Потенциальная точность совместной оценки нескольких параметров

Функция правдоподобия нескольких параметров:

$$P\left[y(t)/\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\ldots,\mathrm{Q}_\mathrm{n}\right]=k_1\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T[y(t)-s(t;\ \mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\ldots,\mathrm{Q}_\mathrm{n})]^2\,dt\right\}=$$

$$=k_1\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T y^2(t)\,dt+\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)\cdot s(t;\ \mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\ldots,\mathrm{Q}_\mathrm{n})\,dt-\frac{1}{N_0}\int_0^T s^2(t;\ \mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\ldots,\mathrm{Q}_\mathrm{n})\,dt\right\}=$$

$$=k_1\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T y^2(t)\,dt-\frac{1}{N_0}\int_0^T s^2(t;\ \mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\ldots,\mathrm{Q}_\mathrm{n})\,dt\right\}\cdot\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)\cdot s(t;\ \mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\ldots,\mathrm{Q}_\mathrm{n})\,dt\right\}=$$

$$=k_2\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)\cdot s(t;\ \mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\ldots,\mathrm{Q}_\mathrm{n})\,dt\right\},$$

где входная реализация $y(t)=s(t;\mathrm{Q}_{10},\mathrm{Q}_{20},\ldots\mathrm{Q}_{\mathrm{n}0})+n(t)$

$$P\left[y(t)/\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\ldots,\mathrm{Q}_\mathrm{n}\right]=k_2\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T[s(t;\ \mathrm{Q}_{10},\mathrm{Q}_{20},\ldots,\mathrm{Q}_{\mathrm{n}0})+n(t)]\cdot s(t;\ \mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\ldots,\mathrm{Q}_\mathrm{n})dt\right\}$$

Оценку проводим по максимуму ФП при отношении с/ш >> 1

Раскладываем логарифм ФП в ряд Тейлора для истинных значений параметров:

$$\ln P\left[y(t)/\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\ldots,\mathrm{Q}_\mathrm{n}\right] \approx \ln P\left[y(t)/\mathrm{Q}_{10},\mathrm{Q}_{20},\ldots,\mathrm{Q}_{\mathrm{n}0}\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \mathrm{Q}_i}\ln P\left[y(t)/\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\ldots,\mathrm{Q}_\mathrm{n}\right]\Bigg|_{\substack{\mathrm{Q}_1=\mathrm{Q}_{10}\\ \mathrm{Q}_2=\mathrm{Q}_{20}\\ \vdots \\ \mathrm{Q}_\mathrm{n}=\mathrm{Q}_{\mathrm{n}0}}}\cdot\left(\mathrm{Q}_i-\mathrm{Q}_{i0}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{Q}_i\partial \mathrm{Q}_k}\ln P\left[y(t)/\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\ldots,\mathrm{Q}_\mathrm{n}\right]\Bigg|_{\substack{\mathrm{Q}_1=\mathrm{Q}_{10}\\ \mathrm{Q}_2=\mathrm{Q}_{20}\\ \vdots \\ \mathrm{Q}_\mathrm{n}=\mathrm{Q}_{\mathrm{n}0}}}\cdot\left(\mathrm{Q}_i-\mathrm{Q}_{i0}\right)\left(\mathrm{Q}_k-\mathrm{Q}_{k0}\right)$$

Матрица, составленная из средних значений вторых производных

$$\left\| A_{ik} \right\| = \left\| \overline{ \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{Q}_i \partial \mathrm{Q}_k} \ln P\left[y(t) / \mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \ldots, \mathrm{Q}_n \right] \Bigg|_{\substack{\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}_{10} \\ \mathrm{Q}_2 = \mathrm{Q}_{20} \\ \vdots \\ \mathrm{Q}_n = \mathrm{Q}_{n0}}} } \right\|$$

называется **<u>информационной матрицей Фишера</u>** и характеризует «остроту» многомерного пика ФП.

Матрица вторых моментов погрешностей оценок $\|\sigma_{\Sigma\, ik}\|$, характеризующая предельную точность измерения параметроввычисляется путем обращения информационной матрицы Фишера: $\|\sigma_{\Sigma\, ik}\| = \|A_{ik}\|^{-1}$.

