

# Алгебра логики

# Элементарные функции алгебры логики

## Обозначения

$$E_2 = \{0, 1\};$$

$E_2^n = E_2 \times E_2 \times \dots \times E_2$  - прямое произведение  $n$  сомножителей;

$(x_1, \dots, x_n) \in E_2, |E_2|$  - мощность  $E_2$

## Определение

Функцией алгебры логики называется закон, осуществляющий отображение  $E_2^n \rightarrow E_2$ , причем отображение всюду определено и функционально.

При  $n=2$  задано отображение  $E_2^2 \rightarrow E_2$ , где  $E_2^2 = \{(0\ 0), (0\ 1), (1\ 0), (1\ 1)\}$ .

Таким образом, задана функция  $f(x_1, x_2)$ , которая может быть представлена в виде таблицы, называемой таблицей истинности:

$x_1$	$x_2$	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$x_1$  и  $x_2$  обозначают названия столбцов,  $f$  – символ, обозначающий отображение.

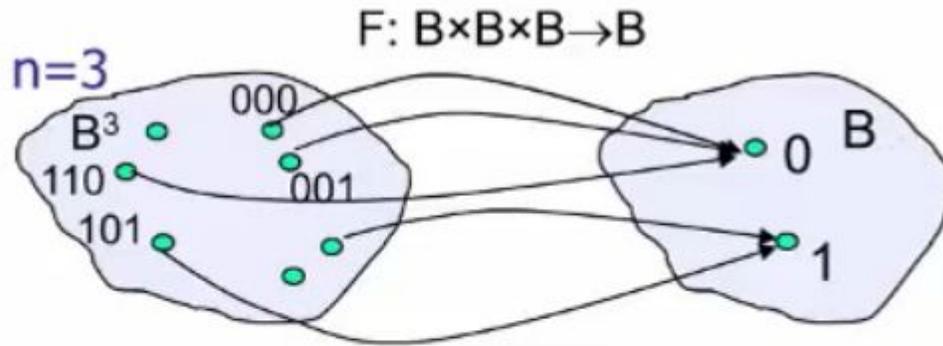
**Примечание.** Функции  $f(x_1, x_2)$  и  $f(y_1, y_2)$  задают одно и то же отображение, и их таблицы отличаются только названиями столбцов

# Пример

$$F : B^n \rightarrow B$$

$$B = \{0, 1\}$$

Пусть  $n=3$



$$F(0,0,0)=0;$$

$$F(1,1,0)=0;$$

$$F(1,0,1)=1;$$

...

# Пример

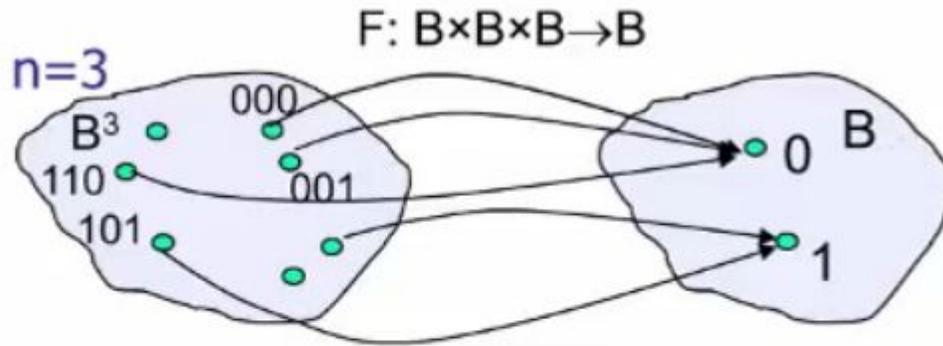
$$F : B^n \rightarrow B$$

$$B = \{0, 1\}$$

ТИ::

$x_1x_2x_3$	$f$
000	0
001	0
010	1
011	0
100	1
101	1
110	1
111	0

Пусть  $n=3$



$$F(0,0,0)=0;$$

$$F(1,1,0)=0;$$

$$F(1,0,1)=1;$$

...

# Классификация булевых функций

- Нульарные
- Унарные
- бинарные
- n-арные

# Нульарные двоичные функции

- Функция от 0 аргументов ( $n = 0$ )
- $f: \{\} \rightarrow E_2, E_2 = \{0, 1\}$
- $f() = 0, f() = 1$  (const 0 и 1)

# Унарные функции

- Функция от 1 аргумента ( $n = 1$ )
- Всего 4 функции
- $f_1(x) = 0$ ;
- $f_2(x) = x$ ; ТОЖДЕСТВЕННАЯ функция
- $f_3(x) = \neg x$ ; ОТРИЦАНИЕ, НЕ
- $f_4(x) = 1$ ;

# Классификация функций одной переменной

Число функций от  $n$ -переменных  $P_2(n)$  определяется как  $2^{2^n}$ .

Логических функций одной переменной  $2^{2^1} = 4$ , представим их в виде таблицы:

0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции  $f_0$  и  $f_3$  – константы 0 и 1 соответственно, их значения не зависят от значения переменной, и следовательно, переменная  $x$  для них несущественна.

Функция  $f_1$  «повторяет»  $x$ :  $f_1(x) = x$ .

Функция  $f_2(x)$  является отрицанием  $x$ . Ее значение противоположно значению  $x$ .



# Классификация функций двух переменных

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция  $f_0(x, y)$  – *константа* 0, т. е. функция с двумя несущественными переменными.

Функция  $f_1(x, y)$  – *конъюнкция*  $x$  и  $y$ , обозначается  $x \wedge y$ . Она равна 1, если только  $x$  и  $y$  равны 1, поэтому ее часто называют функцией «И, AND». Еще одно название – «логическое умножение».

Функция  $f_2(x, y) = x \wedge \neg y$  – *левая компликация*.

Функция  $f_3(x, y) = x \neg y \vee xy = x$  ( $y$  – несущественная переменная).

# Классификация функций двух переменных

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция  $f_4(x, y) = \neg x \wedge y$  – *правая компликация*.

Функция  $f_5(x, y) = \neg xy \vee xy = y$  ( $x$  – несущественная переменная).

Функция  $f_6(x, y)$  – *сложение по модулю 2*; ее обозначения:  $x \oplus y, x \Delta y$  ..

Функция  $f_7(x, y)$  – *дизъюнкция*  $x$  и  $y$ ; ее обозначения:  $x \vee y, x + y$ . Она равна 1, если  $x$  или  $y$  равны 1 («или» здесь понимается в неразделительном смысле – хотя бы один из двух), поэтому ее часто называют функцией «ИЛИ».

# Классификация функций двух переменных

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция  $f_8(x, y) = \neg x \neg y$  – *стрелка Пирса*; ее обозначение  $x \downarrow y$ .

Функция  $f_9(x, y)$  – *эквивалентность*; ее обозначения:  $x \sim y, x \equiv y$ . Она равна 1, когда значения ее аргументов равны, и равна 0, когда они различны:  $f_9(x, y) = \neg x \neg y \vee xy = x \equiv y$ .

Функция  $f_{10}(x, y) = \neg x \neg y \vee x \neg y = \neg y$  ( $x$  – несущественная переменная).

Функция  $f_{11}(x, y) = x \vee \neg y$  – *правая импликация*.

# Классификация функций двух переменных

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция  $f_{12}(x, y) = \neg x \neg y \vee \neg xy = \neg x$  ( $y$  – несущественная переменная).

Функция  $f_{13}(x, y) = \neg x \vee y$  – *импликация (левая импликация)*; ее обозначение  $x \rightarrow y, x \supset y$ ; читается: «если  $x$ , то  $y$ ».  
( $x$  – несущественная переменная).

Функция  $f_{14}(x, y) = \neg x \vee \neg y$  – *штрих Шеффера*, обозначение:  $x | y$ .

Функция  $f_{15}(x, y)$  – *константа 1*, т.е. функция с двумя несущественными переменными.

# Стрелка Пирса и Штрих Шеффера

NAND	 <p>A logic diagram of a NAND gate. It has two input lines labeled <math>P</math> and <math>Q</math> on the left. The gate is a semi-circle with a small circle at its tip. The output line is labeled <math>R</math> on the right.</p>	<table border="1"><thead><tr><th colspan="2">Input</th><th>Output</th></tr><tr><th><math>P</math></th><th><math>Q</math></th><th><math>R = P   Q</math></th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></tbody></table>	Input		Output	$P$	$Q$	$R = P   Q$	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
Input		Output																		
$P$	$Q$	$R = P   Q$																		
1	1	0																		
1	0	1																		
0	1	1																		
0	0	1																		
NOR	 <p>A logic diagram of a NOR gate. It has two input lines labeled <math>P</math> and <math>Q</math> on the left. The gate is a semi-circle with a small circle at its tip. The output line is labeled <math>R</math> on the right.</p>	<table border="1"><thead><tr><th colspan="2">Input</th><th>Output</th></tr><tr><th><math>P</math></th><th><math>Q</math></th><th><math>R = P \downarrow Q</math></th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></tbody></table>	Input		Output	$P$	$Q$	$R = P \downarrow Q$	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
Input		Output																		
$P$	$Q$	$R = P \downarrow Q$																		
1	1	0																		
1	0	0																		
0	1	0																		
0	0	1																		

# Существенные и несущественные переменные

По определению переменная  $x_i$  называется *существенной*, если  $f(x_1, \dots, 0, \dots, x_n) \neq f(x_1, \dots, 1, \dots, x_n)$  хотя бы для одного набора значений  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ , где  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  – булева функция.

Переменная  $x_i$  в функции  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  называется *несущественной* (или *фиктивной*), если  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$  при любых значениях остальных переменных, т. е. если изменение значения  $x_i$  в любом наборе значений  $x_1, \dots, x_n$  не меняет значения функции.

В этом случае функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  по существу зависит от  $n - 1$  переменной, т. е. представляет собой функцию  $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  от  $n - 1$  переменной. Говорят, что функция  $g$  получена из функции  $f$  удалением фиктивной переменной, а функция  $f$  получена из  $g$  введением фиктивной переменной, причем эти функции по определению считаются равными.

Например,  $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$  означает, что при любых значениях  $x_1$  и  $x_2$   $f = g$  независимо от значения  $x_3$ .

# Примеры

● Необходимо доказать, что в функции  $f(x_1 \vee \neg x_2)(x_3 \vee \neg x_3)$  переменная  $x_3$  является несущественной.

# Примеры

● Необходимо доказать, что в функции  $f(x_1 \vee \neg x_2)(x_3 \vee \neg x_3)$  переменная  $x_3$  является несущественной.

При  $x_3 = 0$ :  $f(x_1, x_2, 0) \equiv (x_1 \vee \neg x_2)(0 \vee \neg 0) \equiv x_1 \vee \neg x_2(0 \vee \neg 0 = 1)$ .

При  $x_3 = 1$ :  $f(x_1, x_2, 1) \equiv (x_1 \vee \neg x_2)(1 \vee \neg 1) \equiv x_1 \vee \neg x_2(1 \vee \neg 1 = 1)$ .

Так как  $f(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2, 1)$ , отсюда следует, что  $x_3$  – несущественная переменная. То есть изменение значения  $x_3$  в любом наборе значений  $x_1, x_2$  не меняет значения функции  $f(x_1 \vee \neg x_2)(x_3 \vee \neg x_3)$ .

# Примеры

Необходимо выяснить, какие переменные функции  $f(x, y, z) = 01011010$  являются существенными, а какие несущественными и выразить  $f(x, y, z)$  формулой, содержащей только существенные переменные.

x	y	z	f(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

# Примеры

Необходимо выяснить, какие переменные функции  $f(x, y, z) = 01011010$  являются существенными, а какие несущественными и выразить  $f(x, y, z)$  формулой, содержащей только существенные переменные.

Представим  $f(x, y, z) = 01011010$  в виде таблицы

Переменная  $x$  существенная, так как, например, наборы  $(0, 0, 0)$  и  $(1, 0, 0)$  являются соседними по этой переменной и  $f(0, 0, 0) \neq f(1, 0, 0)$ .

Переменная  $y$  является несущественной, так как на всех наборах соседних по данной переменной значения функции равны, т. е. выполняются следующие равенства:  $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 0)$ ,  $f(1, 0, 0) = f(1, 1, 0)$ ,  $f(0, 0, 1) = f(0, 1, 1)$  и  $f(1, 0, 1) = f(1, 1, 1)$ .

Переменная  $z$  является существенной, так как, например, наборы  $(0, 0, 0)$  и  $(0, 0, 1)$  – соседние по этой переменной и  $f(0, 0, 0) \neq f(0, 0, 1)$ .

Выпишем таблицу истинности функции  $f(x, y, z)$  от существенных переменных

Данная функция представляет собой  $f(x, y, z) = x \oplus y$

x	y	z	f(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

x	z	f(x, y, z)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

# Представление логической функции. Таблица истинности.

*Таблица истинности.* В таблице указываются значения функции в зависимости от значений истинности аргументов. Если функция зависит от  $n$  аргументов, то число всех наборов аргументов равно  $2^n$ .



