Алгебра логики

Элементарные функции алгебры логики

Обозначения

E_2={0,1};

$E_2^n = E_2 \times E_2 \times \cdots \times E_2$ - прямое произведение *n* сомножителей;

$(x_1, \dots, x_n) \in E_2$, $|\ E_2\ |$ - мощность E_2

Определение

Функцией алгебры логики называется закон, осуществляющий отображение $E_2^n \to E_2$ *, причем отображение всюду определено и функционально.*

При *n*=2 задано отображение $E_2^2 \to E_2$, где $E_2^2 = \{(0\ 0), (0\ 1), (1\ 0), (1\ 1)\}$.

Таким образом, задана функция $f\ (x_1, x_2)$, которая может быть представлена в виде таблицы, называемой таблицей истинности:

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

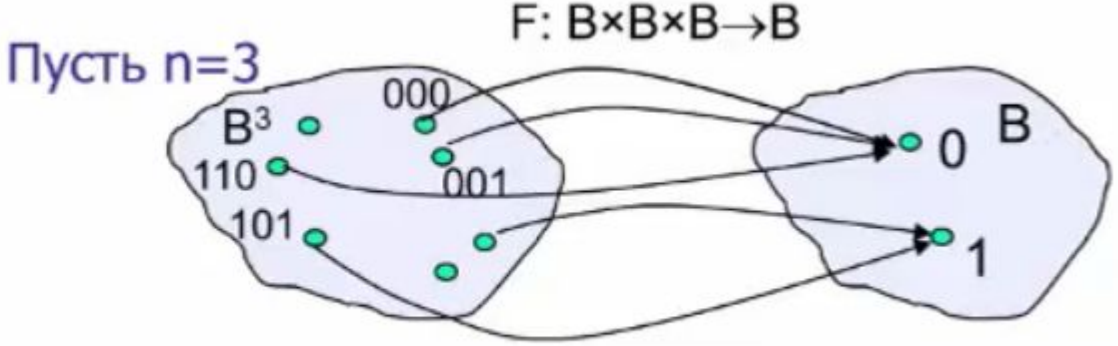
x_1 и x_2 обозначают названия столбцов, *f* – символ, обозначающий отображение.

Примечание. Функции $f(x_1,x_2)$ и $f(y_1,y_2)$ задают одно и то же отображение, и их таблицы отличаются только названиями столбцов

Пример

$F : B^n \to B$

$B=\{0, 1\}$

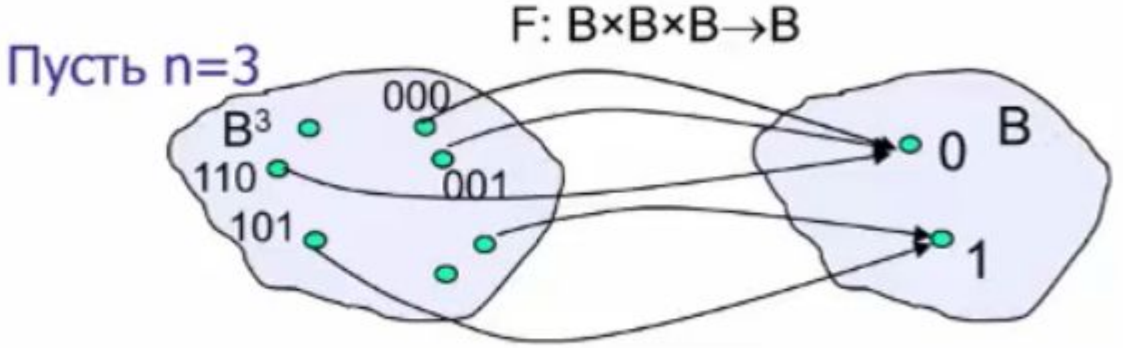


$F(0,0,0)=0;$
$F(1,1,0)=0;$
$F(1,0,1)=1;$
...

