Тема: Геометрический смысл производной. Уравнение касательной.

Рисунок сделать, по нему запишем определения.

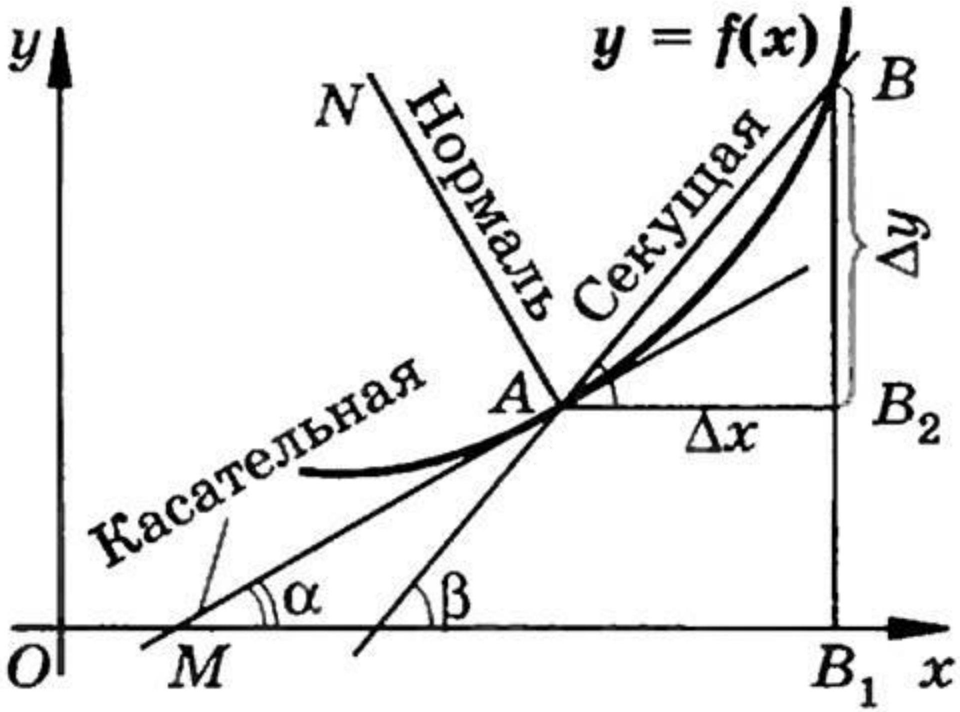

Рис. 113

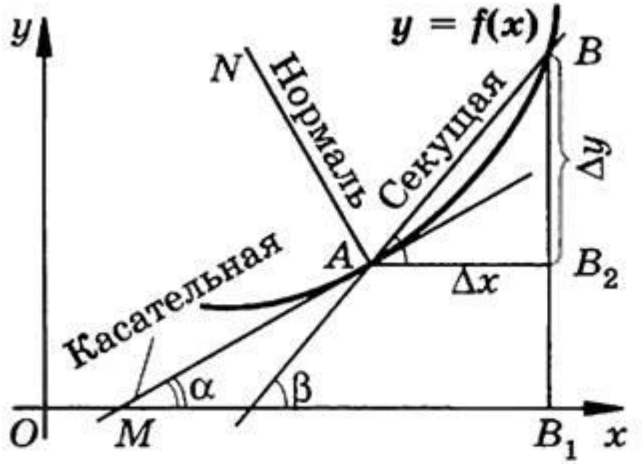

Рис. 113

3. Геометрический смысл производной. ***Касательной*** к данной кривой в данной ее точке A называется предельное положение секущей AB, когда точка B, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к точке A.

Прямая, проходящая через точку A перпендикулярно касательной, называется ***нормалью*** к кривой в точке A.

Это можно не писать, но внимательно изучить.

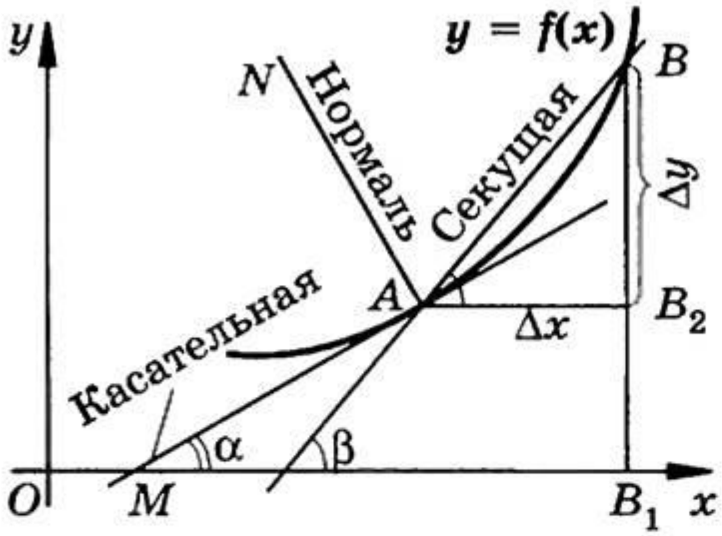

Рис. 113

Рассмотрим непрерывную кривую $y = f(x)$ (рис. 113).