Для построения таблицы истинности выполняется последовательность следующих шагов:

1) определение количества переменных  $n$  в формуле;

2) определение числа строк в таблице  $m = 2^n$ ;

3) подсчет количества логических операций в формуле;

4) установление последовательности выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов;

5) определение количества столбцов в таблице: число переменных и число операций;

6) определение наборов входных переменных с учетом того, что они

# Пример

Необходимо составить таблицу истинности

$$f(x, y) = (x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x).$$

# Пример

Необходимо составить таблицу истинности

$$f(x, y) = (x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x).$$

$x$	$y$	$(x \rightarrow y)$	$y \rightarrow x$	$f(x, y) = (x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

# Пример

Необходимо составить таблицу истинности

$$f(P, Q, R) = \neg (P \rightarrow \neg(Q \wedge P)) \rightarrow (P \vee R).$$

# Пример

Необходимо составить таблицу истинности

$$f(P, Q, R) = \neg (P \rightarrow \neg(Q \wedge P)) \rightarrow (P \vee R).$$

$P$	$Q$	$R$	$(Q \wedge P)$	$\overline{(Q \wedge P)}$	$P \rightarrow \overline{(Q \wedge P)}$	$\overline{P \rightarrow \overline{(Q \wedge P)}}$	$(P \vee R)$	$f(P, Q, R)$
0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0	1	1

# Сложности на практике

Допустим, функция имеет 50 аргументов, тогда таблица истинности будет содержать  $2^{50}$  строк

Можно привести функцию к особой форме СДНФ (совершенная дизъюнктивная нормальная форма) и подставить значения переменных в конъюнкты

НО

$2^{50}$  конъюнктов, допустим вычислительные мощности позволяют вычислять  $2^{13}$  конъюнктов/с (8192 конъюнктов/сек), тогда потребуется:

$$\frac{2^{50}}{2^{13}} \approx 2^{37} \text{ сек} \approx 2^{12} \text{ лет} \approx 4000 \text{ лет}$$

# Решение

В 1986 г. Было предложено использовать новые формы представления логических функций

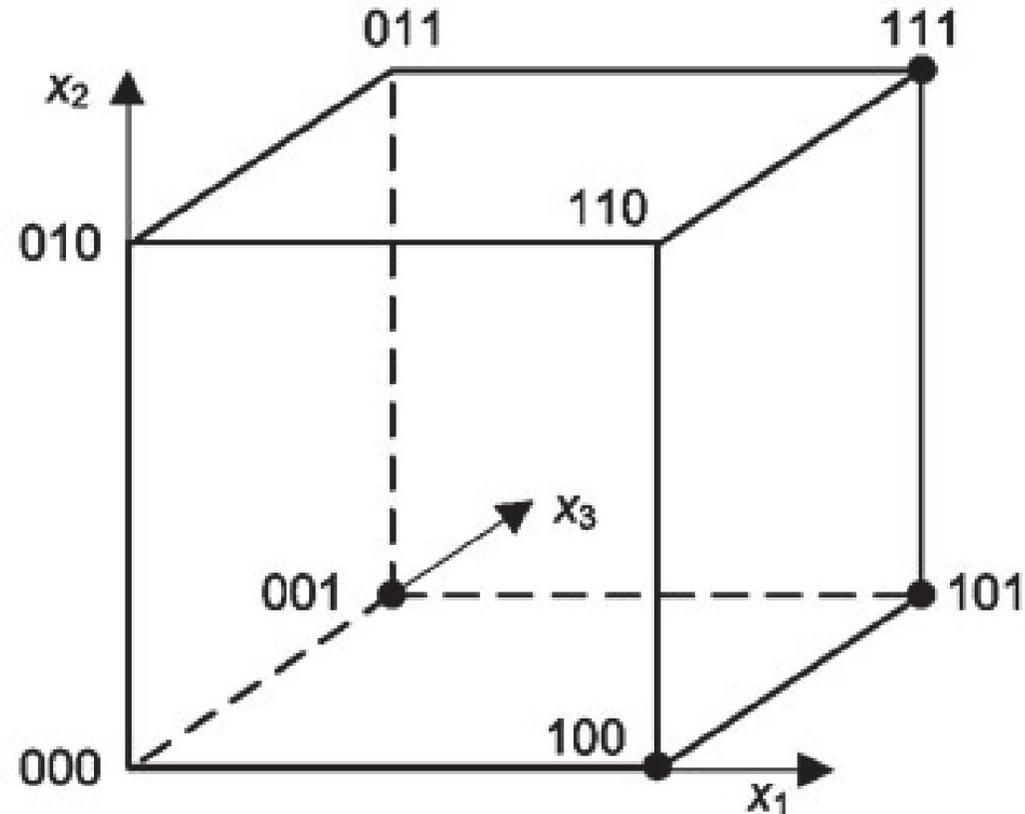
**Binary Decision Diagram (BDD)**

**Бинарные решающие диаграммы**

Которые позволяют эффективно представлять логические функции

# Представление логической функции. Геометрический способ.

Для функции  $n$  – независимых логических переменных – рассматривается единичный  $n$ -мерный куб. Вершины куба соответствуют наборам независимых переменных. Каждой вершине приписывают значение функции на соответствующем наборе. На рисунке единичные наборы помечают, например, кружками



# Логические значения высказываний

**Высказывание** – повествовательное предложение, о котором можно сказать в данный момент, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно. Логическим значением высказывания являются «истина» или «ложь».

## Примеры простых (элементарных) высказываний

«3 – это простое число» – *истина*; «3,14... – рациональное число» – *ложь*;

«Юго-восточный берег озера Виви является географическим центром России» – *истина*;

«Красноярск – столица России» – *ложь*; «Число 8 делится на 2 и на 4» – *истина*; «Сумма чисел 2 и 3 равна 8» – *ложь*.

При формальном исследовании сложных текстов понятие «простые высказывания» замещают понятием **«пропозициональные переменные»**, которое обозначают прописными буквами латинского алфавита «А», «В» и т. д.

«Истинность» или «ложность» предложения есть истинностное значение высказывания. Каждому высказыванию сопоставляется переменная, равная 1, если высказывание истинно, и равная 0, если высказывание ложно.

## Пример

1. Если  $A :=$  «3 – это простое число», то  $A = 1$ . (символ «:=» означает, что переменной, стоящей слева, необходимо присвоить значение высказывания, стоящего справа от символа)

2. Если  $B :=$  «Красноярск – столица России», то  $B = 0$ .

3. Если  $C :=$  «В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов», то  $D = 1$ .

Следующие утверждения не являются высказываниями.

1.  $a + b = 2$ .

2. Математика – интересный предмет

# Логические связи

Высказывания, которые получаются из простых предложений с помощью грамматических связок «не», «и», «или», «если..., то...», «... тогда и только тогда, когда...» и т. п., называют **сложными**, или **составными**.

Для обозначения грамматических связок вводят символы, которые называют **логическими (или пропозициональными) связками**.

Обычно рассматривают следующие логические связки:

**отрицание** (читается «НЕ», обозначается « $\neg$ »),

**конъюнкция** (читается «И», обозначается « $\wedge$ »),

**дизъюнкция** (читается «ИЛИ», обозначается « $\vee$ »),

**импликация** (читается «ЕСЛИ... ТО...», обозначается « $\rightarrow$ »),

**эквивалентность** (читается «... ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА...», обозначается « $\leftrightarrow$ »).

Правила построения сложных высказываний в виде последовательности пропозициональных переменных, логических связок и вспомогательных символов определяют возможность формального описания любого текста. При этом высказывания, из которых делают вывод новых высказываний, называют **посылками**, а получаемое высказывание – **заключением**.

Для построения сложных пропозициональных высказываний используют вспомогательные символы «(», «)» – скобки.

Множество пропозициональных переменных  $T = \{A, B, C, \dots\}$  с заданными над ними логическими операциями  $F = \{\neg; \wedge; \vee; \rightarrow; \leftrightarrow\}$  формируют **алгебру высказываний**, т. е.  $A_B = \langle T; F \rangle$ .

# Понятие формулы алгебры логики

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических связок отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности, называют **формулой алгебры логики**.

Символы  $x_1, \dots, x_n$  будем считать формулами глубины 0.

Формула  $F = f(F_1, \dots, F_n)$  имеет глубину  $k + 1$ , если  $f$  – функция, а  $F_1, \dots, F_n$  – формулы, максимальная из глубин которых равна  $k$ . При этом  $F_1, \dots, F_n$  называются **подформулами**  $F$ , а  $f$  – **внешней или главной операцией**  $F$ .

Рассмотрим более точное определение **формулы алгебры логики**.  $F = (\overline{F_2} \vee F_2) \vee F_3$

1. Любую пропозициональную переменную можно назвать формулой нулевого порядка, т. е.  $A_i = F_i$
2. Если  $F_1$  и  $F_2$  – пропозициональные формулы, то  $\neg F_1$ ;  $\neg F_2$ ;  $F_1 \wedge F_2$ ;  $F_1 \vee F_2$ ;  $F_1 \rightarrow F_2$ ;  $F_1 \leftrightarrow F_2$  – также пропозициональные формулы.
3. **Подформула формулы** – любая ее часть, которая сама является формулой. Для формирования сложных формул используют вспомогательные символы «(» и «)».

Приоритет выполнения логических связок (порядок логических связок по силе и значимости) следующий:  $\neg$ ;  $\wedge$ ;  $\vee$ ;  $\rightarrow$ ;  $\leftrightarrow$ . Учитывая приоритет логических связок, возможно опускать некоторые пары скобок.

Последовательность всех подформул формулы иногда называют **порождающей последовательностью** для данной **формулы**. Наличие такой последовательности у логического выражения служит критерием того, что выражение является формулой.

## Пример

Необходимо удалить лишние скобки в формуле  $F = (((F_1 \vee (\neg F_2)) \rightarrow F_3) \leftrightarrow F_4)$ .

# Пример

Необходимо удалить лишние скобки в формуле  $F = (((F_1 \vee (\neg F_2)) \rightarrow F_3) \leftrightarrow F_4)$ .

## Решение

1. Убрать внешние скобки для формулы, так как они не определяют приоритет операций:

$$F = ((F_1 \vee (\neg F_2)) \rightarrow F_3) \leftrightarrow F_4.$$

2. Убрать скобки, охватывающие формулу  $\rightarrow$ , так как операция  $\leftrightarrow$  будет выполняться после  $\rightarrow$ :

$$F = (F_1 \vee (\neg F_2)) \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_4.$$

3. Убрать скобки, охватывающие формулу  $\vee$ , так как операция  $\rightarrow$  будет выполняться после  $\vee$ :

$$F = F_1 \vee (\neg F_2) \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_4.$$

4. Убрать скобки, охватывающие формулу отрицания, так как операция  $\vee$  будет исполняться только после выполнения операции отрицания:

$$F = F_1 \vee \neg F_2 \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_4.$$

# Пример

Необходимо расставить скобки в формуле  $F = F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \vee \neg F_1 \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_1$ .

# Пример

Необходимо расставить скобки в формуле  $F = F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \vee \neg F_1 \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_1$ .

## Решение

1. Поставить скобки на формулу, реализующую операцию отрицания:

$$F = F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \vee (\neg F_1) \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_1.$$

2. Поставить скобки на формулу, реализующую операцию конъюнкции:

$$F = ((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \vee (\neg F_1) \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_1.$$

3. Поставить скобки на формулу, реализующую операцию дизъюнкции:

$$F = (((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \vee (\neg F_1)) \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_1.$$

4. Поставить скобки на формулу, реализующую операцию импликации:

$$F = (((((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \vee (\neg F_1)) \rightarrow F_3) \leftrightarrow F_1).$$

5. Поставить скобки на формулу, реализующую операцию эквивалентности:

$$F = ((((((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \vee (\neg F_1)) \rightarrow F_3) \leftrightarrow F_1).$$

# Повторим вкратце

## Алгебра высказываний (Propositional logic)

**Высказывание (Proposition)** – осмысленное предложение(sentence), о котором можно говорить, что оно **истинно (true)** или **ложно (false)**, но ни то, ни другое вместе

### Основные логические операции АВ:

- Конъюнкция (conjunction),
- дизъюнкция (disjunction),
- импликация (implication),
- отрицание/инверсия (negation/inversion)
- эквиваленция (equivalence)

# Повторим вкратце

Правильно построенная формула (ППФ) АВ (Well-formed formula)

Индуктивное определение

1. Атом/элементарная формула (высказывательная переменная, логическая константа) – формула АВ
2. Если G – формула АВ, то  $\neg G$  – формула АВ
3. Если G, H – формулы АВ, то  $(G \wedge H)$ ,  $(G \vee H)$ ,  $(G \rightarrow H)$ ,  $(G \leftrightarrow H)$  – формулы АВ
4. Никаких формул, кроме порожденных применением указанных выше правил, нет, т.е. всякое выражение является формулой алгебры высказываний, если оно получено с помощью пунктов 1–3

# Повторим вкратце

- Приоритет логических операций

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

## Логическое следствие

Теория логического следования в рамках алгебры логики изучает закономерности образования формул  $F_1, F_2, \dots, F_m, H$ , по которым первые  $m$  формул связаны с формулой  $H$  отношением логического следствия.