Пример

$F : B^n \to B$

$B=\{0, 1\}$



F(0,0,0)=0;
F(1,1,0)=0;
F(1,0,1)=1;
...

ТИ::

$x_1x_2x_3$	f
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	0

Классификация булевых функций

- Нульарные
- Унарные
- бинарные
- n-арные

Нульарные двоичные функции

- Функция от 0 аргументов (n = 0)
- $f: \{\} \quad \rightarrow E_2, E_2 = \{0, 1\}$
- f() = 0, f() = 1 (const 0 и 1)

Унарные функции

- Функция от 1 аргумента ($n = 1$)
- Всего 4 функции
- $f_1(x) = 0$;
- $f_2(x) = x$; ТОЖДЕСТВЕННАЯ функция
- $f_3(x) = \neg x$; ОТРИЦАНИЕ, НЕ
- $f_4(x) = 1$;

Классификация функций одной переменной

Число функций от n-переменных $P_2(n)$ определяется как 2^{2^n}.
Логических функций одной переменной $2^{2^1} = 4$, представим их в виде таблицы:

0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции f_0 и f_3 – константы 0 и 1 соответственно, их значения не зависят от значения переменной, и следовательно, переменная x для них несущественна.

Функция f_1 «повторяет» x: $f_1\ (x) = x$.

Функция $f_2(x)$ является отрицанием x. Ее значение противоположно значению x.

Классификация функций двух переменных

Логических функций двух переменных $2^{2^2} = 16$.

Рассмотрим классификацию функций двух переменных, приведенную в таблице:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Классификация функций двух переменных

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция $f_0(x, y)$– *константа* 0, т. е. функция с двумя несущественными переменными.

Функция $f_1(x, y)$– *конъюнкция* x и y, обозначается $x \wedge y$. Она равна 1, если только x и y равны 1, поэтому ее часто называют функцией «И, AND». Еще одно название – «логическое умножение».

Функция $f_2(x, y) = x \wedge \neg\, y$ – *левая компликация*.

Функция $f_3(x, y) = x \neg y \vee xy = x$ (y – несущественная переменная).

Классификация функций двух переменных

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция $f_4(x,y) = \neg x \wedge y$ – *правая компликация*.

Функция $f_5(x,y) = \neg xy \vee\ xy = y$ (*x* – несущественная переменная).

Функция $f_6(x,y)$ – *сложение по модулю 2*; ее обозначения: $x \oplus y, x\Delta y$ ..

Функция $f_7(x,y)$ – *дизъюнкция* x и y; ее обозначения: $x \vee y, x + y$. Она равна 1, если x или y равны 1 («или» здесь понимается в неразделительном смысле – хотя бы один из двух), поэтому ее часто называют функцией «ИЛИ».

Классификация функций двух переменных

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция $f_8(x, y) = \neg x \neg y$ – *стрелка Пирса*; ее обозначение $x \downarrow y$.

Функция $f_9(x, y)$ – *эквивалентность*; ее обозначения: $x \sim y, x \equiv y$. Она равна 1, когда значения ее аргументов равны, и равна 0, когда они различны: $f_9(x, y) = \neg x \neg y \vee \; xy = x \equiv y$.

Функция $f_{10}(x, y) = \neg x \neg y \vee \; x \neg y = \neg \, y$ (x – несущественная переменная).

Функция $f_{11}(x, y) = x \vee \neg y$ – *правая компликация*.

Классификация функций двух переменных

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция $f_{12}(x,y) = \neg x \neg y \vee \neg xy = \neg x$ (*y* – несущественная переменная).

Функция $f_{13}(x,y) = \neg x \vee y$ – *импликация (левая импликация)*; ее обозначение $x \to y, x \supset y$; читается: «если x, то y». (*x* – несущественная переменная).

Функция $f_{14}(x,y) = \neg x \vee \neg y$ – *штрих Шеффера*, обозначение: $x|y$.

Функция $f_{15}(x,y)$ – константа 1, т.е. функция с двумя несущественными переменными.

