# Тема: Геометрический смысл производной. Уравнение касательной.

Рисунок сделать, по нему запишем определения.

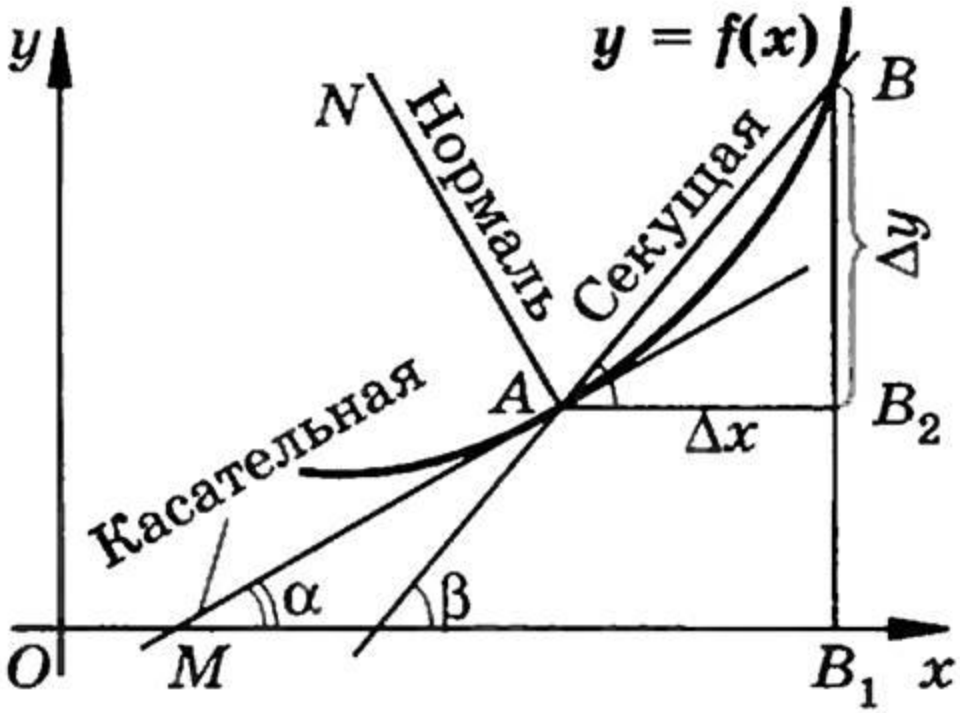


Рис. 113

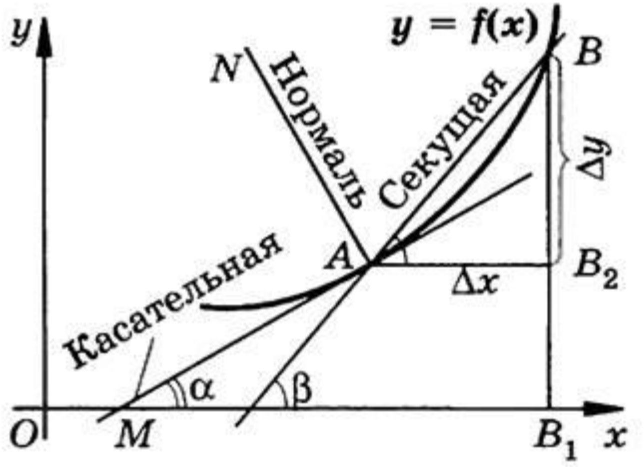


Рис. 113

**3. Геометрический смысл производной.** ***Касательной*** к данной кривой в данной ее точке $A$ называется предельное положение секущей $AB$, когда точка $B$, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к точке $A$.

Прямая, проходящая через точку $A$ перпендикулярно касательной, называется ***нормалью*** к кривой в точке $A$.

Это можно не писать, но внимательно изучить.

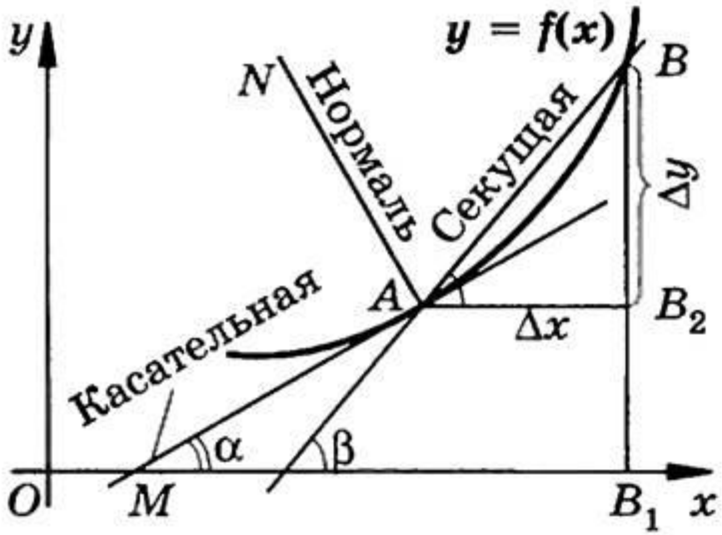


Рис. 113

Рассмотрим непрерывную кривую $y = f(x)$ (рис. 113).

