

**Потенциальная точность
совместной оценки нескольких
параметров**

Функция правдоподобия нескольких параметров:

$$\begin{aligned}
 P[y(t) / Q_1, Q_2, \dots, Q_n] &= k_1 \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - s(t; Q_1, Q_2, \dots, Q_n)]^2 dt \right\} = \\
 &= k_1 \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T y^2(t) dt + \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) \cdot s(t; Q_1, Q_2, \dots, Q_n) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t; Q_1, Q_2, \dots, Q_n) dt \right\} = \\
 &= k_1 \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T y^2(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t; Q_1, Q_2, \dots, Q_n) dt \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) \cdot s(t; Q_1, Q_2, \dots, Q_n) dt \right\} = \\
 &= k_2 \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) \cdot s(t; Q_1, Q_2, \dots, Q_n) dt \right\},
 \end{aligned}$$

где входная реализация $y(t) = s(t; Q_{10}, Q_{20}, \dots, Q_{n0}) + n(t)$

$$P[y(t) / Q_1, Q_2, \dots, Q_n] = k_2 \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T [s(t; Q_{10}, Q_{20}, \dots, Q_{n0}) + n(t)] \cdot s(t; Q_1, Q_2, \dots, Q_n) dt \right\}$$

Оценку проводим по максимуму ФП при отношении $c/\sigma \gg 1$

Раскладываем логарифм ФП в ряд Тейлора для истинных значений параметров:

$$\begin{aligned} \ln P[y(t) / Q_1, Q_2, \dots, Q_n] &\approx \ln P[y(t) / Q_{10}, Q_{20}, \dots, Q_{n0}] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial Q_i} \ln P[y(t) / Q_1, Q_2, \dots, Q_n] \Big|_{\substack{Q_1=Q_{10} \\ Q_2=Q_{20} \\ \vdots \\ Q_n=Q_{n0}}} \cdot (Q_i - Q_{i0}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial Q_i \partial Q_k} \ln P[y(t) / Q_1, Q_2, \dots, Q_n] \Big|_{\substack{Q_1=Q_{10} \\ Q_2=Q_{20} \\ \vdots \\ Q_n=Q_{n0}}} \cdot (Q_i - Q_{i0})(Q_k - Q_{k0}) \end{aligned}$$

Матрица, составленная из средних значений вторых производных

$$\|A_{ik}\| = \left\| \frac{\partial^2}{\partial Q_i \partial Q_k} \ln P[y(t) / Q_1, Q_2, \dots, Q_n] \right\|_{\substack{Q_1=Q_{10} \\ Q_2=Q_{20} \\ \vdots \\ Q_n=Q_{n0}}}$$

называется **информационной матрицей Фишера** и характеризует «остроту» многомерного пика ФП.

Матрица вторых моментов погрешностей оценок $\|\sigma_{\Sigma ik}\|$, характеризующая предельную точность измерения параметров вычисляется путем обращения информационной матрицы Фишера: $\|\sigma_{\Sigma ik}\| = \|A_{ik}\|^{-1}$.

Другими словами, обратная матрица $\|\sigma_{\Sigma ik}\|$ состоит из средних вторых моментов минимальных ошибок измерения параметров, достижимых в случае совместно эффективных оценок.

Важно, что если кодировки отдельных параметров в сигнале $y(t)$ независимы, то $\|\sigma_{\Sigma ik}\|$ - диагональная матрица с элементами $\sigma_{Q_i}^2$ равными дисперсии минимально достижимых ошибок измерения отдельных параметров.

Рассмотрим случай одновременной оценки двух параметров

$$P[y(t) / Q_1, Q_2] = k_2 \exp \left\{ \frac{2\mathcal{E}_C}{N_0} \rho(Q_1, Q_2) \right\}$$

$$\rho(Q_1, Q_2) = \rho_C + \rho_{III},$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_C(Q_1, Q_2) = \frac{\int_{-\infty}^{-\infty} s(t; Q_{10}, Q_{20}) s(t; Q_1, Q_2) dt}{2\mathcal{E}_C}, \\ \rho_{III}(Q_1, Q_2) = \frac{\int_{-\infty}^{-\infty} n(t) s(t; Q_1, Q_2) dt}{2\mathcal{E}_C}. \end{array} \right.$$