Другими словами, обратная матрица $\|\sigma_{\Sigma\, ik}\|$ состоит из средних вторых моментов минимальных ошибок измерения параметров, достижимых в случае совместно эффективных оценок.

Важно, что если кодировки отдельных параметров в сигнале y(t) независимы, то $\|\sigma_{\Sigma ik}\|$ - диагональная матрица с элементами σ^2_{Qi}, равными дисперсии минимально достижимых ошибок измерения отдельных параметров.

Рассмотрим случай одновременной оценки двух параметров

$$P\left[y(t)/\,\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2\right]=k_2\exp\left\{\frac{2Э_C}{N_0}\rho\left(\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2\right)\right\}$$

$$\rho\left(\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2\right)=\rho_C+\rho_{Ш},$$

где

$$\begin{cases}\rho_C\left(\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2\right)=\dfrac{\int_{-\infty}^{-\infty}s\left(t;\,\mathrm{Q}_{10},\mathrm{Q}_{20}\right)s\left(t;\,\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2\right)dt}{2Э_C},\\[2ex] \rho_{Ш}\left(\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2\right)=\dfrac{\int_{-\infty}^{-\infty}n\left(t\right)s\left(t;\,\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2\right)dt}{2Э_C}.\end{cases}$$

Раскладываем АКФ в ряд в точке истинного значения параметра:

$$\rho\left(Q_1,Q_2\right)=\rho\left(Q_{10},Q_{20}\right)+\frac{\partial\rho\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_1}\Bigg|_{\substack{Q_1=Q_{10}\\ Q_2=Q_{20}}}\left(Q_1-Q_{10}\right)+\frac{\partial\rho\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_2}\Bigg|_{\substack{Q_1=Q_{10}\\ Q_2=Q_{20}}}\left(Q_2-Q_{20}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\rho\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_1^{\ 2}}\Bigg|_{\substack{Q_1=Q_{10}\\ Q_2=Q_{20}}}\left(Q_1-Q_{10}\right)^2+\frac{\partial^2\rho\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_1\partial Q_2}\Bigg|_{\substack{Q_1=Q_{10}\\ Q_2=Q_{20}}}\left(Q_1-Q_{10}\right)\left(Q_2-Q_{20}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\rho\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_2\partial Q_1}\Bigg|_{\substack{Q_1=Q_{10}\\ Q_2=Q_{20}}}\left(Q_2-Q_{20}\right)\left(Q_1-Q_{10}\right)+\frac{\partial^2\rho\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_2^{\ 2}}\Bigg|_{\substack{Q_1=Q_{10}\\ Q_2=Q_{20}}}\left(Q_2-Q_{20}\right)^2\right\}$$

Получаем выражение, позволяющее определить элементы матрицы $\left\|A_{ik}\right\|$:

$$P\left[y(t)/Q_1,Q_2\right]\approx k_3\exp\left\{\frac{2Э_C}{N_0}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\rho\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_1^{\ 2}}\Bigg|_{\substack{Q_1=Q_{10}\\ Q_2=Q_{20}}}\left(Q_1-Q_{10}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\frac{\partial^2\rho\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_1\partial Q_2}\Bigg|_{\substack{Q_1=Q_{10}\\ Q_2=Q_{20}}}\left(Q_1-Q_{10}\right)\left(Q_2-Q_{20}\right)+\frac{\partial^2\rho\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_2^{\ 2}}\Bigg|_{\substack{Q_1=Q_{10}\\ Q_2=Q_{20}}}\left(Q_2-Q_{20}\right)^2\right]\right\}$$

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1{}^2} & \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1 \partial Q_2} \\ \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial Q_2 \partial Q_1} & \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial Q_2{}^2} \end{matrix} \right\|$$

Находим элементы обратной матрицы, характеризующие минимальные ошибки соместных измерений:

$$\|A\|^{-1} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{A_{11}}{\Delta} & \dfrac{A_{12}}{\Delta} \\ \dfrac{A_{21}}{\Delta} & \dfrac{A_{22}}{\Delta} \end{matrix} \right\|,$$

где $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ − алгебраическое дополнение,

а M_{ik} − минор матрицы $\|A\|$.

