

*Тема: Геометрический смысл
производной. Уравнение
касательной.*

Рисунок сделать, по нему запишем определения.

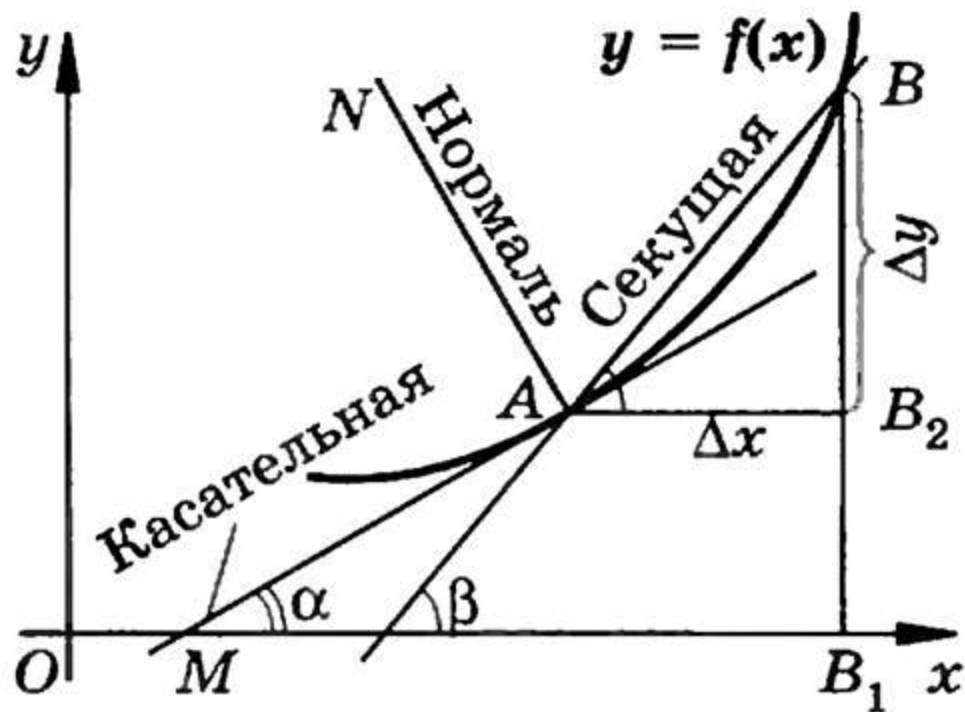


Рис. 113

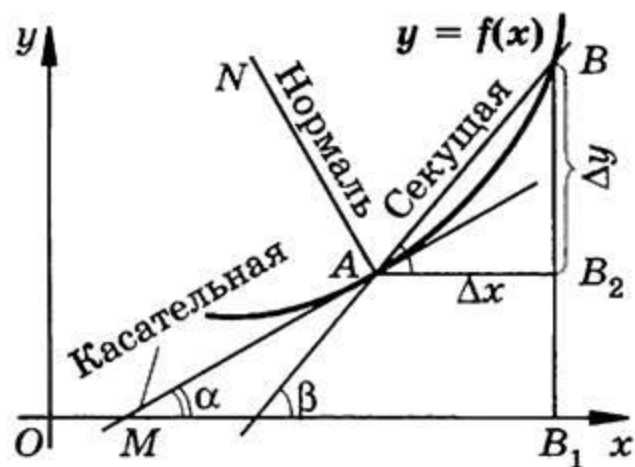


Рис. 113

3. Геометрический смысл производной. *Касательной* к данной кривой в данной ее точке A называется предельное положение секущей AB , когда точка B , перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к точке A .

Прямая, проходящая через точку A перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к кривой в точке A .

Это можно не писать, но внимательно изучить.

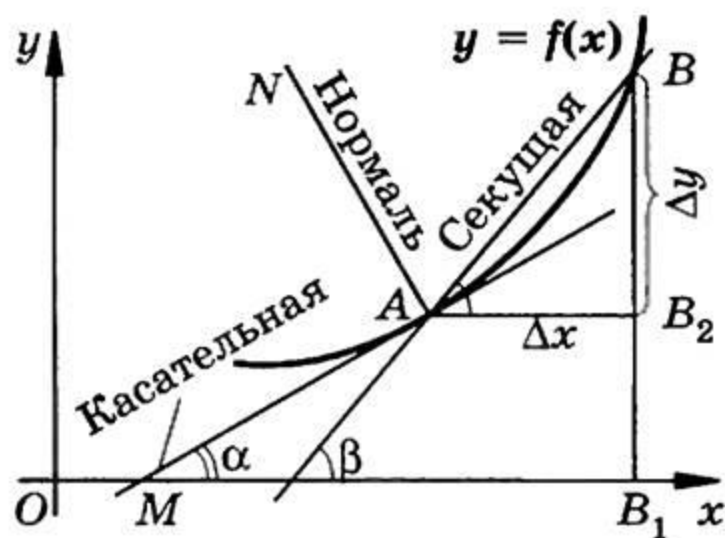


Рис. 113

Рассмотрим непрерывную кривую $y = f(x)$ (рис. 113).