Стрелка Пирса и Штрих Шеффера

NAND

Input		Output
P	Q	$R = P \mid Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

NOR

Input		Output
P	Q	$R = P \downarrow Q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Существенные и несущественные переменные

По определению переменная x_i называется *существенной*, если $f(x_1, \dots, 0, \dots, x_n) \neq f(x_1, \dots, 1, \dots, x_n)$ хотя бы для одного набора значений $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, где $f = f(x_1, \dots x_n)$– булева функция.

Переменная x_i в функции f $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ называется *несущественной* (*или фиктивной*), если $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ при любых значениях остальных переменных, т. е. если изменение значения x_i в любом наборе значений $x_1, \dots x_n$ не меняет значения функции.

В этом случае функция $f(x_1, \dots x_n)$ по существу зависит от $n - 1$ переменной, т. е. представляет собой функцию g $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ от $n - 1$ переменной. Говорят, что функция g получена из функции f удалением фиктивной переменной, а функция f получена из g введением фиктивной переменной, причем эти функции по определению считаются равными.

Например, f (x_1, x_2, x_3) = g (x_1, x_2) означает, что при любых значениях x_1 и x_2 $f = g$ независимо от значения x_3.

Примеры

- Необходимо доказать, что в функции $f\ (x_1 \vee \neg x_2)(x_3 \vee \neg\ x_3)$ переменная x_3 является несущественной.

Примеры

- Необходимо доказать, что в функции $f\ (x_1 \vee \neg x_2)(x_3 \vee \neg x_3)$ переменная x_3 является несущественной.

При $x3 = 0$: $f\ (x1, x2, 0) \equiv (x_1 \vee \neg x_2)(0 \vee \neg 0) \equiv \mathbf{x_1} \vee \neg \mathbf{x_2}(0 \vee \neg 0 = 1)$.

При $x3 = 1$: $f\ (x1, x2, 1) \equiv (x_1 \vee \neg x_2)(1 \vee \neg 1) \equiv \mathbf{x_1} \vee \neg \mathbf{x_2}(1 \vee \neg 1 = 1)$.

Так как $f\ (x1, x2, 0) = f\ (x1, x2, 1)$, отсюда следует, что $x3$ – несущественная переменная. То есть изменение значения $x3$ в любом наборе значений x_1, x_2 не меняет значения функции $f\ (x_1 \vee \neg x_2)(x_3 \vee \neg x_3)$.

Примеры

Необходимо выяснить, какие переменные функции $f\,(x,\,y,\,z)$ = 01011010 являются существенными, а какие несущественными и выразить $f\,(x,\,y,\,z)$ формулой, содержащей только существенные переменные.

x	y	z	f(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Примеры

- Необходимо выяснить, какие переменные функции $f(x, y, z) = 01011010$ являются существенными, а какие несущественными и выразить $f(x, y, z)$ формулой, содержащей только существенные переменные.

Представим $f(x, y, z) = 01011010$ в виде таблицы

Переменная x существенная, так как, например, наборы (0, 0, 0) и (1, 0, 0) являются соседними по этой переменной и $f(0, 0, 0) \neq f(1, 0, 0)$.

Переменная y является несущественной, так как на всех наборах соседних по данной переменной значения функции равны, т. е. выполняются следующие равенства: $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 0)$, $f(1, 0, 0) = f(1, 1, 0)$, $f(0, 0, 1) = f(0, 1, 1)$ и $f(1, 0, 1) = f(1, 1, 1)$.

Переменная z является существенной, так как, например, наборы (0, 0, 0) и (0, 0, 1) – соседние по этой переменной и $f(0, 0, 0) \neq f(0, 0, 1)$.

Выпишем таблицу истинности функции $f(x, y, z)$ от существенных переменных

Данная функция представляет собой $f(x, y, z) = x \oplus y$

x	y	z	f(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

x	z	f(x, y, z)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Представление логической функции. Таблица истинности.