Таким образом из матрицы

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial \mathrm{Q}_1{}^2} & \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial \mathrm{Q}_1 \partial \mathrm{Q}_2} \\ \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial \mathrm{Q}_2 \partial \mathrm{Q}_1} & \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial \mathrm{Q}_2{}^2} \end{Vmatrix}$$

получаем обратную ей матрицу

$$\|A\|^{-1} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial \mathrm{Q}_2{}^2}}{\Delta} & \dfrac{-\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial \mathrm{Q}_2 \partial \mathrm{Q}_1}}{\Delta} \\ \dfrac{-\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial \mathrm{Q}_1 \partial \mathrm{Q}_2}}{\Delta} & \dfrac{\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial \mathrm{Q}_1{}^2}}{\Delta} \end{Vmatrix},$$

где определитель

$$\Delta = \frac{\partial^2 \rho}{\partial \mathrm{Q}_1{}^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \mathrm{Q}_2{}^2} - \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial \mathrm{Q}_1 \partial \mathrm{Q}_2} \right)^2 = \frac{\partial^2 \rho}{\partial \mathrm{Q}_1{}^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \mathrm{Q}_2{}^2} \left(1 - r_{Q_1 Q_2}^2 \right)$$

Мы ввели обозначение

$$r_{Q_1Q_2}^2 = \frac{\dfrac{\partial^2\rho}{\partial Q_1 \partial Q_2}}{\sqrt{\dfrac{\partial^2\rho}{\partial {Q_1}^2}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial {Q_2}^2}}}$$

коэффициента корреляционной связи между оцениваемыми параметрами.

Определить можно записать иначе:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2 \left[\frac{\dfrac{\partial^2\rho}{\partial {Q_1}^2}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial {Q_2}^2}}{\left(\dfrac{\partial^2\rho}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2} - 1\right] = \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2 \left[\frac{1}{r_{Q_1Q_2}^2} - 1\right].$$

Запишем обратную матрицу в виде

$$\left\|A\right\|^{-1}=\left\|\begin{matrix}\dfrac{1}{\dfrac{\partial^2\rho}{\partial \mathrm{Q}_1{}^2}\left[1-r_{Q_1Q_2}^2\right]} & -\dfrac{r_{Q_1Q_2}^2}{\dfrac{\partial^2\rho}{\partial \mathrm{Q}_1\partial \mathrm{Q}_2}\left[1-r_{Q_1Q_2}^2\right]}\\ -\dfrac{r_{Q_1Q_2}^2}{\dfrac{\partial^2\rho}{\partial \mathrm{Q}_1\partial \mathrm{Q}_2}\left[1-r_{Q_1Q_2}^2\right]} & \dfrac{1}{\dfrac{\partial^2\rho}{\partial \mathrm{Q}_2{}^2}\left[1-r_{Q_1Q_2}^2\right]}\end{matrix}\right\|$$

Окончательно получаем:

$$\sigma_{Q_1}^2=-\frac{1}{\dfrac{2Э_C}{N_0}\cdot\dfrac{\partial^2\rho\left(\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2\right)}{\partial \mathrm{Q}_1{}^2}\Bigg|_{\substack{Q_1=Q_{10}\\ Q_2=Q_{20}}}\left[1-r_{Q_1Q_2}^2\right]};$$

$$\sigma_{Q_2}^2=-\frac{1}{\dfrac{2Э_C}{N_0}\cdot\dfrac{\partial^2\rho\left(\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2\right)}{\partial \mathrm{Q}_2{}^2}\Bigg|_{\substack{Q_1=Q_{10}\\ Q_2=Q_{20}}}\left[1-r_{Q_1Q_2}^2\right]}.$$

Множитель $\frac{1}{\left[1 - r^2_{Q_1 Q_2}\right]}$ отражает корреляционную связьмежду измеряемыми параметрами.

При наличии корреляции ($r > 0$) этот множитель больше единицы и точность хуже, чем при некоррелированных параметрах Q_1 и Q_2.