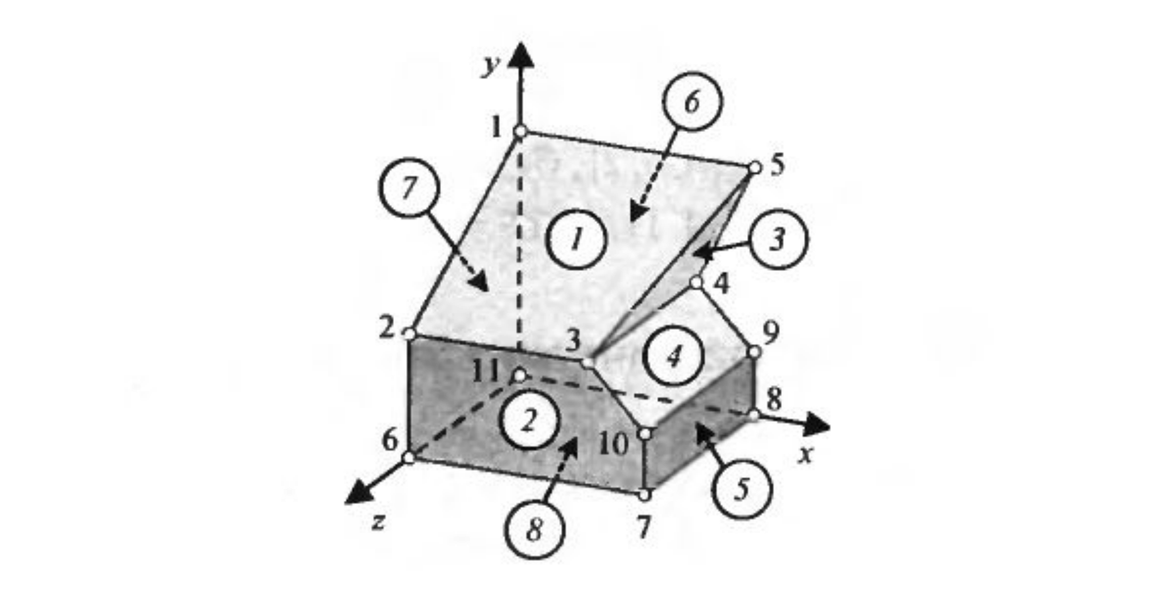
Тесты свойств графических элементов в пространстве



Полиэдр

Понятие

Полиэдр — замкнутый пространственный объект, ограниченный плоскостями. Среди объемных тел полиэдры занимают такое же важное место, как и полигоны среди плоских фигур.

Понятие

Благодаря планарности всех граничных поверхностей полиэдра существенно упрощается расчет его пересечений с различными геометрическими примитивами и другими полиэдрами. Помимо того, что в природе существует множество собственно полиэдральных объектов (пять правильных многогранников, призмы, пирамиды и т. п.), часто криволинейные граничные поверхности аппроксимируют системой полигональных граней, что превращает гладкие объекты в полиэдры.

Задание полиэдра

- Оптимальная модель полиэдра $H = \{P, G\}$, где
$\boldsymbol{P}$ – координатный список вершин

$$P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n_\text{в}}\}$$

пронумерованных в произвольном порядке

$\boldsymbol{G}$ − топологический массив граней

$$G = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_{n_\text{г}}\}$$

Элемент массива

$$G_i = \{g_{i1}, g_{i2}, g_{i3}, \dots, g_{in_i}, g_{i1}\}$$

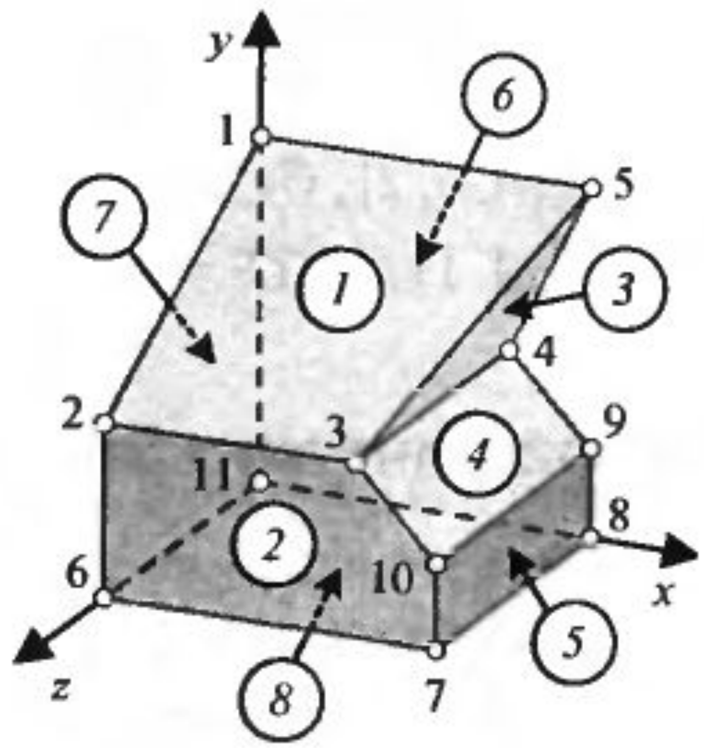
представляет собой список номеров n_i вершин полигона i-ой грани, перечисленных в порядке их обхода по замкнутому контуру.