Таблица истинности. В таблице указываются значения функции в зависимости от значений истинности аргументов. Если функция за висит от *n* аргументов, то число всех наборов аргументов равно 2^n.

Для построения таблицы истинности выполняется последовательность следующих шагов:

1) определение количества переменных *n* в формуле;

2) определение числа строк в таблице $m = 2^n$;

3) подсчет количества логических операций в формуле;

4) установление последовательности выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов;

5) определение количества столбцов в таблице: число переменных и число операций;

6) определение наборов входных переменных с учетом того, что они

Пример

Необходимо составить таблицу истинности

$f\,(x, y) = (x \longrightarrow y) \vee (y \longrightarrow x).$

Пример

Необходимо составить таблицу истинности

$f(x, y) = (x \to y) \vee (y \to x)$.

x	y	$(x \to y)$	$y \to x$	$f(x, y) = (x \to y) \vee (y \to x)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Пример

- Необходимо составить таблицу истинности $f(P, Q, R) = \neg (P \to \neg(Q \wedge P)) \to (P \vee R)$.

Пример

- Необходимо составить таблицу истинности

$$f(P, Q, R) = \neg(P \to \neg(Q \wedge P)) \to (P \vee R).$$

P	Q	R	$(Q \wedge P)$	$\overline{(Q \wedge P)}$	$P \to \overline{(Q \wedge P)}$	$\overline{P \to \overline{(Q \wedge P)}}$	$(P \vee R)$	$f(P, Q, R)$
0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0	1	1

Сложности на практике

- Допустим, функция имеет 50 аргументов, тогда таблица истинности будет содержать 2^{50} строк

Можно привести функцию к особой форме СДНФ (совершенная дизъюнктивная нормальная форма) и подставить значения переменных в конъюнкты

НО

2^{50} конъюнктов, допустим вычислительные мощности позволяют вычислять 2^{13} конъюнктов/с (8192 конъюнктов/сек), тогда потребуется:

$$\frac{2^{50}}{2^{13}} \approx 2^{37}\text{сек} \approx 2^{12}\text{лет} \approx 4000 \text{ лет}$$

Решение

В 1986 г. Было предложено использовать новые формы представления логических функций

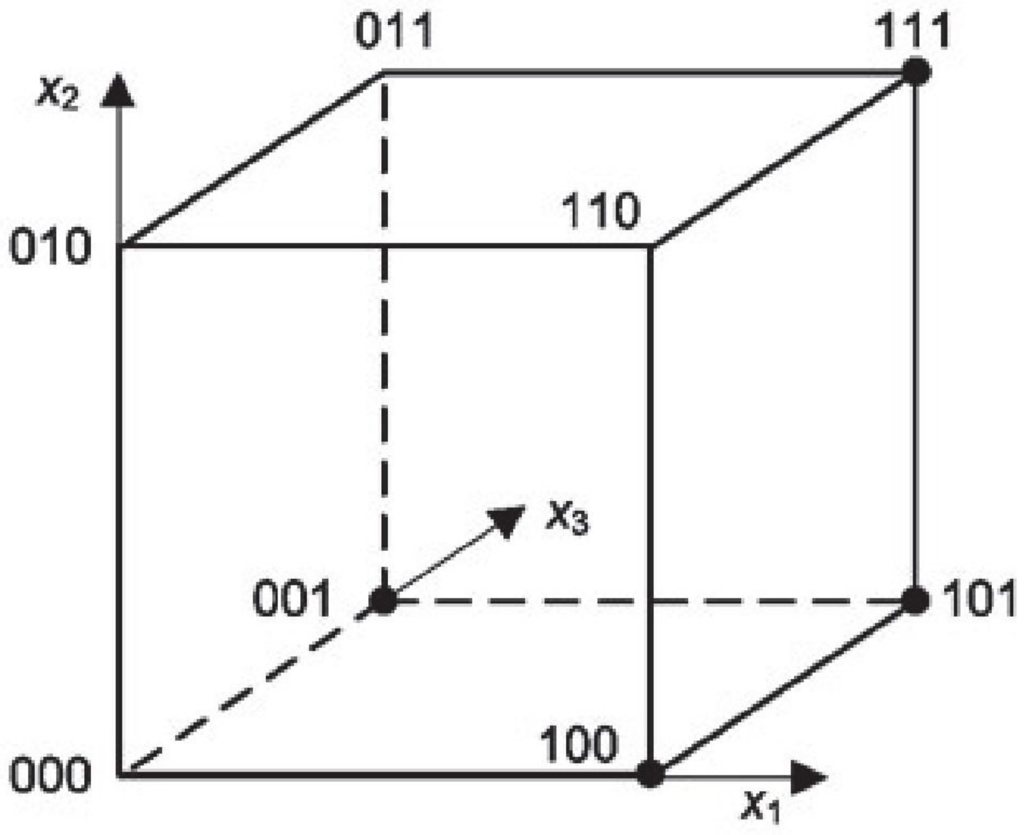
Binary Decision Diagram (BDD)

