
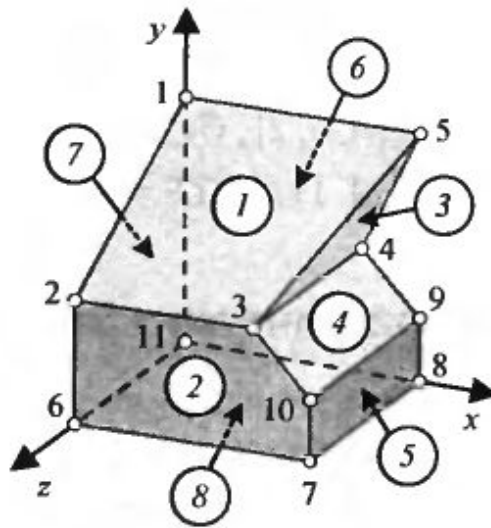


# **Тесты свойств графических элементов в пространстве**





# Полиэдр

# Понятие

**Полиэдр** — замкнутый пространственный объект, ограниченный плоскостями. Среди объемных тел полиэдры занимают такое же важное место, как и полигоны среди плоских фигур.

# Понятие

Благодаря планарности всех граничных поверхностей полиэдра существенно упрощается расчет его пересечений с различными геометрическими примитивами и другими полиэдрами. Помимо того, что в природе существует множество собственно полиэдральных объектов (пять правильных многогранников, призмы, пирамиды и т. п.), часто криволинейные граничные поверхности аппроксимируют системой полигональных граней, что превращает гладкие объекты в полиэдры.

# Задание полиэдра

Оптимальная модель полиэдра  $H = \{P, G\}$ , где  $P$  – координатный список вершин

$$P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n_B}\}$$

пронумерованных в произвольном порядке

$G$  – топологический массив граней

$$G = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_{n_G}\}$$

Элемент массива

$$G_i = \{g_{i1}, g_{i2}, g_{i3}, \dots, g_{in_i}, g_{i1}\}$$

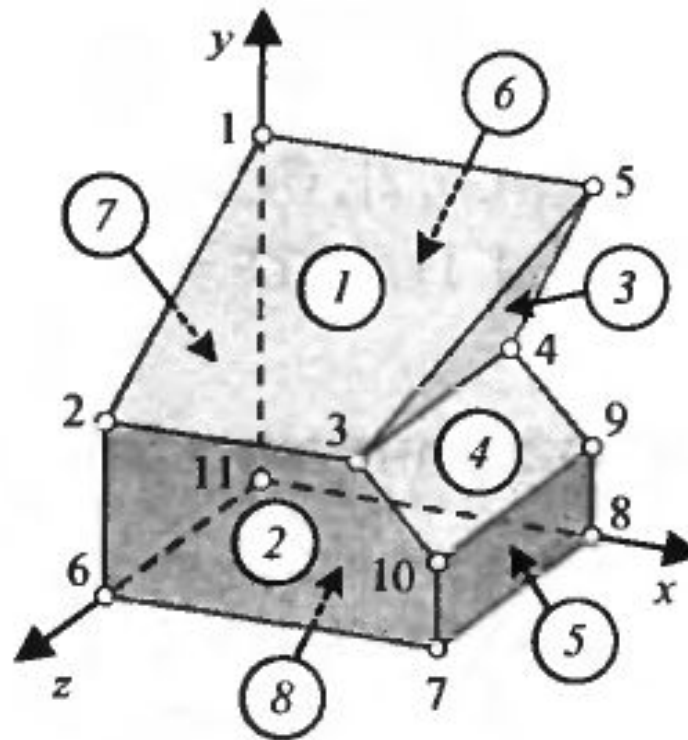
представляет собой список номеров  $n_i$  вершин полигона  $i$ -ой грани, перечисленных в порядке их обхода по замкнутому контуру.

# Способ доступа

В рамках такого метода организации структуры данных полиэдра доступ к его конкретной вершине с номером  $g_{ij}$  осуществляется в два этапа.

1. Из списка  $G$ , считывается  $j$ -ый элемент  $v = g_{ij}$
2. Из списка  $P$  считывается элемент  $p_v$ .