## Логическое следствие

Формула алгебры логики  $H(X_1, X_2, \dots, X_n)$  называется *логическим следствием* формул  $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n), \dots, F_m(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , если формула  $H(X_1, X_2, \dots, X_n)$  превращается в истинное высказывание при всякой такой подстановке вместо всех ее пропозициональных переменных  $X_1, X_2, \dots, X_n$  конкретных высказываний, при которой в истинное высказывание превращаются все формулы  $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n), \dots, F_m(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

## Логическое следствие

Таким образом,  $F_1, F_2, \dots, F_m \models H$ , если для любого набора высказываний  $X_1, X_2, \dots, X_n$  из равенств

$$F_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1, \dots, F_m(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$$

следует равенство

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$$

Запись  $F_1, F_2, \dots, F_m \models H$ , обозначает, что формула  $H$  является *логическим следствием* формул  $F_1, F_2, \dots, F_m$ . При этом формулы  $F_1, F_2, \dots, F_m$  называются *посылками* для логического следствия  $H$ . Также логическое следствие может быть обозначено как  $\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{H}$ .

## Логическое следствие

- Логическое следствие изучает закономерности образования формул  $F_1, F_2, \dots, F_m, H$ , по которым первые  $m$  формул связаны с формулой  $H$  отношением логического следствия.

- Формула алгебры логики  $H(X_1, X_2, \dots, X_n)$  называется **логическим следствием** формул  $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n), \dots, F_m(X_1, X_2, \dots, X_n)$  и обозначается  $F_1, F_2, \dots, F_m \models H$  (или  $\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{H}$ ), если для любого набора высказываний  $X_1, X_2, \dots, X_n$  из равенств

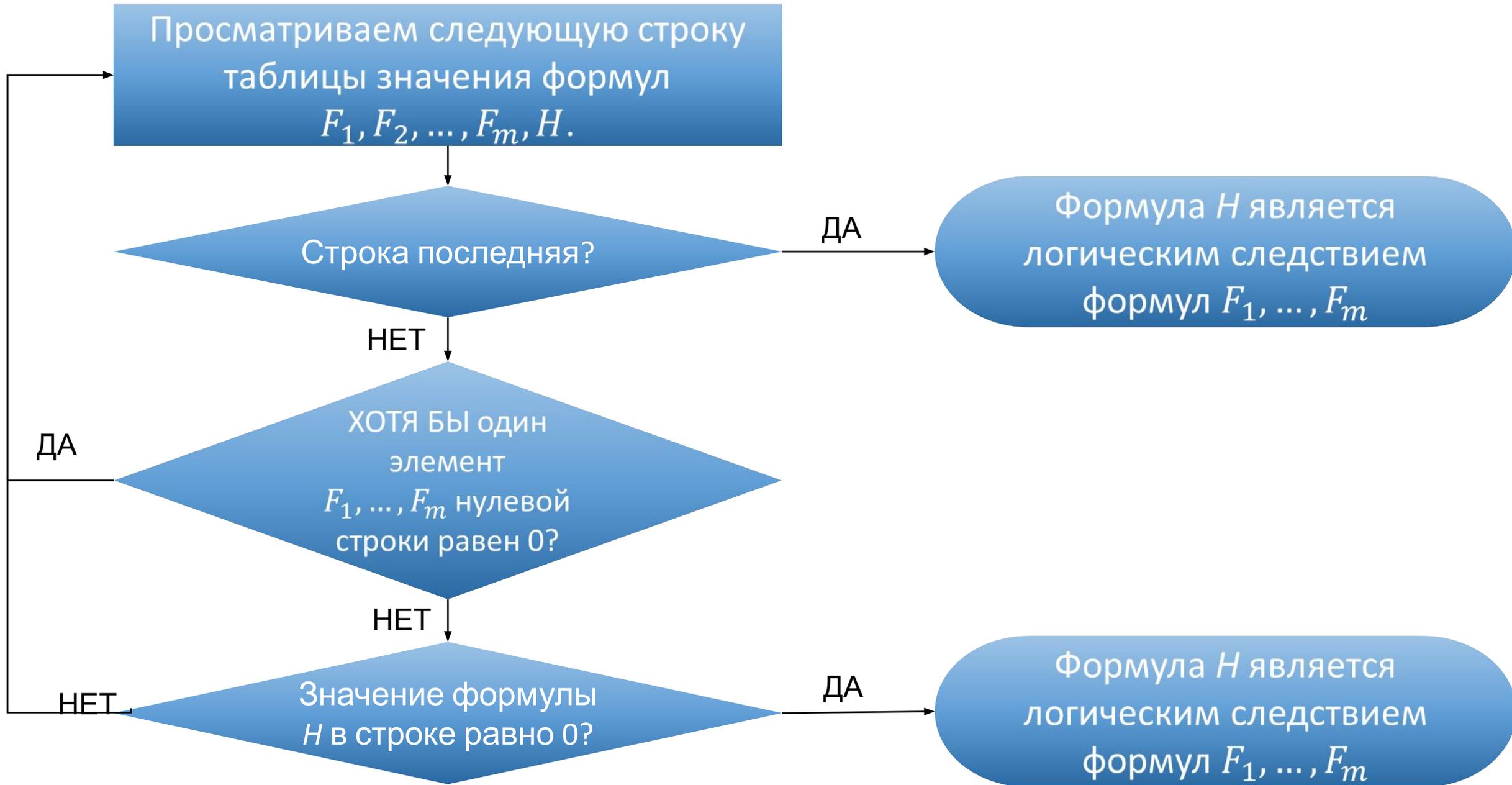
$$F_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1, \dots, F_m(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$$

следует равенство

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$$

- Формулы  $F_1, F_2, \dots, F_m$  называются **посылками** для логического следствия  $H$ .

# Алгоритм проверки на логическое следствие



# Алгоритм проверки на логическое следствие

- 

Если хотя бы один элемент  $F_1, \dots, F_m$  нулевой строки равен 0, то без просмотра значения формулы  $H$  в этой строке происходит переход к просмотру следующей строки.

Если все элементы  $F_1, \dots, F_m$  нулевой строки равны 1, то просматривается значение формулы  $H$  в этой строке: если значение формулы  $H$  в строке равно 0, выдается результат, что формула  $H$  не является логическим следствием формул  $F_1, \dots, F_m$ ; если оно равно 1, то осуществляется переход к просмотру следующей строки и т. д.

Если после просмотра последней строки должен произойти переход к просмотру следующей строки, то это означает, что определение логического следствия выполнено и формула  $H$  является логическим следствием формул  $F_1, \dots, F_m$ .

## Пример 1

Необходимо проверить логическое следование:

если  $F_1(X, Y) = X \wedge Y$ ,  $H(X, Y) = X \vee Y$ , то  $F_1 | = H$

## Пример 1

Необходимо проверить логическое следование:

если  $F_1(X, Y) = X \wedge Y$ ,  $H(X, Y) = X \vee Y$ , то  $F_1 \models H$ .

### Решение

Для проверки строим таблицу истинности

0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	1	0	0	1
3	1	1	1	1

Сравним построчно значения столбцов таблицы истинности  $F_1(X, Y)$  и  $H(X, Y)$ .

- В строке  $N = 0$  столбца  $F_1(X, Y)$  стоит 0  $\Rightarrow$  осуществляем переход к строке  $N = 1$ .
- В строке  $N = 1$  столбца  $F_1(X, Y)$  стоит 0  $\Rightarrow$  переходим к строке  $N = 2$ .
- В строке  $N = 2$  столбца  $F_1(X, Y)$  стоит 1  $\Rightarrow$  проверяем, стоит ли 1 в строке столбца  $H(X, Y)$ . Так как это действительно так  $\Rightarrow$  осуществляем переход к строке  $N = 3$ .
- Аналогично просматриваем строку  $N = 3$ .

## Пример 2

Необходимо проверить логическое следствие:

$$\begin{aligned} \text{если } F_1(X, Y, Z) = X \wedge Y, \quad F_2(X, Y, Z) = Z \rightarrow X, \quad H(X, Y, Z) = X \rightarrow (Y \vee Z) \\ \text{то } F_1, F_2 \models H. \end{aligned}$$

## Пример 2

Необходимо проверить логическое следствие:

если  $F_1(X, Y, Z) = X \wedge Y$ ,  $F_2(X, Y, Z) = Z \rightarrow X$ ,  $H(X, Y, Z) = X \rightarrow (Y \vee Z)$   
то  $F_1, F_2 \models H$ .

### Решение

Для проверки строим таблицу истинности

0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

# Эквивалентные формулы

- Формулы  $F = F_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $G = G_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$  алгебры логики называются *равносильными (эквивалентными)*, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в формулы пропозициональных переменных, т. е. для любой интерпретации  $\varphi$  выполняется равенство  $\varphi(F) = \varphi(G)$ .

## Эквивалентные формулы

Покажем, что формулы  $F = \bar{x}$  и  $G = (\bar{y} \wedge (y \vee \bar{x})) \vee \bar{x}$  эквивалентны. Для этого построим таблицу истинности и убедимся, что логические значения формул на любом наборе значений входящих в формулы пропозициональных переменных совпадают.

0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1

## Пример

Покажем, что формулы  $F = \bar{x}$  и  $G = (\bar{y} \wedge (y \vee \bar{x}))$  не эквивалентны.

## Пример

Покажем, что формулы  $F = \bar{x}$  и  $G = (\bar{y} \wedge (y \vee \bar{x}))$  не эквивалентны.

### Решение

Построим таблицу истинности

0	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	1	0	1	0

По таблице истинности видно, что существуют наборы, на которых логические значения формул не совпадают.

# Классы логических формул

- Формула  $F$  называется *тождественно истинной (тавтологией)*, если для любой интерпретации  $\varphi$  выполняется равенство  $\varphi(F) = 1$ .

Например, формула  $F = X \wedge Y \rightarrow X$  является тождественно истинной:

0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

А формула  $F = X \leftrightarrow (X \wedge Y)$  не является тождественно истинной:

0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

# Классы логических формул

- Формула  $F$  называется *тождественно ложной (противоречивой)*, если для любой интерпретации  $\varphi$  выполняется равенство  $\varphi(F) = 0$ .

# Классы логических формул

Докажем тождественную ложность формулы  $F = X \wedge \overline{(Y \rightarrow X)}$  методом подстановки значений переменных (Hint: F(X,Y))

# Классы логических формул

Докажем тождественную ложность формулы  $F = X \wedge \overline{(Y \rightarrow X)}$  методом подстановки значений переменных

Доказательство:

$$F(0,0) = 0 \wedge \overline{(0 \rightarrow 0)} = 0;$$

$$F(0,1) = 0 \wedge \overline{(1 \rightarrow 0)} = 0;$$

$$F(1,0) = 1 \wedge \overline{(0 \rightarrow 1)} = 0;$$

$$F(1,1) = 1 \wedge \overline{(1 \rightarrow 1)} = 0.$$

При любых значениях пропозициональных переменных формула равна 0. Это означает, что формула  $F$  тождественно ложна (противоречива).

# Классы логических формул

Формула  $F$  называется **выполнимой (опровержимой)**, если существует интерпретация, при которой формула  $F$  истинна (ложна). Эта терминология применима также к множествам формул: множество  $Q$  формул **выполнимо**, если существует интерпретация, при которой истинны все формулы  $Q$ .

# Классы логических формул

## Пример

Формула  $F = \bar{X} \rightarrow (Y \rightarrow X)$  выполнима, так как, например  $F(0,0) = \bar{0} \rightarrow (0 \rightarrow 0) = 1 \rightarrow 1 = 1$ . Но данная формула не является тавтологией, так как  $F(0,1) = \bar{0} \rightarrow (1 \rightarrow 0) = 1 \rightarrow 0 = 0$ .

## Пример

Формула  $F = \bar{X} \rightarrow (Y \rightarrow X)$  выполнима, так как существуют наборы, на которых она равна 0, но данная формула не является тавтологией, так как на наборе (0, 1) она равна 1.

0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

# Классы логических формул

- *Признак равносильности формул:* две формулы  $F$  и  $G$  равносильны тогда и только тогда, когда формула  $F \leftrightarrow G$  является тавтологией.

## Пример

Формула  $F = X \rightarrow Y$  и  $F = \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$  равносильны, так как формула  $X \rightarrow Y \leftrightarrow \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$  является тавтологией.

0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

# Классы логических формул

## Пример

Формула  $F = X \rightarrow Y$  и  $F = \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$  равносильны, так как формула  $X \rightarrow Y \leftrightarrow \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$  является тавтологией.

# Классы логических формул

## Пример

Формула  $F = X \rightarrow Y$  и  $F = \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$  равносильны, так как формула  $X \rightarrow Y \leftrightarrow \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$  является тавтологией.