Бинарные решающие диаграммы

Которые позволяют эффективно представлять логические функции

Представление логической функции. Геометрический способ.

Для функции *n* – независимых логических переменных – рассматривается единичный *n*-мерный куб. Вершины куба соответствуют наборам независимых переменных. Каждой вершине приписывают значение функции на соответствующем наборе. На рисунке единичные наборы помечают, например, кружками



Логические значения высказываний

Высказывание – повествовательное предложение, о котором можно сказать в данный момент, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно. Логическим значением высказывания являются «*истина*» или «*ложь*».

Примеры простых (элементарных) высказываний

«3 – это простое число» – *истина*; «3,14… – рациональное число» – *ложь*;
«Юго-восточный берег озера Виви является географическим центром России» – *истина*;
«Красноярск – столица России» – *ложь*; «Число 8 делится на 2 и на 4» – *истина*; «Сумма чисел 2 и 3 равна 8» – *ложь*.

При формальном исследовании сложных текстов понятие «простые высказывания» замещают понятием ***«пропозициональные переменные»,*** которое обозначают прописными буквами латинского алфавита «*A*», «*B*» и т. д.

«Истинность» или «ложность» предложения есть истинностное значение высказывания. Каждому высказыванию сопоставляется переменная, равная 1, если высказывание истинно, и равная 0, если высказывание ложно.

Пример

1. Если *A*:= «*3 – это простое число*», то *A* = 1. (символ «:=» означает, что переменной, стоящей слева, необходимо присвоить значение высказывания, стоящего справа от символа)
2. Если *B*:= «*Красноярск – столица России*», то *B* = 0.
3. Если *C*:= «*В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов*», то *D* = 1.

Следующие утверждения не являются высказываниями.

1. $a + b = 2$.
2. Математика – интересный предмет

Логические связки

Высказывания, которые получаются из простых предложений с помощью грамматических связок ***«не», «и», «или», «если…, то…», «… тогда и только тогда, когда…»*** и т. п., называют ***сложными***, *или* ***составными***.

Для обозначения грамматических связок вводят символы, которые называют ***логическими (или пропозициональными) связками***.

Обычно рассматривают следующие логические связки:

отрицание (читается «НЕ», обозначается «¬»),

конъюнкция (читается «И», обозначается «∧»),

дизъюнкция (читается «ИЛИ», обозначается «∨»),

импликация (читается «ЕСЛИ… ТО…», обозначается «→»),

эквивалентность (читается «…ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА…», обозначается «↔»).

Правила построения сложных высказываний в виде последовательности пропозициональных переменных, логических связок и вспомогательных символов определяют возможность формального описания любого текста. При этом высказывания, из которых делают вывод новых высказываний, называют ***посылками***, а получаемое высказывание – ***заключением***.

Для построения сложных пропозициональных высказываний используют вспомогательные символы ***«(»,«)»*** – скобки.