# Пример описания полиэдра



# Пример описания полиэдра

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}^T, G = \{G_1, G_2, \dots, G_7\},$$

где

$$\begin{cases} G_1 = \{1, 2, 3, 5, 1\}, G_2 = \{2, 3, 10, 7, 6, 2\}, G_3 = \{3, 4, 5, 3\}, \\ G_4 = \{3, 4, 9, 10, 3\}, G_5 = \{7, 8, 9, 10, 7\}, G_6 = \{5, 4, 9, 8, 11, 1, 5\}, \\ G_7 = \{1, 2, 6, 11, 1\} \end{cases}$$




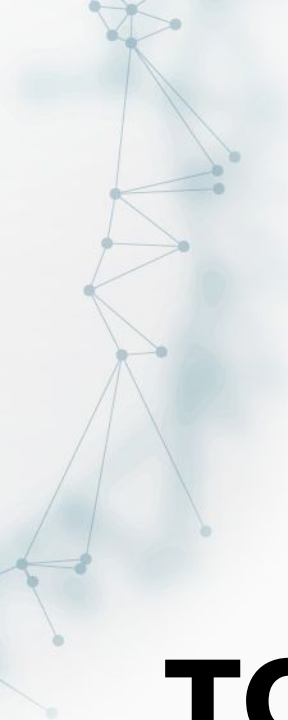
# Вспомогательные функции

▣ Полигон вершин  $i$ -ой грани полиэдра  $\{P, G\}$ :

$$side(P, G, i) = \{p_{g_{i1}}, \dots, p_{g_{in_i}}, p_{g_{i1}}\}$$

Вектор нормали к плоскости полигона  $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_1\}$

$$norm(P) = (p_2 - p_1) \times (p_3 - p_2)$$



# **Тест ориентации ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТИ**

# Тест ориентации точки относительно плоскости

Тест ориентации точки  $p$  относительно плоскости заключается в проверке знака числа  $f(p)$ , для вычисления которого в зависимости от способа задания плоскости используется соответствующая неявная функция  $nf$  \*.

Рассмотрим тесты, основанные на свойстве сепарабельности плоскости  $f(p) = C$  разделять пространство на два подпространства с противоположными знакам.

# Тест ориентации точки относительно плоскости (НФ)

Пусть даны точка  $p = (p_x, p_y, p_z)$  и плоскость

$$F(p) = Ax + By + Cz + D = 0$$

Тогда

$$nfF(p) = Ap_x + Bp_y + Cp_z + D$$

# Тест ориентации точки относительно плоскости (ПФ)

Пусть даны точка  $p = (p_x, p_y, p_z)$  и плоскость  $\{p_0, N\}$

$$F(p) = N \cdot (p - p_0) = 0$$

Тогда

$$nfN(p_0, N, p) = N \cdot (p - p_0)$$

# Тест ориентации точки относительно плоскости, проходящей через 3 точки

Пусть даны точка  $p = (p_x, p_y, p_z)$  и плоскость,  
проходящая через 3 точки  $a = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $b =$   
 $(b_x, b_y, b_z)$  и  $c = (c_x, c_y, c_z)$

Тогда

$$nf3(a, b, c, p) = (p - a) \cdot ((b - a) \times (c - b)) = \begin{bmatrix} p - a \\ b - a \\ c - b \end{bmatrix}$$

# Тест ориентации точки относительно плоскости, содержащей грань

Пусть даны точка  $p = (p_x, p_y, p_z)$  и плоскость полигона  $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_1\}$



Тогда

$$nfG(P, p) = (p - p_1) \cdot norm(\{p_1 p_2 p_3\}) = \begin{bmatrix} p - p_1 \\ p_2 - p_1 \\ p_3 - p_1 \end{bmatrix}$$

# Положительное полупространство

Внешнее полупространство, в которое направлена нормаль плоскости, называют положительным согласно знаку всех определенных выше функций  $nf^* > 0$ .





# **Тест пересечения плоскости и полиэдра**

# Тест пересечения плоскости и полиэдра

Тест пересечения плоскости  $f(p) = 0$  с полиэдром  $H = \{P, G\}$ , имеющим список вершин  $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ , идентичен двумерному аналогу с точностью до имени функции:

$$\text{cross3}(f, P) = \{\exists 1 \leq j < i \leq n: f(p_i) \cdot f(p_j) < 0\}$$

Плоскость пересекает полиэдр, если существует хотя бы одна пара вершин  $(p_i p_j)$ , лежащих от нее по разные стороны.

# Тест пересечения плоскости и полиэдра

Свойство сепарабельности плоскости позволяет по разным знакам значений НФ  $f(p_i)$  и  $f(p_j)$  обнаружить вершины полиэдра  $p_i$  и  $p_j$  лежащие по разные стороны от пересекающей его плоскости. Если же не найдется ни одной пары разносторонних вершин, то пересечение отсутствует. Функция  $cross3(f, P)$  возвращает 1 как признак пересечения. В отсутствие оно тест возвращает -1, а при касании полиэдра с плоскостью вершиной, ребром или гранью — значение 0.



# Тест выпуклости полиэдра

# Тест выпуклости полиэдра

Тест выпуклости полиэдра  $H = \{P, G\}$ , имеющим список вершин  $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$  и граней  $G = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_m\}$ :

$$\begin{aligned} conv3(P, G) &= \{sgn(nfG(side(P, G, i), p_j)) \\ &= const, \forall i = 1..m, j = 1..n, j \neq G_i\} \end{aligned}$$

**У выпуклого полиэдра нет ни одной пары вершин, лежащих по разные стороны от любой грани**


# Тест выпуклости полиэдра

В невыпуклом полигоне всегда найдутся грань  $G$ , и пара вершин  $\{p_j, p_k\}$ , находящиеся по разные стороны от плоскости этой грани.