## Решение:

0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

# Законы алгебры логики

**Булевой алгеброй**, или **алгеброй логики**, называется множество всех логических функций с **булевыми операциями**: дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Булевы операции подчиняются следующим законам:

1. Ассоциативный закон:

а)  $x(yz) = (xy)z$ ;

б)  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ .

2. Коммутативный закон:

а)  $xy = yx$ ;

б)  $x \vee y = y \vee x$ .

3. Дистрибутивный (распределительный) закон:

а)  $x(y \vee z) = xy \vee xz$ ;

б)  $x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z)$ .

4. Закон идемпотентности:

а)  $xx = x$ ;

б)  $x \vee x = x$ .

5. Двойное отрицание:  $\bar{\bar{x}} = x$ .

6. Свойства констант:

а)  $x \wedge 1 = x$ ; б)  $x \wedge 0 = 0$ ;

в)  $x \vee 1 = 1$ ; г)  $x \vee 0 = x$ ;

д)  $\bar{1} = 0$ ; е)  $\bar{0} = 1$ .

7. Закон противоречия:  $x\bar{x} = 0$ .

8. Закон исключения третьего:  $x \vee \bar{x} = 1$

9. Законы де Моргана:

а)  $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$ ;

б)  $\overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y}$ .

# Правила упрощения булевых функций

Знание законов алгебры высказываний позволяет выполнять эквивалентные преобразования любых логических формул, т. е. такие преобразования, которые сохраняют значения логических функций для любых наборов независимых переменных.

# Правила упрощения булевых функций

## Правила, применяемые для упрощения логических функций

Правило  
поглощения:

- а) ;
- б) .

Правило  
склеивания:

.

Правило  
раскрепощения  
(обратное к  
склеиванию):

.

Обобщенное  
склеивание:

.

Удаление  
отрицания:

.

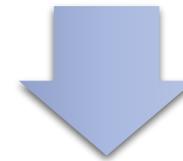
# Правила упрощения булевых функций

## Алгоритм упрощения булевой функции

Перейти в систему булевых операций (конъюнкция, дизъюнкция и отрицание).



С помощью закона де Моргана опустить все отрицания до элементарных переменных и удалить двойные отрицания по закону двойного отрицания.



Упростить выражение, удалив все константы, применяя свойства констант



Применить законы идемпотентности и противоречия, сократить лишние конъюнкции (дизъюнкции) и повторения переменных в конъюнкциях (дизъюнкциях).

## Пример

Необходимо упростить выражение  $F = (F_1 \rightarrow F_2) \rightarrow ((F_2 \rightarrow F_3) \rightarrow (F_1 \vee F_2 \rightarrow F_3))$ .

## Пример

Необходимо упростить выражение  $F = (F_1 \rightarrow F_2) \rightarrow ((F_2 \rightarrow F_3) \rightarrow (F_1 \vee F_2 \rightarrow F_3))$ .

## Решение

1. Удалить всюду логическую связку « $\rightarrow$ » (перейти к булевым операциям):

$$F = (\overline{\overline{F_1} \vee F_2}) \vee \left( (\overline{\overline{F_2} \vee F_3}) \vee (\overline{\overline{F_1} \vee F_2} \vee F_3) \right).$$

2. Опустить отрицание на элементарные формулы по закону де Моргана и удалить двойные отрицания по закону двойного отрицания:  $F = (F_1 \wedge \overline{F_2}) \vee (F_2 \wedge \overline{F_3}) \vee (\overline{F_1} \wedge \overline{F_2}) \vee F_3$ .

3. Выполнить преобразование по закону дистрибутивности:  $F = ((F_1 \vee \overline{F_1}) \wedge \overline{F_2}) \vee (F_2 \wedge \overline{F_3}) \vee F_3$ .

4. По закону исключения третьего удалить элемент  $(F_1 \vee \overline{F_1})$ :  $F = \overline{F_2} \vee (F_2 \wedge \overline{F_3}) \vee F_3$ .

5. Выполнить преобразование по закону дистрибутивности:  $F = \overline{F_2} \vee (F_2 \vee F_3) \wedge (\overline{F_3} \vee F_3)$ .

6. По закону исключения третьего удалить элемент  $(\overline{F_3} \vee F_3)$ :  $F = \overline{F_2} \vee (F_2 \vee F_3)$ .

7. Применить закон ассоциативности:  $F = (\overline{F_2} \vee F_2) \vee F_3$

8. Применить закон исключения третьего:  $F = 1 \vee F_3$ .

9. Приравнять «истине» значение формулы  $F$  согласно закону преобразования выражений с константами.

# Нормальные формы формул алгебры логики

## Дизъюнктивная нормальная форма

*Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) формулы* есть формула, равносильная формуле исходной логической функции и записанная в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций, построенных на пропозициональных переменных, т. е.

$$F = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee \dots,$$

где  $K_i = (A \wedge B \wedge C \wedge \dots)$ .

**Элементарной конъюнкцией**, или **конъюнктивным одночленом** от переменных  $A, B, C, \dots$  называется конъюнкция каких-либо из этих переменных **или их отрицаний**.  
В элементарной конъюнкции нет двух одинаковых пропозициональных переменных, так как по закону идемпотентности  $F \wedge F = F$ .

В ДНФ нет двух одинаковых элементарных конъюнкций, так как по закону идемпотентности  $F \vee F = F$ .

Если одна из элементарных конъюнкций содержит  $F$  и  $\bar{F}$ , то элементарную конъюнкцию следует удалить, так как  $F \wedge \bar{F} = 0$ .

# Нормальные формы формул алгебры логики

## Конъюнктивная нормальная форма

*Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) формулы* есть формула, равносильная формуле исходной логической функции и записанная в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций, построенных на пропозициональных переменных, т. е.

$$F = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \wedge \dots,$$

где  $D_i = (A \vee B \vee C \vee \dots)$ .

*Элементарной дизъюнкцией*, или *дизъюнктивным одночленом* от переменных  $A, B, C, \dots$  называется дизъюнкция каких-либо из этих переменных или их отрицаний.

В элементарной дизъюнкции нет двух одинаковых пропозициональных переменных, так как по закону идемпотентности  $F \vee F = F$ .

В КНФ нет двух одинаковых элементарных дизъюнкций, так как по закону идемпотентности  $F \wedge F = F$ .

Если одна из элементарных дизъюнкций содержит  $F$  и  $\bar{F}$ , то элементарную дизъюнкцию следует удалить, так как  $F \vee \bar{F} = 1$ .

# Алгоритм приведения к нормальной форме

*Шаг 1.* Устранить логические связки « $\rightarrow$ » и « $\leftrightarrow$ » всюду по правилам:

$$1) F_1 \leftrightarrow F_2 \equiv (F_1 \rightarrow F_2)(F_2 \rightarrow F_1) \equiv (\bar{F}_1 \vee F_2)(\bar{F}_2 \vee F_1) \equiv \bar{F}_1 \bar{F}_2 \vee F_1 F_2 ;$$

$$2) F_1 \rightarrow F_2 \equiv \bar{F}_1 \vee F_2 \equiv (\overline{F_1 F_2}).$$

*Шаг 2.* Продвинуть отрицание до элементарной формулы (пропозициональной переменной) по законам де Моргана и двойного отрицания.

*Шаг 3.* Применить закон дистрибутивности:

$$\text{для КНФ} - F_1 \vee (F_2 F_3) \equiv (F_1 \vee F_2)(F_1 \vee F_3) ;$$

$$\text{для ДНФ} - F_1(F_2 \vee F_3) \equiv F_1 F_2 \vee F_1 F_3.$$

## Пример

Дана формула  $F = ((\overline{F_1} \wedge \overline{F_2}) \wedge (F_1 \vee F_2))$ . Необходимо привести формулу к виду ДНФ.

## Пример

Дана формула  $F = ((\overline{F_1} \wedge \overline{F_2}) \wedge (F_1 \vee F_2))$ . Необходимо привести формулу к виду ДНФ.

## Решение

1. Применить закон де Моргана:

$$F = (\overline{F_1} \vee \overline{F_2}) \wedge (F_1 \vee F_2).$$

2. Применить закон дистрибутивности:

$$F = ((\overline{F_1} \vee \overline{F_2}) \wedge F_1) \vee ((\overline{F_1} \vee \overline{F_2}) \wedge F_2).$$

3. Применить закон дистрибутивности:

$$F = (\overline{F_1} \wedge F_1) \vee (\overline{F_2} \wedge F_1) \vee (\overline{F_1} \wedge F_2) \vee (\overline{F_2} \wedge F_2).$$

4. Применить закон исключения третьего:

$$F = (\overline{F_2} \wedge F_1) \vee (\overline{F_1} \wedge F_2).$$

## Пример

Дана формула

$$F = ((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A)) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{C})$$

Необходимо привести формулу к виду КНФ и ДНФ.

## Пример

Дана формула  $F = ((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A)) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{C})$ . Необходимо привести формулу к виду КНФ и ДНФ.

## Решение

1. Устранить « $\rightarrow$ »:  $F = \overline{((\bar{A} \vee B) \vee (\bar{C} \vee A)) \vee (\bar{\bar{B}} \vee \bar{C})}$ .
2. Продвинуть отрицание до элементарной формулы:  $F = ((\bar{A} \vee B) \wedge (C \wedge \bar{A})) \vee (B \vee \bar{C})$ .
3. Применить закон дистрибутивности:  $F = (\bar{A} \vee B \vee B \vee \bar{C}) \wedge (C \wedge \bar{A} \vee B \vee \bar{C})$ .
4. Применить закон идемпотентности:  $F = (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (C \wedge \bar{A} \vee B \vee \bar{C})$ .
5. Применить закон дистрибутивности:  $F = (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (C \vee B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee B \vee \bar{C})$ .
6. Применить закон идемпотентности:  $F = (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (C \vee B \vee \bar{C})$
7. Применить закон исключения третьего:  $F = (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (B \vee 1)$
8. Удалить константы по свойствам констант:  $F = (\bar{A} \vee B \vee \bar{C})$

*Данная формула одновременно является ДНФ и КНФ формулы.*

## Пример

Необходимо упростить выражение  $F = (F_1 \rightarrow F_2) \rightarrow ((F_2 \rightarrow F_3) \rightarrow (F_1 \vee F_2 \rightarrow F_3))$ .

## Пример

Необходимо упростить выражение  $F = (F_1 \rightarrow F_2) \rightarrow ((F_2 \rightarrow F_3) \rightarrow (F_1 \vee F_2 \rightarrow F_3))$ .

### Решение

1. Удалить всюду логическую связку « $\rightarrow$ » (перейти к булевым операциям):

$$F = (\overline{F_1 \vee F_2}) \vee ((\overline{F_2 \vee F_3}) \vee (\overline{F_1 \vee F_2 \vee F_3})).$$

2. Опустить отрицание на элементарные формулы по закону де Моргана и удалить двойные отрицания по закону двойного отрицания:  $F = (F_1 \wedge \overline{F_2}) \vee (F_2 \wedge \overline{F_3}) \vee (\overline{F_1} \wedge \overline{F_2}) \vee F_3$ .

3. Выполнить преобразование по закону дистрибутивности:  $F = ((F_1 \vee \overline{F_1}) \wedge \overline{F_2}) \vee (F_2 \wedge \overline{F_3}) \vee F_3$ .

4. По закону исключения третьего удалить элемент  $(F_1 \vee \overline{F_1})$ :  $F = \overline{F_2} \vee (F_2 \wedge \overline{F_3}) \vee F_3$ .

5. Выполнить преобразование по закону дистрибутивности:  $F = \overline{F_2} \vee (F_2 \vee F_3) \wedge (\overline{F_3} \vee F_3)$ .

6. По закону исключения третьего удалить элемент  $(\overline{F_3} \vee F_3)$ :  $F = \overline{F_2} \vee (F_2 \vee F_3)$ .