Отметим на этой кривой фиксированную точку $A(x; y)$, а также перемещающуюся по кривой точку $B(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Тогда расстояние от точки B до оси абсцисс $BB_1 = y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Проведем прямую AB , пересекающую кривую $f(x)$ в точках A и B , и прямую AB_2 , параллельную оси Ox .

Обозначим в прямоугольном треугольнике ΔABB_2 угол $\angle BAB_2 = \beta$, тогда $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. с геометрической точки зрения $\operatorname{tg} \beta$ равен тангенсу угла наклона секущей AB к оси Ox .

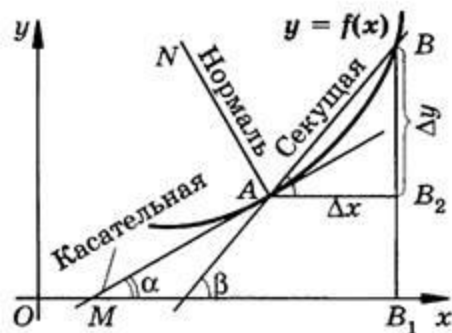


Рис. 113

При $\Delta x \rightarrow 0$ точка B , перемещаясь по кривой $f(x)$, неограниченно приближается к точке A , секущая AB , поворачиваясь около точки A , стремится занять предельное положение касательной в точке A к кривой $f(x)$. При этом $\beta \rightarrow \alpha$, где α — угол, образуемый касательной AM с положительным направлением оси Ox , т. е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta = \alpha, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

Из равенства $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ следует, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = y'_x,$$

но $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$, поэтому $y'_x = \operatorname{tg} \alpha$ или $y'_x = k$, где k — угловой коэффициент касательной AM к графику функции $y = f(x)$ в точке A , равный тангенсу угла наклона касательной к оси Ox , т. е.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k. \quad (5.3)$$

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции $f(x)$ в точке x равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $(x; f(x))$.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k.$$

2. Уравнение касательной. Выведем теперь уравнение касательной к графику функции f в точке $A(x_0; f(x_0))$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $f'(x_0)$ имеет вид:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b.$$

Для вычисления b воспользуемся тем, что касательная проходит через точку A :

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b, \text{ откуда } b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0,$$

значит, уравнение касательной таково:

$$y = f'(x_0) x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0),$$

или

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).} \quad (1)$$

○ **Пример 1.** Найдем уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ в точке с абсциссой 2.

В этом примере $x_0 = 2$, $f(x_0) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 1$, $f'(x) = 3x^2 - 4x$, $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$. Подставляя эти числа в уравнение (1), получаем уравнение $y = 1 + 4(x - 2)$, т. е. $y = 4x - 7$.

Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через данную точку M графика функции f (253—254).

253. а) $f(x) = x^2$, $M(-3; 9)$;

в) $f(x) = x^3$, $M(-1; -1)$;

254. а) $f(x) = 2 \cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$

в) $f(x) = 1 + \sin x$, $M(\pi; 1)$;

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$

Здесь надо найти значение производной в данной точке, подставляем только x .

Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

$$814. \text{ а) } f(x) = x^3 - 2x^2 + 3, \quad a = -1;$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x-1}{x+3}, \quad a = 1;$$

$$f'(x) = k.$$

Здесь надо найти значение производной в данной точке.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x=a$, если:

$$f(x) = \cos \frac{x}{3}, \quad a = 0;$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Найдем значение функции в данной точке:

$$1) f(x_0) = f(0) = \cos \frac{0}{3} = \cos 0 = 1$$

Найдем производную функции:

$$2) f'(x) = -\sin \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \cdot \sin \frac{x}{3}$$

Найдем значение производной функции
в данной точке:

$$3) f'(x_0) = f'(0) = -\frac{1}{3} \cdot \sin \frac{0}{3} = -\frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

Подставим найденные значения в формулу уравнения касательной:

$$4) y = 1 + 0 \cdot (x - 0) = 1$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Получим уравнение касательной:

$$y = 1$$

Также пошагово выполняйте такие задания!

Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0 (255—256).

255. а) $f(x) = \frac{3}{x}$, $x_0 = -1$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = 2x - x^2$, $x_0 = 0$, $x_0 = 2$;

в) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$;

г) $f(x) = x^3 - 1$, $x_0 = -1$, $x_0 = 2$.