Способ доступа

- В рамках такого метода организации структуры данных полиэдра доступ к его конкретной вершине с номером g_{ij} осуществляется в два этапа.

1. Из списка G, считывается j-ый элемент $\nu = g_{ij}$
2. Из списка P считывается элемент p_{ν}.

Пример описания полиэдра



Пример описания полиэдра

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{т}}, G = \{G_1, G_2, ..., G_7\},$$

где $\begin{cases} G_1 = \{1, 2, 3, 5, 1\},\ G_2 = \{2, 3, 10, 7, 6, 2\},\ G_3 = \{3, 4, 5, 3\}, \\ G_4 = \{3, 4, 9, 10, 3\}, G_5 = \{7, 8, 9, 10, 7\},\ G_6 = \{5, 4, 9, 8, 11, 1, 5\}, \\ G_7 = \{1, 2, 6, 11, 1\} \end{cases}$

Вспомогательные функции

- Полигон вершин i-ой грани полиэдра $\{P, G\}$:

$$side(P, G, i) = \{p_{g_{i1}}, \dots, p_{g_{in_i}}, p_{g_{i1}}\}$$

Вектор нормали к плоскости полигона $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_1\}$

$$norm(P) = (p_2 - p_1) \times (p_3 - p_2)$$

Тест ориентации точки относительно плоскости

Тест ориентации точки относительно плоскости

- Тест ориентации точки p относительно плоскости заключается в проверке знака числа $f(p)$, для вычисления которого в зависимости от способа задания плоскости используется соответствующая неявная функция $nf\ *$.

Рассмотрим тесты, основанные на свойстве сепарабельности плоскости $f(p) = C$ разделять пространство на два подпространства с противоположными знакам.

Тест ориентации точки относительно плоскости (НФ)

- Пусть даны точка $p = (p_x, p_y, p_z)$ и плоскость

$$F(p) = Ax + By + Cz + D = 0$$

Тогда

$$nfF(p) = Ap_x + Bp_y + Cp_z + D$$

Тест ориентации точки относительно плоскости (ПФ)

- Пусть даны точка $p = (p_x, p_y, p_z)$ и плоскость $\{p_0, N\}$

$$F(p) = N \cdot (p - p_0) = 0$$

Тогда

$$nfN(p_0, N, p) = N \cdot (p - p_0)$$

Тест ориентации точки относительно плоскости, проходящей через 3 точки

- Пусть даны точка $p = (p_x, p_y, p_z)$ и плоскость, проходящая через 3 точки$a = \left(a_x, a_y, a_z\right)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$ и $c = (c_x, c_y, c_z)$

Тогда

$$nf3(a, b, c, p) = (p - a) \cdot ((b - a) \times (c - b)) = \begin{bmatrix} p - a \\ b - a \\ c - b \end{bmatrix}$$

Тест ориентации точки относительно плоскости, содержащей грань

- Пусть даны точка $p = (p_x, p_y, p_z)$ и плоскость полигона $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_1\}$

Тогда

$$nfG(P, p) = (p - p_1) \cdot norm(\{p_1 p_2 p_3\}) = \begin{bmatrix} p - p_1 \\ p_2 - p_1 \\ p_3 - p_2 \end{bmatrix}$$

Положительное полупространство

- Внешнее полупространство, в которое направлена нормаль плоскости, называют положительным согласно знаку всех определенных выше функций $nf \; * > 0$.

Тест пересечения плоскости и полиэдра

Тест пересечения плоскости и полиэдра

- Тест пересечения плоскости $f(p) = 0$ с полиэдром $H = \{P, G\}$, имеющим список вершин $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$, идентичен двумерному аналогу с точностью до имени функции:

$$cross3(f, P) = \{\exists\ 1 \le j < i \le n \colon f(p_i) \cdot f(p_j) < 0\}$$

Плоскость пересекает полиэдр, если существует хотя бы одна пара вершин $(\boldsymbol{p_i p_j})$, лежащих от нее по разные стороны.

Тест пересечения плоскости и полиэдра

- Свойство сепарабельности плоскости позволяет по разным знакам значений НФ $f(p_i)$ и $f(p_j)$ обнаружить вершины полиэдра p_i и p_j лежащие по разные стороны от пересекающей его плоскости. Если же не найдется ни одной пары разносторонних вершин, то пересечение отсутствует. Функция $cross3(f, P)$ возвращает 1 как признак пересечения. В отсутствие оного тест возвращает -1, а при касании полиэдра с плоскостью вершиной, ребром или гранью — значение 0.