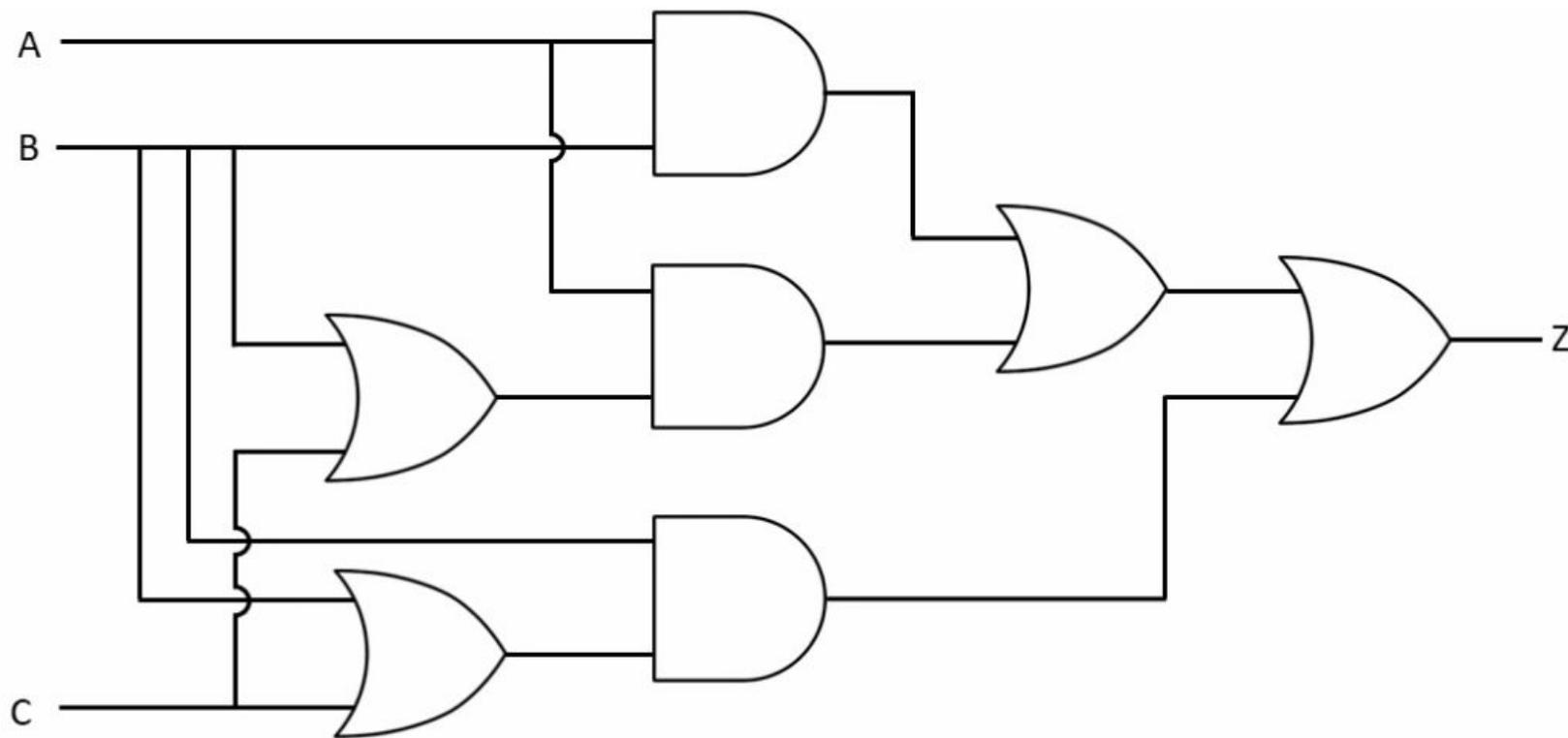
7. Применить закон ассоциативности:  $F = (\overline{F_2} \vee F_2) \vee F_3$

8. Применить закон исключения третьего:  $F = 1 \vee F_3$ .

9. Приравнять «истине» значение формулы  $F$  согласно закону преобразования выражений с константами.

# Практический пример

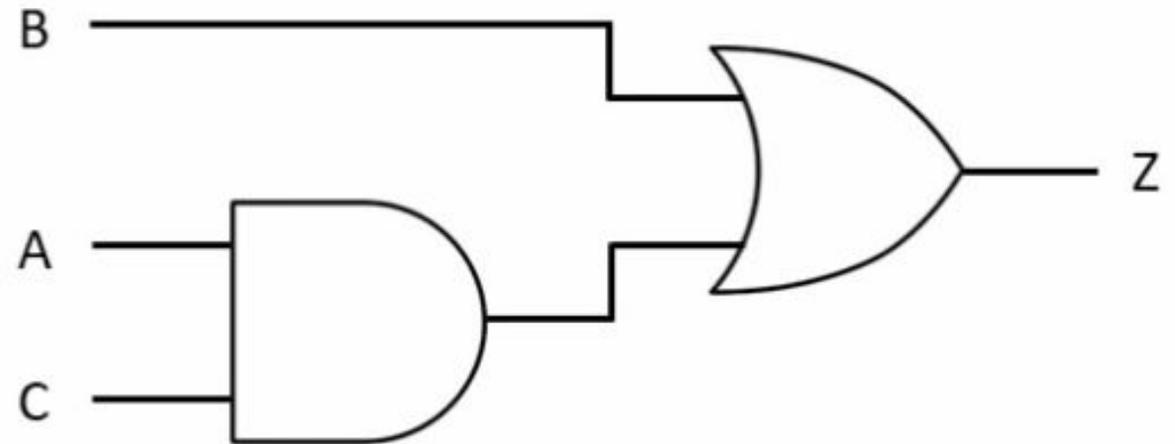
- $Z = A \wedge B \vee A \wedge (B \vee C) \vee B \wedge (B \vee C)$



•

$$\begin{aligned} Z &= A \wedge B \vee B \wedge (B \vee C) \vee B \wedge (B \vee C) = \\ &= A \wedge B \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge B) \vee (B \wedge C) = \\ &= A \wedge B \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee B \vee (B \wedge C) = \\ &= (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee B \vee (B \wedge C) = \\ &= (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee B = \\ &= (A \wedge C) \vee B \end{aligned}$$

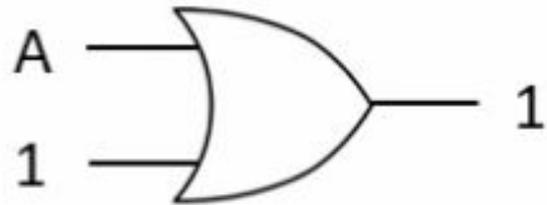
A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



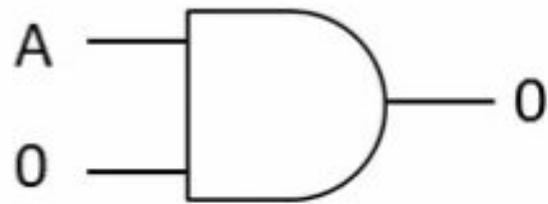
$$Z = (A \wedge C) \vee B$$

## Annulment

$$A \vee 1 = 1$$

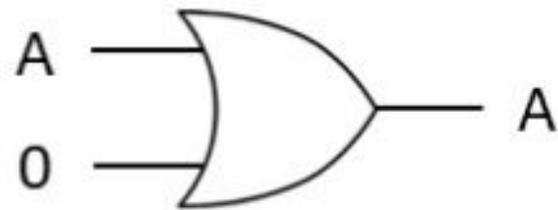


$$A \wedge 0 = 0$$

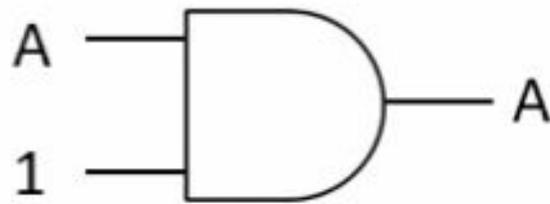


## Identity

$$A \vee 0 = A$$

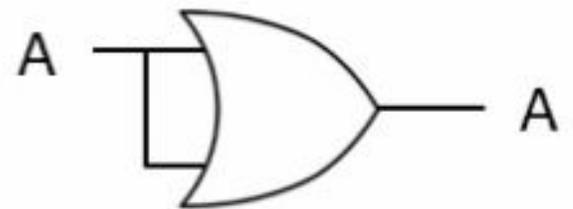


$$A \wedge 1 = A$$

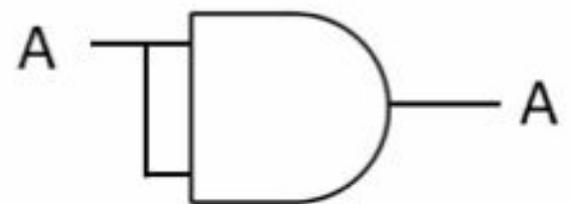


## Idempotent

$$A \vee A = A$$

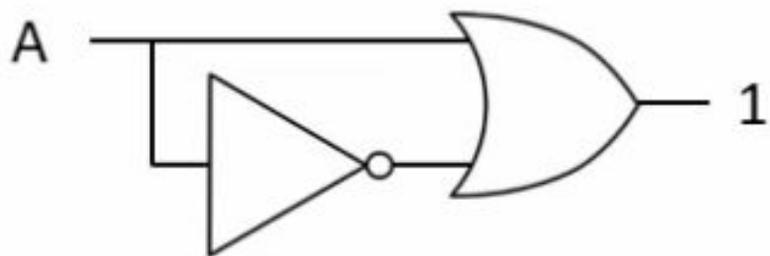


$$A \wedge A = A$$

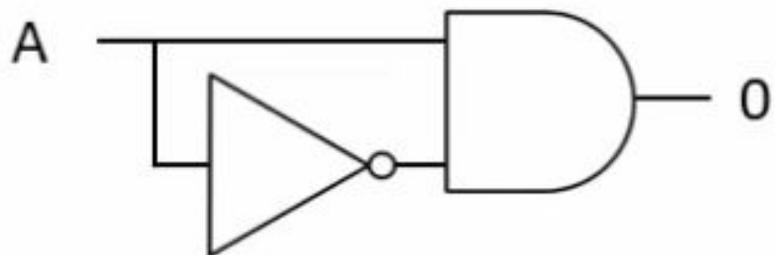


## Complement

$$A \vee \neg A = 1$$

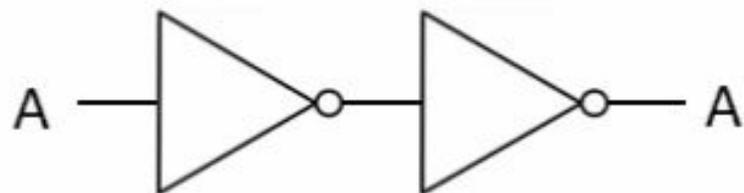


$$A \wedge \neg A = 0$$



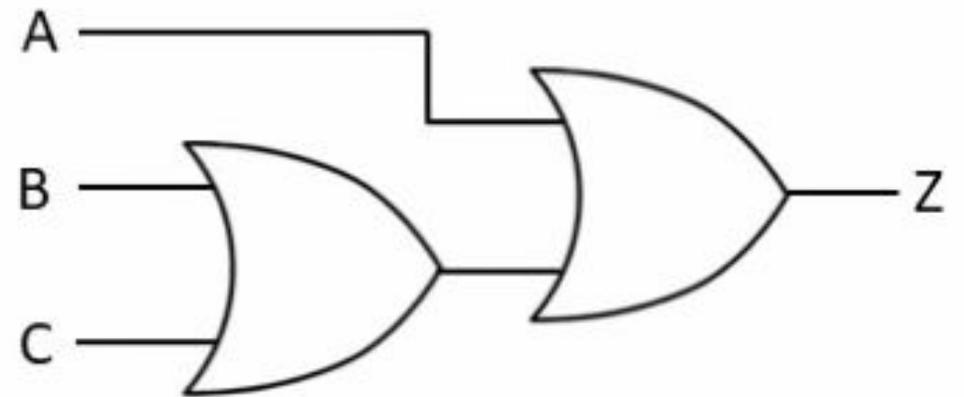
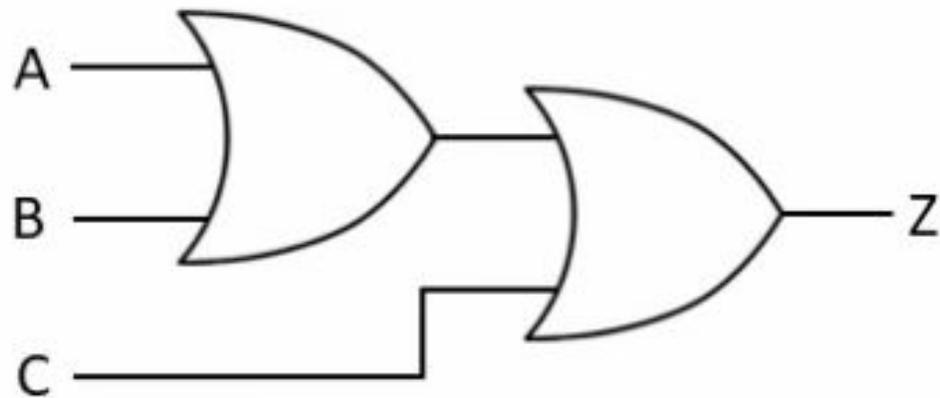
## Double Negation

$$\neg(\neg A) = A$$



Associative

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$



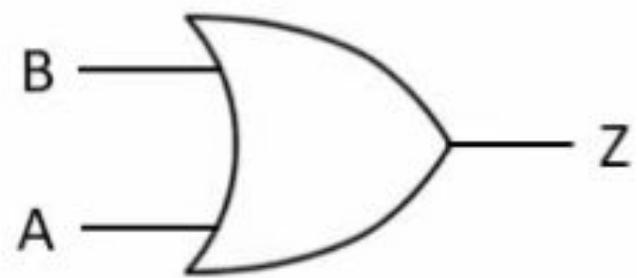
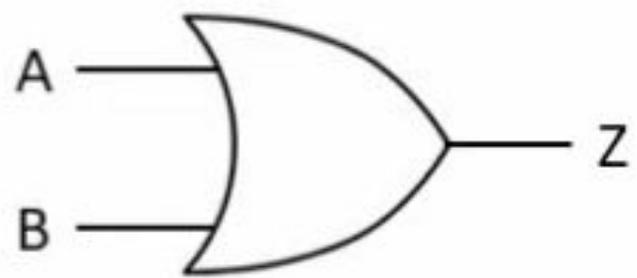
## Associative