Отметим на этой кривой фиксированную точку $A(x;\ y)$, а также перемещающуюся по кривой точку $B(x + \Delta x;\ y + \Delta y)$. Тогда расстояние от точки $B$ до оси абсцисс $BB_1 = y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Проведем прямую $AB$, пересекающую кривую $f(x)$ в точках $A$ и $B$, и прямую $AB_2$, параллельную оси $Ox$.

Обозначим в прямоугольном треугольнике $\Delta\ ABB_2$ угол $\angle BAB_2 = \beta$, тогда $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. с геометрической точки зрения $\operatorname{tg}\beta$ равен тангенсу угла наклона секущей $AB$ к оси $Ox$.

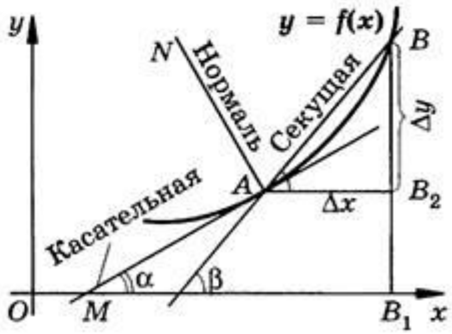

Рис. 113

При $\Delta x \to 0$ точка $B$, перемещаясь по кривой $f(x)$, неограниченно приближается к точке $A$, секущая $AB$, поворачиваясь около точки $A$, стремится занять предельное положение касательной в точке $A$ к кривой $f(x)$. При этом $\beta \to \alpha$, где $\alpha$ — угол, образуемый касательной $AM$ с положительным направлением оси $Ox$, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \beta = \alpha, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

Из равенства $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = y'_x,$$

но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$, поэтому $y'_x = \operatorname{tg} \alpha$ или $y'_x = k$, где $k$ — угловой коэффициент касательной $AM$ к графику функции $y = f(x)$ в точке $A$, равный тангенсу угла наклона касательной к оси $Ox$, т. е.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k. \tag{5.3}$$

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции $f(x)$ в точке $x$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $(x; f(x))$.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k.$$

**2. Уравнение касательной.** Выведем теперь уравнение касательной к графику функции $f$ в точке $A(x_0; f(x_0))$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $f'(x_0)$ имеет вид:

$$y=f'(x_0)\cdot x+b.$$

Для вычисления $b$ воспользуемся тем, что касательная проходит через точку $A$:

$$f(x_0)=f'(x_0)\cdot x_0+b, \text{ откуда } b=f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0,$$

значит, уравнение касательной таково:

$$y=f'(x_0)\,x-f'(x_0)\cdot x_0+f(x_0),$$

или

$$\boxed{\boldsymbol{y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).}} \qquad (1)$$

○ Пример 1. Найдем уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-2x^2+1$ в точке с абсциссой 2.

В этом примере $x_0=2$, $f(x_0)=f(2)=2^3-2\cdot2^2+1=1$, $f'(x)=$ $=3x^2-4x$, $f'(x_0)=f'(2)=3\cdot2^2-4\cdot2=4$. Подставляя эти числа в уравнение (1), получаем уравнение $y=1+4(x-2)$, т. е. $y=$ $=4x-7$.

Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через данную точку $M$ графика функции $f$ (253—254).

**253.** а) $f(x)=x^2$, $M(-3;\ 9)$;

в) $f(x)=x^3$, $M(-1;\ -1)$;

**254.** а) $f(x)=2\cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$

в) $f(x)=1+\sin x$, $M(\pi;\ 1)$;

$$\boxed{f'(x)=\operatorname{tg}\alpha}$$

Здесь надо найти <u>значение производной в данной точке</u>, подставляем только x .

**Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:**

**814.** а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3, \quad a = -1;$

б) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}, \quad a = 1;$

$$f'(x) = k.$$

Здесь надо найти <u>значение производной в данной точке</u>.

**Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x=a$, если:**

$$f(x) = \cos\frac{x}{3}, \quad a = 0;$$

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$$

Найдем значение функции в данной точке:

$$1)\, f(x_0) = f(0) = \cos\frac{0}{3} = \cos 0 = 1$$

Найдем производную функции:

$$2)\, f'(x) = -\sin\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\cdot\sin\frac{x}{3}$$

Найдем значение производной функции в данной точке:

$$3)\, f'(x_0) = f'(0) = -\frac{1}{3}\cdot\sin\frac{0}{3} = -\frac{1}{3}\cdot 0 = 0$$

Подставим найденные значений в формулу уравнения касательной:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$$

$$4)\, y = 1 + 0 \cdot (x - 0) = 1$$

Получим уравнение касательной:

$$y = 1$$

Также пошагово выполняйте такие задания!

Напишите уравнение касательной к графику функции $f$ в точке с абсциссой $x_0$ (255—256).

**255.** а) $f(x)=\frac{3}{x}$, $x_0=-1$, $x_0=1$;

б) $f(x)=2x-x^2$, $x_0=0$, $x_0=2$;

в) $f(x)=x^2+1$, $x_0=0$, $x_0=1$;

г) $f(x)=x^3-1$, $x_0=-1$, $x_0=2$.