Отметим на этой кривой фиксированную точку $A(x;\ y)$, а также перемещающуюся по кривой точку $B(x + \Delta x;\ y + \Delta y)$. Тогда расстояние от точки B до оси абсцисс $BB_1 = y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Проведем прямую AB, пересекающую кривую $f(x)$ в точках A и B, и прямую AB_2, параллельную оси Ox.

Обозначим в прямоугольном треугольнике $\Delta\ ABB_2$ угол $\angle BAB_2 = \beta$, тогда $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. с геометрической точки зрения $\operatorname{tg} \beta$ равен тангенсу угла наклона секущей AB к оси Ox.

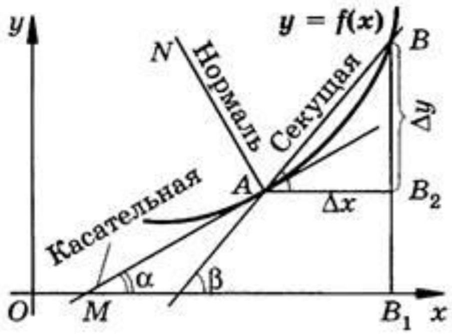

Рис. 113

При $\Delta x \to 0$ точка B, перемещаясь по кривой $f(x)$, неограниченно приближается к точке A, секущая AB, поворачиваясь около точки A, стремится занять предельное положение касательной в точке A к кривой $f(x)$. При этом $\beta \to \alpha$, где α — угол, образуемый касательной AM с положительным направлением оси Ox, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \beta = \alpha, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

Из равенства $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = y'_x,$$

но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$, поэтому $y'_x = \operatorname{tg} \alpha$ или $y'_x = k$, где k — угловой коэффициент касательной AM к графику функции $y = f(x)$ в точке A, равный тангенсу угла наклона касательной к оси Ox, т. е.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k. \tag{5.3}$$

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции $f(x)$ в точке x равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $(x; f(x))$.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k.$$

2. Уравнение касательной. Выведем теперь уравнение касательной к графику функции f в точке $A(x_0; f(x_0))$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $f'(x_0)$ имеет вид:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b.$$

Для вычисления b воспользуемся тем, что касательная проходит через точку A:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b, \text{ откуда } b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0,$$

значит, уравнение касательной таково:

$$y = f'(x_0)\, x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0),$$

или

$$\boxed{\boldsymbol{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}} \qquad (1)$$

○ Пример 1. Найдем уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ в точке с абсциссой 2.

В этом примере $x_0 = 2$, $f(x_0) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 1$, $f'(x) = 3x^2 - 4x$, $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$. Подставляя эти числа в уравнение (1), получаем уравнение $y = 1 + 4(x - 2)$, т. е. $y = 4x - 7$.

Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через данную точку M графика функции f (253—254).

253. а) $f(x)=x^2$, $M(-3;\ 9)$;

в) $f(x)=x^3$, $M(-1;\ -1)$;

254. а) $f(x)=2\cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$

в) $f(x)=1+\sin x$, $M(\pi;\ 1)$;

$$\boxed{f'(x) = \operatorname{tg}\alpha}$$

Здесь надо найти значение производной в данной точке, подставляем только x .

Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

814. а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3, \quad a = -1;$

б) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}, \quad a = 1;$

$$f'(x) = k.$$

Здесь надо найти значение производной в данной точке.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x=a$, если:

$$f(x) = \cos\frac{x}{3}, \quad a = 0;$$

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$$

Найдем значение функции в данной точке:

$$1)\, f(x_0) = f(0) = \cos\frac{0}{3} = \cos 0 = 1$$

Найдем производную функции:

$$2)\, f'(x) = -\sin\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\cdot\sin\frac{x}{3}$$

Найдем значение производной функции в данной точке:

$$3)\, f'(x_0) = f'(0) = -\frac{1}{3}\cdot\sin\frac{0}{3} = -\frac{1}{3}\cdot 0 = 0$$

Подставим найденные значений в формулу уравнения касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

$$4)\, y = 1 + 0 \cdot (x - 0) = 1$$

Получим уравнение касательной:

$$y = 1$$

Также пошагово выполняйте такие задания!

Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0 (255—256).

255. а) $f(x)=\frac{3}{x}$, $x_0=-1$, $x_0=1$;

б) $f(x)=2x-x^2$, $x_0=0$, $x_0=2$;

в) $f(x)=x^2+1$, $x_0=0$, $x_0=1$;

г) $f(x)=x^3-1$, $x_0=-1$, $x_0=2$.