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

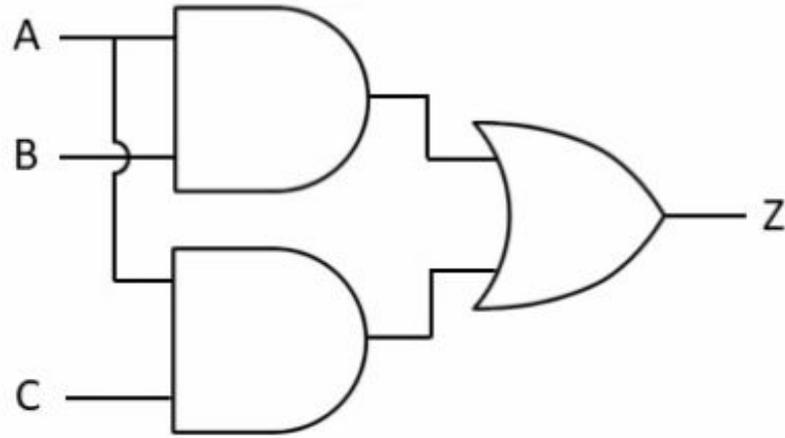
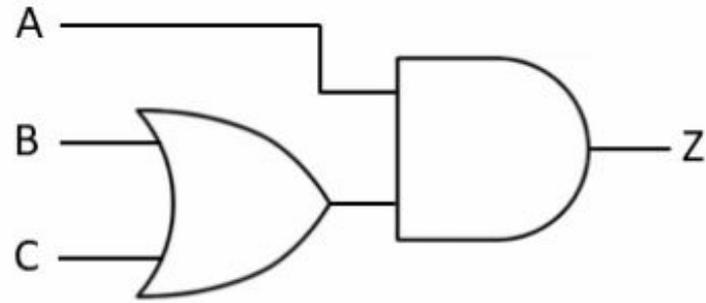
$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

## Commutative

$$A \vee B = B \vee A$$

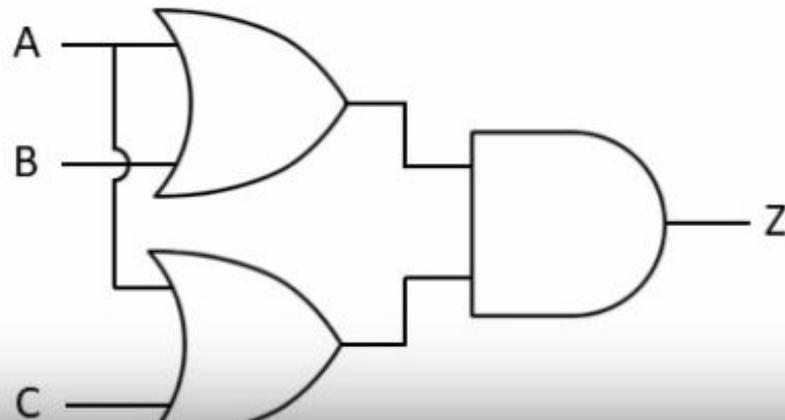
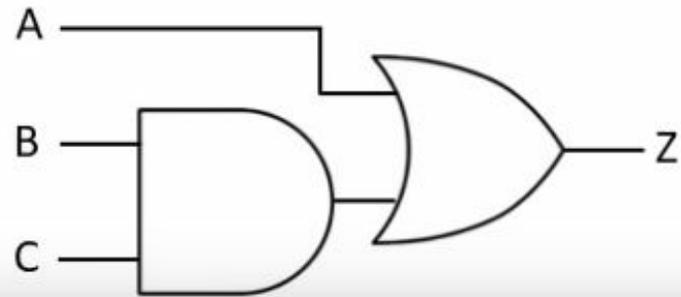


$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$



A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

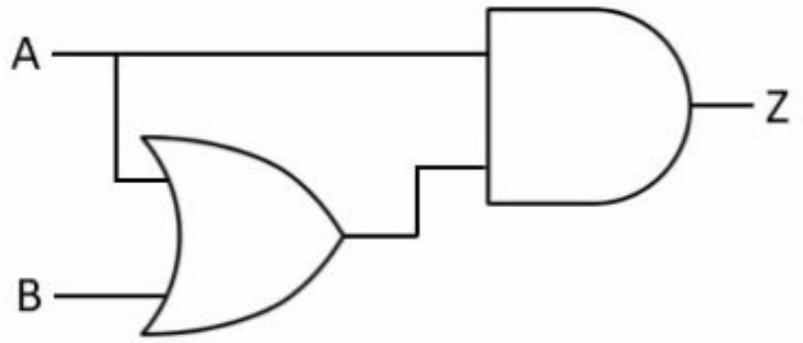
$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$



A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

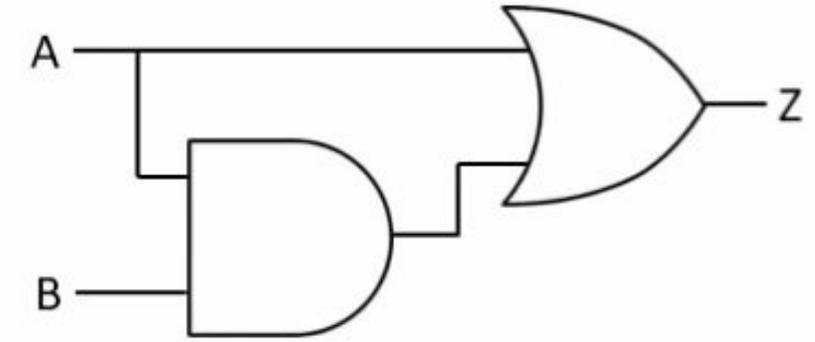
Options

$$A \wedge (A \vee B) = A$$



A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$$A \vee (A \wedge B) = A$$



A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

# Теорема об эквивалентной формуле с тесными отрицаниями

Для любой ППФ алгебры высказываний существует эквивалентная ей формула с тесными отрицаниями.

# Теорема об эквивалентной формуле с тесными отрицаниями

## Доказательство:

Доказательство индукцией по числу логических связок, входящих в ППФ  $A$ .

$n = 0$  ( $A$  - пропозициональная переменная), теорема верна.

$n = 1$ ,  $A$  имеет одну из следующих форм:  $\neg a$ ,  $(a \wedge b)$ ,  $(a \vee b)$ ,  $(a \rightarrow b)$

В первых трех случаях утверждение теоремы, очевидно, верно.

В последнем случае по эквивалентности (таблицы основных эквивалентностей) имеем  $(a \rightarrow b) \equiv (\neg a \vee b)$ .

# Теорема об эквивалентной формуле с тесными отрицаниями

**Доказательство:**

$$n \leq N, N \in \mathbb{N}$$

$n = N + 1$ . ППФ  $A$  с  $N + 1$  связкой может быть получена, лишь в виде

$A \equiv \neg B$ , либо  $A \equiv (B \wedge C)$ , либо  $A \equiv (B \vee C)$ , либо  $A \equiv (B \rightarrow C)$ , где  $B, C$  - п.п. имеющие каждая не более  $N$  связок и, согласно предположению индукции, имеющие каждая эквивалентную формулу с тесными отрицаниями.

Если  $A \equiv (B \wedge C)$ , либо  $A \equiv (B \vee C)$ , то утверждение теоремы, очевидно, верно.

# Теорема об эквивалентной формуле с тесными отрицаниями

## Доказательство:

Если  $A \equiv \neg B$ , то возможны следующие случаи:

1.  $B \equiv \neg D$ , тогда  $A \equiv \neg \neg D \equiv D$ , где  $D$  содержит не более чем  $N$  связок, и, таким образом, утверждение теоремы верно в силу предположения индукции.
2.  $B \equiv (D \wedge R)$ , тогда  $A \equiv \neg(D \wedge R) \equiv (\neg D \vee \neg R)$ , где  $\neg D$  и  $\neg R$  содержат каждая не более чем  $N$  связок, и, таким образом, утверждение теоремы верно и в этом случае.
3.  $B \equiv (D \vee R)$ , тогда  $A \equiv \neg(D \vee R) \equiv (\neg D \wedge \neg R)$ , где  $\neg D$  и  $\neg R$  содержат каждая не более чем  $N$  связок, и, таким образом, утверждение теоремы верно и в этом случае.
4.  $B \equiv (D \rightarrow R)$ , тогда  $A \equiv \neg(D \rightarrow R) \equiv (\neg D \wedge \neg R)$ , где  $D$  и  $\neg R$  содержат каждая не более чем  $N$  связок, и, таким образом, утверждение теоремы верно и в этом случае.

# Теорема об эквивалентной формуле с тесными отрицаниями

## Доказательство:

Таким образом, утверждение теоремы доказано в случае  $A \equiv \neg B$ . Если, наконец,  $A \equiv (B \rightarrow C)$ , то  $A \equiv (\neg B \vee C)$ , где  $B$  и  $C$  содержат каждая не более чем  $N$  связок. Заметим, что возможен случай, когда  $\neg B$  содержит  $N + 1$  связку (тогда  $C$  - пропозициональная переменная), но, согласно предыдущему рассмотренному случаю,  $A \equiv \neg B$  имеет эквивалентную формулу с тесными отрицаниями. Формула  $C$  имеет эквивалентную формулу с тесными отрицаниями согласно предположению индукции. Следовательно, утверждение теоремы верно и в этом случае. Таким образом, утверждение теоремы доказано полностью.

# Теорема о существовании эквивалентной ДНФ

Для любой ППФ АВ существует эквивалентная ей ДНФ.

Доказательство. Согласно теореме об эквивалентной формуле с тесными отрицаниями, для любой ППФ АВ существует эквивалентная ей формула с тесными отрицаниями. Поэтому теорема о существовании эквивалентной ДНФ будет доказана, если будет доказано существование эквивалентной ДНФ для любой формулы с тесными отрицаниями.

# Теорема о существовании эквивалентной КНФ

Для любой ППФ АВ существует эквивалентная ей КНФ.

# Теорема о виде тождественно ложной ДНФ

Если  $A$  – тождественно ложная ДНФ, то любая ее элементарная конъюнкция содержит некоторую пропозициональную переменную вместе с тесным отрицанием этой же пропозициональной переменной

# Правила получения тавтологий

- Правило заключения (modus ponens)
- Правило подстановки

# Правило заключения (modus ponens)

Также называется правилом отделения

**Теорема:** Если формулы  $F$  и  $F \rightarrow H$  являются тавтологиями, то формула  $H$  так же тавтология.

из  $\models F$ , и  $\models F \rightarrow H$  следует  $\models H$

# Правило заключения (modus ponens)

Доказательство:

Пусть  $\models F(X_1, \dots, X_n)$ ,  $\models F(X_1, \dots, X_n) \rightarrow H(X_1, \dots, X_n)$

Допустим, что  $H(X_1, \dots, X_n)$  не является тавтологией, что означает  $\exists$  высказывания  $A_1, \dots, A_n$ , такие что  $f(H(X_1, \dots, X_n)) = 0$

Но  $F(X_1, \dots, X_n)$  – тавтология,  $A_1, \dots, A_n$ , такие что  $f(F(A_1, \dots, A_n)) = 1$

$f(F(A_1, \dots, A_n) \rightarrow H(A_1, \dots, A_n)) = f(F(A_1, \dots, A_n)) \rightarrow f(H(A_1, \dots, A_n)) = 1 \rightarrow 0 = 0$ , противоречит ТИ формулы  $F \rightarrow H$ .

Следовательно, предположение неверно.

Тогда  $\models H$

# Правило подстановки

Пусть в формуле  $F$  содержится ПП  $X$  (а, возможно, и другие ПП), и  $H$  – любая формула.

Если в формулу  $F$  вместо символа  $X$ , везде, где он входит в  $F$ , вставить формулу  $H$ , то получим новую формулу

$$S_X^H F$$

формула, полученная из  $F$  в результате подстановки в неё формулы  $H$  вместо ПП  $X$

Пример:

$$((X \vee Y) \rightarrow (X \wedge \neg Y)),$$

$$S_Y^{(X_1 \wedge X_2)} ((X \vee Y) \rightarrow (X \wedge \neg Y)) = ((X \vee (X_1 \wedge X_2)) \rightarrow (X \wedge \neg (X_1 \wedge X_2))),$$

**Алфавит** - любое непустое не более чем счетное множество, элементы которого будем называть символами (буквами).

**Слово (цепочка)** в данном алфавите – произвольная конечная последовательность символов данного алфавита; эта последовательность может не содержать ни одного символа (**пустое слово**).