Раскладываем АКФ в ряд в точке истинного значения параметра:

$$\begin{aligned} \rho(Q_1, Q_2) = & \rho(Q_{10}, Q_{20}) + \frac{\partial \rho(Q_1, Q_2)}{\partial Q_1} \Big|_{\substack{Q_1=Q_{10} \\ Q_2=Q_{20}}} (Q_1 - Q_{10}) + \frac{\partial \rho(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2} \Big|_{\substack{Q_1=Q_{10} \\ Q_2=Q_{20}}} (Q_2 - Q_{20}) + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \rho(Q_1, Q_2)}{\partial Q_1^2} \Big|_{\substack{Q_1=Q_{10} \\ Q_2=Q_{20}}} (Q_1 - Q_{10})^2 + \frac{\partial^2 \rho(Q_1, Q_2)}{\partial Q_1 \partial Q_2} \Big|_{\substack{Q_1=Q_{10} \\ Q_2=Q_{20}}} (Q_1 - Q_{10})(Q_2 - Q_{20}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \rho(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2 \partial Q_1} \Big|_{\substack{Q_1=Q_{10} \\ Q_2=Q_{20}}} (Q_2 - Q_{20})(Q_1 - Q_{10}) + \frac{\partial^2 \rho(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2^2} \Big|_{\substack{Q_1=Q_{10} \\ Q_2=Q_{20}}} (Q_2 - Q_{20})^2 \right\} \end{aligned}$$

Получаем выражение, позволяющее определить элементы матрицы $\|A_{ik}\|$:

$$\begin{aligned} P[y(t) / Q_1, Q_2] \approx & k_3 \exp \left\{ \frac{2\mathcal{E}_C}{N_0} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \rho(Q_1, Q_2)}{\partial Q_1^2} \Big|_{\substack{Q_1=Q_{10} \\ Q_2=Q_{20}}} (Q_1 - Q_{10})^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{\partial^2 \rho(Q_1, Q_2)}{\partial Q_1 \partial Q_2} \Big|_{\substack{Q_1=Q_{10} \\ Q_2=Q_{20}}} (Q_1 - Q_{10})(Q_2 - Q_{20}) + \frac{\partial^2 \rho(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2^2} \Big|_{\substack{Q_1=Q_{10} \\ Q_2=Q_{20}}} (Q_2 - Q_{20})^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1^2} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1 \partial Q_2} \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_2 \partial Q_1} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_2^2} \end{array} \right\|$$

Находим элементы обратной матрицы, характеризующие минимальные ошибки совместных измерений:

$$\|A\|^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{12}}{\Delta} \\ \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \end{array} \right\|,$$

где $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ – алгебраическое дополнение,

а M_{ik} – минор матрицы $\|A\|$.

Таким образом из матрицы

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1^2} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1 \partial Q_2} \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_2 \partial Q_1} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_2^2} \end{array} \right\|$$

получаем обратную ей матрицу

$$\|A\|^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_2^2} & -\frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_2 \partial Q_1} \\ -\frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1 \partial Q_2} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1^2} \end{array} \right\| \frac{1}{\Delta},$$

где определитель

$$\Delta = \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1 \partial Q_2} \right)^2 = \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_2^2} (1 - r_{Q_1 Q_2}^2)$$

Мы ввели обозначение

$$r_{Q_1 Q_2}^2 = \frac{\frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1 \partial Q_2}}{\sqrt{\frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_2^2}}}$$

коэффициента корреляционной связи между оцениваемыми параметрами.

Определить можно записать иначе:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1 \partial Q_2} \right)^2 \left[\frac{\frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_2^2}}{\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1 \partial Q_2} \right)^2} - 1 \right] = \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1 \partial Q_2} \right)^2 \left[\frac{1}{r_{Q_1 Q_2}^2} - 1 \right].$$

Запишем обратную матрицу в виде

$$\|A\|^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{\frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1^2} [1 - r_{Q_1 Q_2}^2]} & - \frac{r_{Q_1 Q_2}^2}{\frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1 \partial Q_2} [1 - r_{Q_1 Q_2}^2]} \\ - \frac{r_{Q_1 Q_2}^2}{\frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_1 \partial Q_2} [1 - r_{Q_1 Q_2}^2]} & \frac{1}{\frac{\partial^2 \rho}{\partial Q_2^2} [1 - r_{Q_1 Q_2}^2]} \end{array} \right\|$$

Окончательно получаем:

$$\sigma_{Q_1}^2 = - \frac{1}{\frac{2\mathcal{E}_C}{N_0} \cdot \frac{\partial^2 \rho(Q_1, Q_2)}{\partial Q_1^2} \Big|_{\substack{Q_1=Q_{10} \\ Q_2=Q_{20}}} [1 - r_{Q_1 Q_2}^2]};$$

$$\sigma_{Q_2}^2 = - \frac{1}{\frac{2\mathcal{E}_C}{N_0} \cdot \frac{\partial^2 \rho(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2^2} \Big|_{\substack{Q_1=Q_{10} \\ Q_2=Q_{20}}} [1 - r_{Q_1 Q_2}^2]}.$$

Множитель $\frac{1}{[1 - r_{Q_1 Q_2}^2]}$ отражает корреляционную связь между измеряемыми параметрами.

При наличии корреляции ($r > 0$) этот множитель больше единицы и точность хуже, чем при некоррелированных параметрах Q_1 и Q_2 .