Тест выпуклости полиэдра

Тест выпуклости полиэдра

- Тест выпуклости полиэдра $H = \{P, G\}$, имеющим список вершин $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ и граней $G = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_m\}$:

$$conv3(P,G) = \{sgn\left(nfG\left(side(P,G,i), p_j\right)\right) = const, \forall i = 1..m, j = 1..n, j \neq G_i\}$$

У выпуклого полиэдра нет ни одной пары вершин, лежащих по разные стороны от любой грани

Тест выпуклости полиэдра

- В невыпуклом полигоне всегда найдутся грань G, и пара вершин $\{p_j, p_k\}$, находящиеся по разные стороны от плоскости этой грани.

Свойство сепарабельности плоскости позволяет обнаружить у полиэдра невыпуклую грань $\Pi = side(P, G, i)$ по противоположным знакам чисел $nfG(\Pi_i, p_j)$ и $nfG(\Pi_i, p_k)$ в вершинах $p_j \notin \Pi_i$ и $p_k \notin \Pi_i$ не входящих в состав грани Π_i.

Тест выпуклости полиэдра

- Алгоритмы реализации теста выпуклости полиэдра аналогичны тесту выпуклости полигона на плоскости. Все 3 алгоритма подходят для их реализации. Наилучшим из них является третий алгоритм, который использует 2 флажка сигнализирующих о наличии вершин слева (флажок l) и справа (флажок r) от плоскости i-й грани $\Pi = side(P, G, i)$.

Тесты ориентации точки относительно полиэдра

Тесты ориентации точки относительно полиэдра

- Тесты ориентации точки q относительно полиэдра $H = \{P, G\}$, имеющим список вершин $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ и граней $G = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_m\}$, имеют туже логику что и тесты ориентации точки относительно полигона на плоскости.

Выпуклый тест

Выпуклый тест

- Выпуклый тест

$$conv3\_test(q,P,G) = \begin{cases} -1, \text{если } f_i < 0, \forall\, i = 1..m \\ 1, \text{если } \exists i \in [1,m]\colon f_i > 0 \\ 0, \text{если не } \pm 1 \end{cases}$$

где

$$f_i = nfG(side(P,G,i),q)$$

Выпуклый тест

- Все внутренние точки $q_{\text{вну}}$ лежат с одинаковых сторон от всех граней Π_i. Для любой внешней точки $q_{\text{вне}}$ всегда найдется пара граней Π_i и Π_j, относительно которых она расположена с разных сторон. Наконец, все точки, не идентифицированные как внутренние или внешние, считаются граничными точками $q_{\text{гр}}$, расположенными на гранях, ребрах или вершинах выпуклого полиэдра.

Габаритный тест

Габаритный тест

- Габаритный тест

$$gab3\_test(q, P) = \{x \notin [x_{min}, x_{max}]\} \cup \{y \notin [y_{min}, y_{max}]\} \cup \{z \notin [z_{min}, z_{max}]\}$$

определяет по возвращаемому значению $gab3\_test = 1$ гарантированную непринадлежность точки q произвольному полиэдру $H = \{P, G\}$ путем сравнения ее координат с габаритными параметрами полиэдра.

Лучевой тест

Лучевой тест

- Лучевой тест аналогичен плоскому варианту со следующими изменениями:

1. Генерируется вектор $V \in R^3$ со случайными углами места $\varphi = rnd(2\pi)$ и азимута $\psi = rnd(\pi)$

$$V = [sin\varphi sin\psi \quad cos\psi \quad cos\varphi sin\psi]$$

2. Рассчитываются параметры $[t_i \quad \tau_i \quad \Theta_i]$ и точка $c_i = q + Vt_i$ пересечения луча $p(t) = q + Vt$ с плоскостью i-ой грани $\Pi_i = side(P, G, i)$.

3. Блок проверки условий $0 \le \tau_i \le 1$ заменяется тестом ориентации точки c_i, относительно полигона i-й грани. Для Π_i в виде параллелограмма это $\{0 \le \tau_i \le 1\} \cap \{0 \le \Theta_i \le 1\}$, для треугольника — $\{0 \le \Theta_i \le \tau_i \le 1\}$.

Лучевой тест

- В общем случае для проверки принадлежности точки произвольному плоскому полигону применяются тесты ориентации на плоскости.

Обозначим результат такого теста $r_i \in \{-1,0,1\}$. Решение о принадлежности точки полиэдру выносится на основе следующих правил:

1. Точка не принадлежит полиэдру, если число пар $\{t_i > 0, r_i = -1\}$ равно нулю или четно.
2. Точка лежит внутри полиэдра, если число этих пар нечетно.
3. Точка принадлежит границе полиэдра, если имеется хотя бы одна пара $\{t_i = 0, r_i \leq 0\}$.