**Произведением (конкатенацией)** слов  $\alpha$  и  $\beta$  назовем слово  $\alpha\beta$ . Если  $\alpha = \beta\gamma$ , то  $\beta\gamma$  - **подслова (подцепочки)** слова  $\alpha$ .

**Алфавит** - любое непустое не более чем счетное множество, элементы которого будем называть символами (буквами).

**Слово (цепочка)** в данном алфавите – произвольная конечная последовательность символов данного алфавита; эта последовательность может не содержать ни одного символа (пустое слово).

**Произведением (конкатенацией)** слов  $\alpha$  и  $\beta$  назовем слово  $\alpha\beta$ . Если  $\alpha = \beta\gamma\delta$ , то  $\beta\gamma\delta$  - **подслова (подцепочки)** слова  $\alpha$ .

Результат замены данного вхождения подслова  $\gamma$  в слове  $\beta\gamma\delta$  на слово  $\alpha$  – слово  $\beta\alpha\delta$ .

Результат подстановки  $S\alpha\beta\alpha$  в слово  $\alpha$  вместо символа  $\alpha$  слова  $\beta$  - слово, полученное из  $\alpha$  одновременной заменой всех вхождений символа  $\alpha$  на слово  $\beta$ . Введем в рассмотрение алфавит, состоящий из следующих трех множеств символов:

# Совершенные нормальные формулы

Основные способы задания булевых функций:

1. Аналитический
2. Истинностные таблицы

Как перейти от ТИ к формуле?

## Совершенные нормальные формы

Если каждая элементарная конъюнкция (или элементарная дизъюнкция) формулы содержит символы всех пропозициональных переменных, то такая формула называется *совершенной*.

Существуют *совершенные дизъюнктивные нормальные формы* формулы (СДНФ) и *совершенные конъюнктивные нормальные формы* формулы (СКНФ).

# СДНФ

ДНФ, в которой каждая элементарная конъюнкция зависит от всех входящих в нее пропозициональных переменных и каждая переменная входит в каждую элементарную конъюнкцию ровно один раз, называется

**совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ).**

# СКНФ

КНФ, в которой каждая элементарная дизъюнкция зависит от всех входящих в нее пропозициональных переменных и каждая переменная входит в каждую элементарную дизъюнкцию ровно один раз, называется

**совершенной конъюнктивной нормальной  
формой (СКНФ)**

# Совершенные нормальные формы

## Алгоритм преобразования ДНФ к виду СДНФ

*Шаг 1.* Если в элементарную конъюнкцию  $F$  не входит подформула  $F_i$  и  $\bar{F}_i$ , то дополнить элементарную конъюнкцию высказыванием  $F_i \vee \bar{F}_i$  и выполнить преобразование формулы по закону дистрибутивности:

$$F(F_i \vee \bar{F}_i) = FF_i \vee F\bar{F}_i.$$

При этом знак конъюнкции в формулах можно опускать, т. е. запись  $F_1F_2$  соответствует записи  $F_1 \wedge F_2$ , или  $F_1 \cdot F_2$ .

*Шаг 2.* Если в элементарную конъюнкцию  $F$  не входит подформула  $F_j$  или  $\bar{F}_j$ , то повторить шаг 1.

*Шаг 3.* Упрощаем полученную формулу, используя равносильности:

$$F \wedge F = F; \quad F \vee F = F.$$

# Совершенные нормальные формы

## *Пример*

Необходимо привести формулу  $F = F_1 \overline{F_2} \vee F_1 \overline{F_3} F_4 \vee F_1 F_2 F_3 \overline{F_4}$  к виду СДНФ.

# Совершенные нормальные формы

## Пример

Необходимо привести формулу  $F = F_1 \bar{F}_2 \vee F_1 \bar{F}_3 F_4 \vee F_1 F_2 F_3 \bar{F}_4$  к виду СДНФ.

## Решение

$$1. F = F_1 \bar{F}_2 (F_3 \vee \bar{F}_3) \vee F_1 \bar{F}_3 F_4 (F_2 \vee \bar{F}_2) \vee F_1 F_2 F_3 \bar{F}_4.$$

$$2. F = F_1 \bar{F}_2 F_3 \vee F_1 \bar{F}_2 \bar{F}_3 \vee F_1 F_2 \bar{F}_3 F_4 \vee F_1 \bar{F}_2 \bar{F}_3 F_4 \vee F_1 F_2 F_3 \bar{F}_4.$$

$$3. F = F_1 \bar{F}_2 F_3 (F_4 \vee \bar{F}_4) \vee F_1 \bar{F}_2 \bar{F}_3 (F_4 \vee \bar{F}_4) \vee F_1 F_2 \bar{F}_3 F_4 \vee F_1 \bar{F}_2 \bar{F}_3 F_4 \vee F_1 F_2 F_3 \bar{F}_4.$$

$$4. F = F_1 \bar{F}_2 F_3 F_4 \vee F_1 \bar{F}_2 F_3 \bar{F}_4 \vee F_1 \bar{F}_2 \bar{F}_3 F_4 \vee F_1 \bar{F}_2 \bar{F}_3 \bar{F}_4 \vee F_1 F_2 \bar{F}_3 F_4 \vee F_1 \bar{F}_2 \bar{F}_3 F_4 \vee F_1 F_2 F_3 \bar{F}_4.$$

$$5. F = F_1 \bar{F}_2 F_3 F_4 \vee F_1 \bar{F}_2 F_3 \bar{F}_4 \vee F_1 \bar{F}_2 \bar{F}_3 F_4 \vee F_1 \bar{F}_2 \bar{F}_3 \bar{F}_4 \vee F_1 F_2 \bar{F}_3 F_4 \vee F_1 F_2 F_3 \bar{F}_4.$$

# Совершенные нормальные формы

## Алгоритм преобразования КНФ к виду СКНФ

*Шаг 1.* Если в элементарную дизъюнкцию  $F$  не входит подформула  $F_i$  и  $\bar{F}_i$ , то дополнить элементарную дизъюнкцию высказыванием  $F_i \bar{F}_i$  и выполнить преобразование формулы по закону дистрибутивности:

$$F \vee F_i \bar{F}_i = (F \vee F_i) (F \vee \bar{F}_i).$$

При этом знак конъюнкции в формулах можно опускать, т. е. запись  $F_1 F_2$  соответствует записи  $F_1 \wedge F_2$ , или  $F_1 \cdot F_2$ .

*Шаг 2.* Если в элементарную дизъюнкцию  $F$  не входит подформула  $F_j$  или  $\bar{F}_j$ , то повторить шаг 1.

*Шаг 3.* Упрощаем полученную формулу, используя равносильности:

$$F \wedge F = F; \quad F \vee F = F.$$

# Совершенные нормальные формы

## Пример

Необходимо привести формулу  $F = (F_1 \vee F_2) (\bar{F}_1 \vee \bar{F}_2 \vee F_3)$  к виду СКНФ.

# Совершенные нормальные формы

## Пример

Необходимо привести формулу  $F = (F_1 \vee F_2) (\bar{F}_1 \vee \bar{F}_2 \vee F_3)$  к виду СКНФ.

## Решение

$$F = (F_1 \vee F_2 \vee F_3 \bar{F}_3) (\bar{F}_1 \vee \bar{F}_2 \vee F_3)$$

$$F = (F_1 \vee F_2 \vee F_3) (F_1 \vee F_2 \vee \bar{F}_3) (\bar{F}_1 \vee \bar{F}_2 \vee F_3)$$

## Совершенные нормальные формы. Таблицы истинности

Элементарные конъюнкции СДНФ формируются для значений формулы 1. Число элементарных конъюнкций равно числу истинных значений формулы. Пропозициональные переменные, входящие в элементарную конъюнкцию, записываются без изменений, если их значение равно 1, и с логической связкой отрицание – если их значение равно 0.

*СДНФ для всякой логической функции единственна. Для тождественно ложной функции СДНФ не существует.*

Элементарные дизъюнкции СКНФ формируются для значений формулы 0. Число элементарных дизъюнкций равно числу ложных значений формулы. Пропозициональные переменные, входящие в элементарную дизъюнкцию, записываются без изменений, если их значение равно 0, и с логической связкой отрицание – если их значение равно 1.

*СКНФ для всякой логической функции единственна. Для тождественно истинной функции СКНФ не существует.*

# Совершенные нормальные формы. Таблицы истинности

## Пример:

Необходимо записать СДНФ и СКНФ для функции, заданной таблицей ИСТИННОСТИ.

	<i>B</i>	<i>C</i>	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

# Совершенные нормальные формы. Таблицы истинности

## Пример:

Необходимо записать СДНФ и СКНФ для функции, заданной таблицей ИСТИННОСТИ.

	<i>B</i>	<i>C</i>	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Формула СДНФ имеет вид:

$$F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}BC \vee A\bar{B}\bar{C} \vee ABC$$

Формула СКНФ имеет вид:

$$F(A, B, C) = (A \vee B \vee \bar{C})(A \vee \bar{B} \vee C) (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C)$$

# Теорема о существовании эквивалентной КНФ

Для любой ППФ АВ существует эквивалентная ей КНФ.

**Доказательство:** аналогично доказательству теоремы об эквивалентной ДНФ.

Согласно теореме об эквивалентной формуле с тесными отрицаниями, для любой ППФ АВ существует эквивалентная ей формула с тесными отрицаниями. Поэтому теорема о существовании эквивалентной КНФ будет доказана, если будет доказано существование эквивалентной КНФ для любой формулы с тесными отрицаниями.

# Теорема о виде тождественно ложной ДНФ

**Доказательство:** Доказательство проводится от противного. Предположим, что для некоторой элементарной конъюнкции данной формулы  $A$  переменные  $a_1, a_2, \dots, a_k$  входят в эту элементарную конъюнкцию без отрицаний, а  $(a_{k+1}, \dots, a_n)$  — отрицаниями, т.е.  $(a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k \wedge \neg a_{k+1} \wedge \dots \wedge \neg a_n)$ . Тогда при  $a_1 = t, \dots, a_k = t, a_{k+1} = f, \dots, a_n = f$ , имеем  $A_1 = t$ , и, следовательно  $A = t$ , что противоречит тому, что — тождественно ложная формула. Следовательно, утверждение теоремы верно.

# Теорема о виде тождественно истинной КНФ

Теорема (о виде тождественно истинной к.н.ф.): Если  $A$  тождественно истинная к.н.ф., то любая элементарная дизъюнкция содержит некоторую пропозициональную переменную вместе с тесным отрицанием этой пропозициональной переменной.

**Доказательство.** Доказательство проводится вполне аналогично доказательству предыдущей теоремы о виде тождественно ложной ДНФ.

# Условия существования с.д.н.ф., с.к.н.ф

**Теорема 2.** Для любой опровержимой п.п.ф. существует эквивалентная с.к.н.ф. Кроме доказанных теорем 1 и 2, справедливы следующие утверждения.

**Теорема 3.** Для тождественно ложной п.п.ф. не существует эквиваленти ей с.д.н.ф.

**Теорема 4.** Для тождественно истинной п.п.ф. не существует эквивалентной й с.к.н.ф.

# Условия существования с.д.н.ф., с.к.н.ф

**Доказательство:** Доказательства теорем 3 и 4 немедленно следуют, соответственно, из теоремы тождественно ложной д.н.ф и тождественно истинной к.н.ф. Решая поставленную задачу, мы научились строить с.д.н.ф. и с.к.н.ф. (при условии их существования) по заданной таблице истинности. Однако, с.д.н.ф. и с.к.н.ф., эквивалентные данной формуле, можно строить и путем проведения эквивалентных преобразований этой формулы. Именно, для приведения п.п.ф. к эквивалентной с.д.н.ф. (с.к.н.ф.) нужно:

- привести данную формулу к эквивалентной д.н.ф. (к.н.ф.);
- дополнить полученную д.н.ф. (к.н.ф.) до с.д.н.ф. (с.к.н.ф.), пользуясь эквивалентностью-  $(A \vee \neg A) \equiv T$  (для с.к.н.ф. - эквивалентностью  $-(A \wedge \neg A) \equiv F$ )

# Понятие логического высказывания в АВ

Высказывание  $B$  называется логическим следствием высказываний  $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ , в алгебре высказываний, если п.п.ф. принимает значение  $t$  ) всякий раз, когда все формулы  $A_1, A_2, \dots, A_m$  одновременно принимают значение  $t$ ). Факт такого логического следствия символически будем записывать в виде  $A_1, A_2, \dots, A_m \models B$

# Понятие логического высказывания в АВ

## Пример

Рассмотрим рассуждение: Если температура плавления вещества равна  $0^{\circ}\text{C}$  (высказывание  $A$ ), а температура вещества равна  $-20^{\circ}\text{C}$  (высказывание  $B$ ), то вещество находится в твердом состоянии (высказывание  $C$ )

$((A \wedge B) \rightarrow C)$  – формальная запись приведенного утверждения (сложного высказывания)).