Множество пропозициональных переменных $T = \{A, B, C, \ldots\}$ с заданными над ними логическими операциями $F = \{\neg; \wedge; \vee; \to; \leftrightarrow\}$ формируют ***алгебру высказываний,*** т. е. $A_B = \langle T; F \rangle$.

Понятие формулы алгебры логики

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических связок отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности, называют ***формулой алгебры логики***.

Символы $x_1, \dots, x_n$ будем считать формулами глубины 0.
Формула $F = f(F_1, \dots, F_n)$ имеет глубину $k + 1$, если f – функция, а $F_1, \dots, F_n$ – формулы, максимальная из глубин которых равна k. При этом $F_1, \dots, F_n$ называются *подформулами* F, а f – ***внешней или главной операцией*** F.

- Рассмотрим более точное определение *формулы алгебры логики*. $F = (\overline{F_2} \vee F_2) \vee F_3)$

1. Любую пропозициональную переменную можно назвать формулой нулевого порядка, т. е. $A_i = F_i$

2. Если F_1 и F_2 – пропозициональные формулы, то $\neg F_1$; $\neg F_2$; $F_1 \wedge F_2$; $F_1 \vee F_2$; $F_1 \rightarrow F_2$; $F_1 \leftrightarrow F_2$– также пропозициональные формулы.

3. *Подформула формулы* – любая ее часть, которая сама является формулой. Для формирования сложных формул используют вспомогательные символы «(» и «)».

Приоритет выполнения логических связок (порядок логических связок по силе и значимости) следующий: $\neg$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$. Учитывая приоритет логических связок, возможно опускать некоторые пары скобок.

Последовательность всех подформул формулы иногда называют *порождающей последовательностью* для данной *формулы*. Наличие такой последовательности у логического выражения служит критерием того, что выражение является формулой.

Пример

Необходимо удалить лишние скобки в формуле $F = \left(((F_1 \vee (\neg F_2)\right) \to F_3) \leftrightarrow F_4)$.

Пример

Необходимо удалить лишние скобки в формуле $F = \big(((F_1 \vee (\neg F_2)\big) \to F_3) \leftrightarrow F_4)$.

Решение

1. Убрать внешние скобки для формулы, так как они не определяют приоритет операций:

$$F = ((F_1 \vee (\neg F_2) \to F_3) \leftrightarrow F_4.$$

2. Убрать скобки, охватывающие формулу $\to$, так как операция $\leftrightarrow$ будет выполняться после $\to$:

$$F = (F_1 \vee (\neg F_2)) \to F_3 \leftrightarrow F_4.$$

3. Убрать скобки, охватывающие формулу $\vee$, так как операция $\to$ будет выполняться после $\vee$:

$$F = F_1 \vee (\neg F_2) \to F_3 \leftrightarrow F_4.$$

4. Убрать скобки, охватывающие формулу отрицания, так как операция $\vee$ будет исполняться только после выполнения операции отрицания:

$$F = F_1 \vee \neg F_2 \to F_3 \leftrightarrow F_4.$$

Пример

Необходимо расставить скобки в формуле $F = F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \vee \neg F_1 \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_1$.

Пример

Необходимо расставить скобки в формуле $F = F_1 \land F_2 \land F_3 \lor \neg F_1 \to F_3 \leftrightarrow F_1$.

Решение

1. Поставить скобки на формулу, реализующую операцию отрицания:

$$F = F_1 \land F_2 \land F_3 \lor (\neg F_1) \to F_3 \leftrightarrow F_1.$$

2. Поставить скобки на формулу, реализующую операцию конъюнкции:

$$F = ((F_1 \land F_2) \land F_3) \lor (\neg F_1) \to F_3 \leftrightarrow F_1.$$

3. Поставить скобки на формулу, реализующую операцию дизъюнкции:

$$F = (((F_1 \land F_2) \land F_3) \lor (\neg F_1)) \to F_3 \leftrightarrow F_1.$$

