:

$$y\,u_{xx} + u_{yy} = 0 \cdot u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$$

$$u_{\eta\eta} = 0 \qquad (1.parab)$$

Ответ:

1. В полуплоскости $y < 0$, ***гиперболический*** тип: $u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(-u_\xi + u_\eta\right) = 0$;

   $$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{1}{3\eta}u_\beta = 0$$

2. В полуплоскости $y > 0$, ***эллиптический*** тип: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0$;

3. На прямой линии $y = 0$, ***параболический*** тип: $u_{\eta\eta} = 0$;

Франческо Джакомо Три́коми

(итал. Francesco Giacomo Tricomi; 5 мая 1897, Неаполь, Италия — 21 ноября 1978, Турин, Италия)

Итальянский математик, член Национальной академии деи Линчеи. ***Автор более трёхсот научных работ, посвящённых теории дифференциальных и интегральных уравнений, теории функций, теории вероятностей и её приложениям к теории аэродинамики, теории сингулярных интегралов. Виртуозно используя математический аппарат, решил ряд нетривиальных прикладных задач.***

Преподавал в университетах Турина, Рима, Падуи и Флоренции. В период 1948 — 1950 гг. работал в Калифорнийском технологическом институте (США) над так называемым проектом Бейтмана. Итогом явилось создание пятитомной энциклопедии по специальным функциям и функциональным преобразованиям. В 1961 году получил премию имени Антонио Фелтринелли за выдающиеся достижения в математике и механике.

Стал широко известен в **1923** году благодаря своей работе, в которой ***исследовал корректные краевые задачи для линейных уравнений в частных производных второго порядка смешанного типа; в его честь простейшее уравнение такого типа названо уравнением Трикоми***.

Его имя носят также и другие математические понятия — функция Трикоми и газ Трикоми. С помощью построенной им функции Трикоми удалось решить одну старую задачу из теории чисел, а также новую задачу из области теоретической биологии: дать теоретическое обоснование для количественной характеристики устойчивости колонии бактерий к антибиотику. За рубежом, особенно ***в США и СССР, Трикоми считали легендарной личностью, одним из крупнейших математиков двадцатого столетия***. Трикоми похоронен согласно его пожеланию на маленьком кладбище в Торре-Пелличе — городе, с которым его связывали многие яркие воспоминания.

Мария Чибра́рио

(итал. Maria Cibrario; 6 сентября 1905, Генуя, Италия — 16 мая 1992, Павия, Италия)
Известный итальянский математик, профессор (1947), член Национальной академии деи Линчеи.
Автор около ста научных работ, посвящённых теории дифференциальных уравнений в частных производных и смежным вопросам.

Относится к числу наиболее известных женщин-математиков в мире.
Окончила университет Турина в 1927 году. Преподавала в университетах Турина и Павия, а также некоторое время — в университетах Кальяри и Модена. Профессор математики с 1947 года. В 1938 году вышла замуж за профессора математики Сильвио Чинквини, после чего носила двойную фамилию Чинквини-Чибрарио (итал. Cinquini-Cibrario). Имела троих детей: Джузеппе, Витторию и Карло.

Основные работы М. Чибрарио посвящены классификации линейных уравнений в частных производных второго порядка смешанного типа, включая множество теорем существования и единственности решений для таких уравнений, а также исследованию систем нелинейных гиперболических уравнений. В этой области она ушла далеко вперёд своих знаменитых предшественников — Ф. Трикоми и С. В. Ковалевской.

В её честь В. И. Арнольдом названа одна из нормальных форм дифференциальных уравнений, не разрешённых относительно производной.

Было рассмотрено **уравнение Трикоми**: $y\,u_{xx} + u_{yy} = 0$

<u>Задание на дом</u>.

Определить тип уравнений и привести к каноническому виду.

1. $x\,u_{xx} + u_{yy} = 0$
2. $u_{xx} + x\,u_{yy} = 0$
3. $u_{xx} + y\,u_{yy} = 0$
4. $u_{xx} + y\,u_{yy} + \frac{1}{2}\,u_y = 0$
5. $y\,u_{xx} + x\,u_{yy} = 0$
6. $x\,u_{xx} + y\,u_{yy} = 0$
7. $u_{xx} + x\,y\,u_{yy} = 0$

Сравнить номера 3. и 4. К чему привело дополнительное слагаемое?

БЛАГОДАРЮ

ЗА

ВНИМАНИЕ