В данном рассуждении - три посылки:  $((A \wedge B) \rightarrow C), A$  , заключение  $C$ ).

# Понятие логического высказывания в АВ

## Пример

Рассуждение признается правильным, если заключение является справедливым (истинным) при справедливости (истинности) посылок. Другими словами, правильное рассуждение должно обеспечивать заключению истинностное значение  $t$  всякий раз, когда все посылки имеют истинностное значение  $t$ . Проверка этого факта можно осуществить путем построения таблицы истинности всех участвующих в рассуждении формул. Для рассматриваемого случая имеем:

# Понятие логического высказывания в АВ

## Пример

1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
0	1	1	0
0	0	1	1
0	0	1	0

# Непротиворечивые (выполнимые) и противоречивые (невыполнимые) множества посылок

Множество посылок

$$F = (A_1, \dots, A_n)$$

называется **выполнимым**, если существует такой набор значений входящих в него попозициональных переменных, на котором все формулы из  $F$  принимают одновременно значения  $t$ . Если такого набора значений попозициональных переменных не существует, то  $F$  - невыполнимо.

# Непротиворечивые (выполнимые) и противоречивые (невыполнимые) множества посылок

Примеры:

1. Множество  $F = \{A, (A \vee B)\}$  выполнимо, так как, например, при  $A = t, B = f$  имеем  $\{A = t, (A \vee B) = t\}$ .
2. Множество  $F = \{A, (\neg A \wedge B)\}$  невыполнимо, так как если  $A = t$ , то при любом значении  $B$  имеем  $\{A = t, (\neg A \wedge B) = f\}$ , а если  $A = f$ , то при  $B = t$  имеем  $\{A = f, (\neg A \wedge B) = t\}$ , а при  $B = f$  имеем  $\{A = f, (\neg A \wedge B) = f\}$ ; таким образом, формулы из  $F$  никогда одновременно не принимают значения  $t$ .

# Установление факта логического следствия из данного множества

## ПОСЫЛОК

Замечание 1.

Запись  $\models B$  означает тождественную истинность формулы  $B$ .

Замечание 2.

Высказывание  $B$  не является логическим следствием высказываний  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , в том случае, когда  $B = F$  при условии  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = t$ . Если  $F$  - невыполнимо, то  $F \models B$  при любом  $B$ . Это видно из сведения логического следствия с учетом замечания 2.

# Установление факта логического следствия из данного множества

## ПОСЫЛОК

### Замечание 4.

Учитывая определение значения формулы со связкой  $\wedge$  получаем, что множество посылок  $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  выполнимо тогда и только тогда, когда выполнима формула  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_m)$ , невыполнимо тогда и только тогда, когда формула  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_m)$  тождественно ложна. Учитывая определения логического следствия, выполнимого и невыполнимого множества посылок, а также сделанные замечания можно сформулировать следующую процедуру для определения того является ли данное высказывание  $B$  логическим следствием данного множества посылок  $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$

# Установление факта логического следствия из данного множества

## ПОСЫЛОК

1. Проверить  $F$  на выполнимость; если  $F$  - невыполнимо, то  $F \models B$ , если  $F$  - выполнимо, то перейти к следующему пункту проверки.
2. Составить систему  $\left\{ \begin{array}{l} B = f \\ A_1 = t \\ \dots \\ A_n = t \end{array} \right.$  логических уравнений
3. Исследовать полученную систему на совместность; если система несовместна, то  $F \models B$ , если система совместна, то является логическим следствием множества посылок  $F$ .

# Основные теоремы о логическом следствии

Пусть  $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  некоторое множество посылок. Множество  $F \cup \{A\}$ , где  $A$  - некоторая п.п.ф., будем записывать в виде  $F, A$ .

Теорема 1.  $F, A \vDash A$

Доказательство. Если множество посылок  $\{F, A\}$  выполнимо, то существуют такие наборы значений пропозициональных переменных, от которых зависит это множество посылок, на которых одновременно все формулы из  $F$  и формула  $A$  принимают значение  $t$ , следовательно, в таком случае  $F, A \vDash A$  согласно определению логического следствия. Если же множество посылок  $\{F, A\}$  невыполнимо, то  $F, A \vDash A$  согласно замечанию 3 из предыдущего пункта.

# Основные теоремы о логическом следствии

Теорема 2. Пусть  $B$  - некоторая п.п.ф. Тогда, если  $F \models A$ , то  $F, B \models A$

Доказательство. Проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы 1.

Следствие теоремы 2. Пусть  $F'$  - конечное множество п.п.ф. Тогда, если  $F \models A$ , то  $F' \models A$

Доказательство. Легко проводится индукцией по числу формул в  $F'$ .

# Основные теоремы о логическом следствии

Теорема 3. Если  $F, A, B \models C$ , то  $F, B, A \models C$ .

Доказательство. Очевидно.

Теорема 4. Если  $F, A \models B$  и  $F \models A$ , то  $F \models B$ .

Доказательство. Если множество посылок  $\{F, A\}$  выполнимо, то:

- так как  $F, A \models B$ , то  $B$  принимает значение  $t$  всякий раз, когда формулы из  $\{F, A\}$  одновременно принимают значение  $t$ ;
- так как  $F \models A$ , то  $A$  принимает значение  $t$  всякий раз, когда все формулы из  $F$  одновременно принимают значение  $t$ .

# Основные теоремы о логическом следствии

Следовательно,  $B$  принимает значение  $t$  всякий раз, когда все формулы из  $F$  одновременно принимают значение 1, т.е.  $F \models B$ . Если множество посылок  $\{F, A\}$  невыполнимо, то из условия  $F \models A$  получаем, что  $F$  невыполнимо (иначе должен было существовать набор значений пропозициональных переменных, котором одновременно все формулы из  $F$  и формула  $A$  принимают значение  $t$ , что невозможно в силу невыполнимости  $\{F, A\}$ ). Но если  $\{F, A\}$  невыполнимо, то  $F \models B$  согласно замечанию 3 из предыдущего пункта.

# Основные теоремы о логическом следствии

Теорема 5. Если  $F \models B_1, \dots, F \models B_n$ , и  $B_1, \dots, B_n \models C$ , то  $F \models C$ .

Доказательство. Из условия  $B_1, \dots, B_n \models C$  согласно следствию теоремы 2 имеем  $F, B_1, \dots, B_n \models C$ . Из условия  $F \models B_n$  согласно следствию теореме 4 имеем  $F, B_1, \dots, B_{n-1} \models B_n$ . Из  $F, B_1, \dots, B_n \models C$  и  $F, B_1, \dots, B_{n-1} \models B_n$  по теореме 4 получим  $F, B_1, \dots, B_{n-1} \models C$ . Из условия  $F \models B_{n-1}$  согласно следствию теоремы 2 имеем  $F, B_1, \dots, B_{n-2} \models B_{n-1}$ . Из  $F, B_1, \dots, B_{n-1} \models C$  и  $F, B_1, \dots, B_{n-2} \models B_{n-1}$  по теореме 4 получим  $F, B_1, \dots, B_{n-2} \models C$ .

Продолжая этот процесс далее, на последней стадии будем иметь в результате предыдущих шагов  $F, B_1 \models C$ , из условия теоремы  $-F \models B_1$  отсюда по теореме 4 получим  $F \models C$ .

# Основные теоремы о логическом следствии

Теорема 6.  $A \models B$  тогда и только тогда, когда  $\models (A \rightarrow B)$ .

Доказательство.

1. Необходимость Легко доказывается от противного.
2. Достаточность Пусть  $\models (A \rightarrow B)$ . Рассмотрим два случая.
  - 1) Формула  $A$  не является тождественно ложной. Положим,  $A = t$ , тогда из условия  $\models (A \rightarrow B)$  и определения значения формулы со связкой  $\rightarrow$  получим  $B = t$ . Следовательно, по определению логического следствия, имеем  $A \models B$ .
  - 2) Формула  $A$  является тождественно ложной. Тогда  $\{A\}$  невыполнимо, и, согласно замечанию, имеем  $A \models B$

# Основные теоремы о логическом следствии

Теорема 7.  $A_1, \dots, A_m \models B$

- 1) тогда и только тогда, когда  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_m) \models B$ ;
- 2) тогда и только тогда, когда  $\models ((A_1 \wedge \dots \wedge A_m) \rightarrow B)$ .

Доказательство.

- 1) Как необходимость, так и достаточность немедленно следуют из определения значения формулы со связкой  $\wedge$  и определения логического следствия.
- 2) Необходимость следует из необходимости 1) и теоремы 6  $A \equiv (A_1 \wedge \dots \wedge A_m)$ . Достаточность следует из достаточности теоремы 6 при  $A \equiv (A_1 \wedge \dots \wedge A_m)$ .

# Основные теоремы о логическом следствии

Теорема 8.  $A_1, \dots, A_m \models B$  тогда и только тогда, когда  $A_1, \dots, A_{m-1} \models (A_m \rightarrow B)$

Доказательство. При  $m = 1$  имеем утверждение доказанной выше теоремы 6.

Докажем теорему для случая  $m \leq 1$ .

1. Необходимость: Пусть  $A_1, \dots, A_m \models B$ . Тогда на основании утверждения теоремы 7 имеем  $\models ((A_1 \wedge \dots \wedge A_m) \rightarrow B)$  или, воспользовавшись ассоциативностью связки  $\wedge$  (эквивалентность ШII.1), получим  $\models ((A_1 \wedge \dots \wedge A_{m-1}) \wedge A_m) \rightarrow B$ . Легко проверить,  $\models (((A \wedge C) \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow D)))$ , откуда, полагая  $A \equiv (A_1, \dots, A_m)$ ,  $C \equiv A_m$ ,  $D \equiv B \rightarrow B$  с учетом определения значения формулы со связкой имеем  $\models ((A_1 \wedge \dots \wedge A_{m-1}) \rightarrow (A_m \rightarrow B))$ .

# Основные теоремы о логическом следствии

Применяя теорему 6,  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_{m-1}) \vdash (A_m \rightarrow B)$ , а применяя далее утверждение 1) теорем получаем  $A_1, \dots, A_{m-1} \vDash (A_m \rightarrow B)$

2. Достаточность Доказывается проведением всех рассуждений, использован при доказательстве необходимости данной теоремы, в обратном порядке.

Следствие теоремы 8.  $A_1, \dots, A_{m-1}, A_m \vDash B$ , тогда и только тогда, когда  $\vDash ((A_1 \rightarrow (\dots \rightarrow A_{m-1} \rightarrow (A_m \rightarrow B \dots)))$ .

Доказательство. Получается  $n$ -кратным применением теоремы 8

# Основные теоремы о логическом следствии

Теорема 6.  $A \models B$  тогда и только тогда, когда  $\models (A \rightarrow B)$ .

Доказательство.

1. Необходимость Легко доказывается от противного.
2. Достаточность Пусть  $\models (A \rightarrow B)$ . Рассмотрим два случая.
  - 1) Формула  $A$  не является тождественно ложной. Положим  $A = t$ , тогда из условия  $\models (A \rightarrow B)$  и определения значения формулы со связкой  $\rightarrow$  получим  $B = t$ . Следовательно, по определению логического следствия, имеем  $A \models B$ .
  - 2) Формула  $A$  является тождественно ложной. Тогда  $\{A\}$  невыполнимо, и, согласно замечанию 3 п. 1.11, имеем  $A \models B$

# Основные теоремы о логическом следствии

Теорема 9.  $A_1, \dots, A_m \models B$  тогда и только тогда, когда  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge \neg B)$  тождественно ложна.

Доказательство.

Необходимость Пусть  $A_1, \dots, A_m \models B$ , т.е. либо существуют такие наборы значений пропозициональных переменных (от которых зависят рассматриваемые формулы), на которых одно-временно  $A_1 = \dots = A_m = t$  и либо  $B = t$ , либо  $\{A_1, \dots, A_m\}$ , невыполнимо. В первом случае для указанных наборов значений  $\neg B = f$ , а для любых других наборов значений хотя бы одна из формул  $A_1, \dots, A_m$  примет значение  $f$ , так что всегда  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge \neg B) = f$ . Во втором случае всегда хотя бы одна из формул  $A_1, \dots, A_m$  примет значение  $f$ , так что снова всегда  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge \neg B) = f$ .

# Основные теоремы о логическом следствии

**Достаточность** Доказывается проведением всех рассуждений, использованных в доказательстве необходимости данной теоремы, в обратном порядке.

Доказанные теоремы о логическом следствии позволяют:

-получать данную п.п.ф. в качестве логического следствия новой системы посылок (теоремы 1-5, 7(1), 8); при этом следует отметить теорему 5, которая дает способ последовательного получения данной п.п.ф. в качестве логического следствия выделенной системы посылок  $F$ ;

-связать факт логического следствия данной п.п.ф. с тождественной истинностью или тождественной ложностью определенной формулы (теоремы 6,7(2), следствие теоремы 8, теорема 9); это дает способ определения того, является ли данная п.п.ф. логическим следствием данной системы посылок.