4. Поставить скобки на формулу, реализующую операцию импликации:

$$F = ((((F_1 \land F_2) \land F_3) \lor (\neg F_1)) \to F_3) \leftrightarrow F_1.$$

5. Поставить скобки на формулу, реализующую операцию эквивалентности:

$$F = (((((F_1 \land F_2) \land F_3) \lor (\neg F_1)) \to F_3) \leftrightarrow F_1).$$

Повторим вкратце

Алгебра высказываний (Propositional logic)

Высказывание (Proposition) – осмысленное **предложение(sentence)**, о котором можно говорить, что оно **истинно (true)** или **ложно (false),** но ни то, ни другое вместе

Основные логические операции АВ:

- Конъюнкция (conjunction),
- дизъюнкция (disjunction),
- импликация (implication),
- отрицание/инверсия (negation/inversion)
- эквиваленция (equivalence)

Повторим вкратце

Правильно построенная формула (ППФ) АВ (Well-formed formula)

Индуктивное определение

1. Атом/элементарная формула (высказывательная переменная, логическая константа) – формула АВ
2. Если G – формула АВ, то ¬G –формула АВ
3. Если G, H – формулы АВ, то $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$, $(G \leftrightarrow H)$ – формулы АВ
4. Никаких формул, кроме порожденных применением указанных выше правил, нет, т.е. всякое выражение является формулой алгебры высказываний, если оно получено с помощью пунктов 1–3

Повторим вкратце

- Приоритет логических операций

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

Логическое следствие

Теория логического следования в рамках алгебры логики изучает закономерности образования формул $F_1, F_2, \ldots, F_m, H$, по которым первые m формул связаны с формулой H отношением логического следствия.

Логическое следствие

Формула алгебры логики $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется ***логическим следствием*** формул $F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), \ldots, F_m(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, если формула $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ превращается в истинное высказывание при всякой такой подстановке вместо всех ее пропозициональных переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ конкретных высказываний, при которой в истинное высказывание превращаются все формулы $F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), \ldots, F_m(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Логическое следствие

Таким образом, $F_1, F_2, \dots, F_m \mid= H$, если для любого набора высказываний $X_1, X_2, \dots, X_n$ из равенств

$$F_1(X_1, X_2, \dots, X_n\ ) = 1, \dots, F_m(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$$

следует равенство

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$$

Запись $F_1, F_2, \dots, F_m \mid= H$, обозначает, что формула *H* является *логическим следствием* формул $F_1, F_2, \dots, F_m$. При этом формулы $F_1, F_2, \dots, F_m$ называются ***посылками*** для логического следствия *H*. Также логическое следствие может быть обозначено как $\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{H}$.

Логическое следствие

- Логического следствие изучает закономерности образования формул $F_1, F_2, \dots, F_m, H$, по которым первые *m* формул связаны с формулой *H* отношением логического следствия.

- Формула алгебры логики $H(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется ***логическим следствием*** формул $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n), \dots, F_m(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и обозначается $F_1, F_2, \dots, F_m \mid = H$ (или $\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{H}$), если для любого набора высказываний $X_1, X_2, \dots, X_n$ из равенств