Свойство сепарабельности плоскости позволяет обнаружить у полиэдра невыпуклую грань  $\Pi = \text{side}(P, G, i)$  по противоположным знакам чисел  $nfG(\Pi_i, p_j)$  и  $nfG(\Pi_i, p_k)$  в вершинах  $p_j \notin \Pi_i$  и  $p_k \notin \Pi_i$  не входящих в состав грани  $\Pi_i$ .

# Тест выпуклости полиэдра

Алгоритмы реализации теста выпуклости полиэдра аналогичны тесту выпуклости полигона на плоскости. Все 3 алгоритма подходят для их реализации. Наилучшим из них является третий алгоритм, который использует 2 флажка сигнализирующих о наличии вершин слева (флажок  $l$ ) и справа (флажок  $r$ ) от плоскости  $i$ -й грани  $\Pi = side(P, G, i)$ .



# **Тесты ориентации ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛИЭДРА**



# Тесты ориентации точки относительно полиэдра

Тесты ориентации точки  $q$  относительно полиэдра  $H = \{P, G\}$ , имеющим список вершин  $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$  и граней  $G = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_m\}$ , имеют ту же логику что и тесты ориентации точки относительно полигона на плоскости.



# Выпуклый тест

# Выпуклый тест

## Выпуклый тест

$$\begin{aligned} & conv3\_test(q, P, G) \\ &= \begin{cases} -1, & \text{если } f_i < 0, \forall i = 1..m \\ 1, & \text{если } \exists i \in [1, m]: f_i > 0 \\ 0, & \text{если не } \pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$f_i = nfG(side(P, G, i), q)$$

# Выпуклый тест

Все внутренние точки  $q_{\text{вну}}$  лежат с одинаковых сторон от всех граней  $\Pi_i$ . Для любой внешней точки  $q_{\text{вне}}$  всегда найдется пара граней  $\Pi_i$  и  $\Pi_j$ , относительно которых она расположена с разных сторон. Наконец, все точки, не идентифицированные как внутренние или внешние, считаются граничными точками  $q_{\text{гр}}$ , расположенными на гранях, ребрах или вершинах выпуклого полиэдра.



# Габаритный тест

# Габаритный тест

Габаритный тест

$$gab3\_test(q, P)$$

$$= \{x \notin [x_{min}, x_{max}]\} \cup \{y \notin [y_{min}, y_{max}]\} \cup \{z \notin [z_{min}, z_{max}]\}$$

определяет по возвращаемому значению  $gab3\_test = 1$  гарантированную непринадлежность точки  $q$  произвольному полиэдру  $H = \{P, G\}$  путем сравнения ее координат с габаритными параметрами полиэдра.



# Лучевой тест

# Лучевой тест

Лучевой тест аналогичен плоскому варианту со следующими изменениями:

1. Генерируется вектор  $V \in R^3$  со случайными углами места  $\varphi = \text{rnd}(2\pi)$  и азимута  $\psi = \text{rnd}(\pi)$

$$V = [\sin\varphi\sin\psi \quad \cos\psi \quad \cos\varphi\sin\psi]$$

2. Рассчитываются параметры  $[t_i \quad \tau_i \quad \Theta_i]$  и точка  $c_i = q + Vt_i$  пересечения луча  $p(t) = q + Vt$  с плоскостью  $i$ -ой грани  $\Pi_i = \text{side}(P, G, i)$ .

3. Блок проверки условий  $0 \leq \tau_i \leq 1$  заменяется тестом ориентации точки  $c_i$ , относительно полигона  $i$ -й грани. Для  $\Pi_i$  в виде параллелограмма это  $\{0 \leq \tau_i \leq 1\} \cap \{0 \leq \Theta_i \leq 1\}$ , для треугольника —  $\{0 \leq \Theta_i \leq \tau_i \leq 1\}$ .



# Лучевой тест

В общем случае для проверки принадлежности точки произвольному плоскому полигону применяются тесты ориентации на плоскости.

Обозначим результат такого теста  $r_i \in \{-1, 0, 1\}$ . Решение о принадлежности точки полиэдру выносится на основе следующих правил:

1. Точка не принадлежит полиэдру, если число пар  $\{t_i > 0, r_i = -1\}$  равно нулю или четно.
2. Точка лежит внутри полиэдра, если число этих пар нечетно.
3. Точка принадлежит границе полиэдра, если имеется хотя бы одна пара  $\{t_i = 0, r_i \leq 0\}$ .