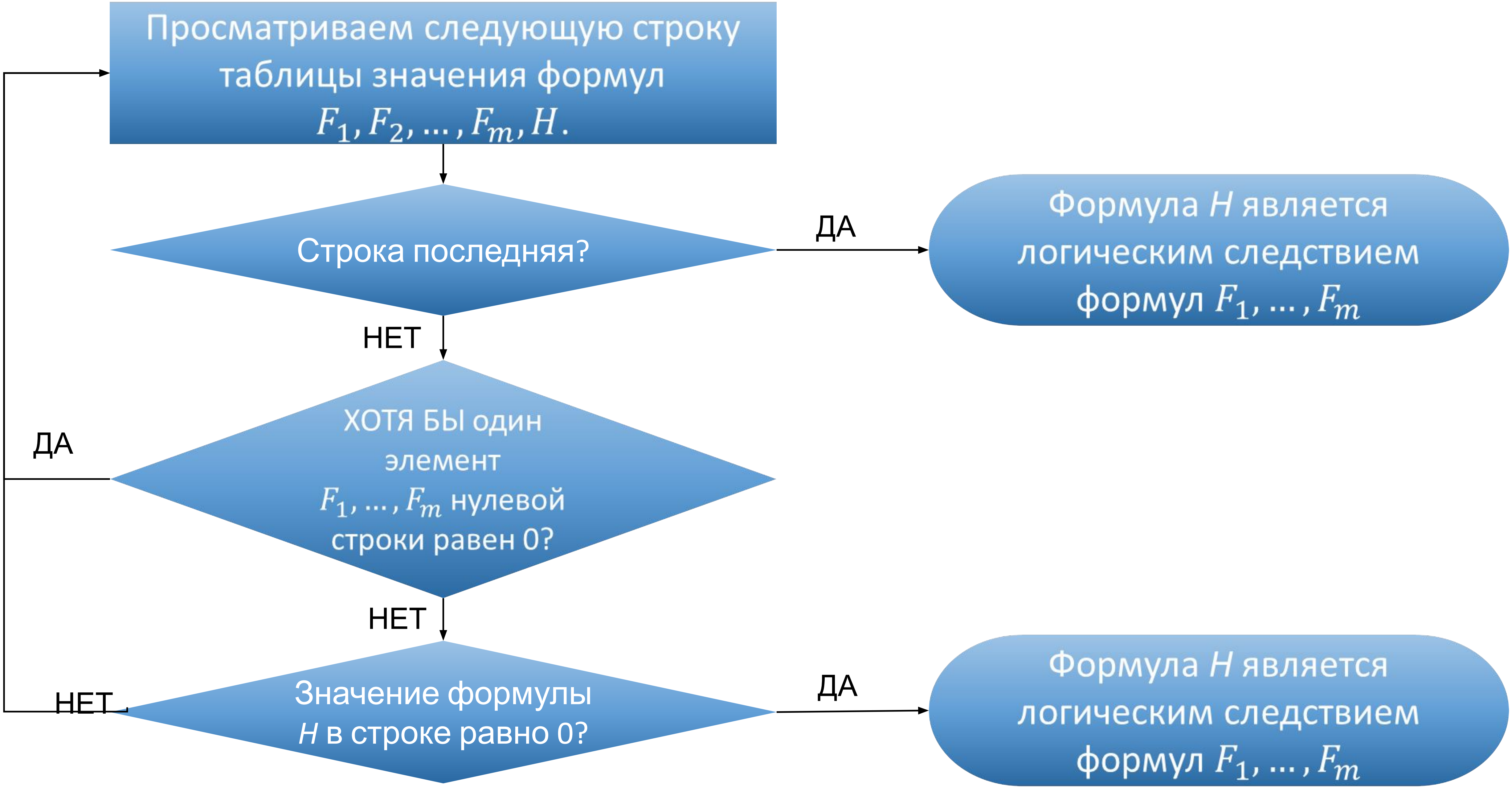
$$F_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1, \dots, F_m(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$$

следует равенство

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$$

- Формулы $F_1, F_2, \dots, F_m$ называются ***посылками*** для логического следствия *H*.

Алгоритм проверки на логическое следствие



Алгоритм проверки на логическое следствие

•

Если хотя бы один элемент $F_1, \dots, F_m$ нулевой строки равен 0, то без просмотра значения формулы H в этой строке происходит переход к просмотру следующей строки.

Если все элементы $F_1, \dots, F_m$ нулевой строки равны 1, то просматривается значение формулы H в этой строке: если значение формулы H в строке равно 0, выдается результат, что формула H не является логическим следствием формул $F_1, \dots, F_m$; если оно равно 1, то осуществляется переход к просмотру следующей строки и т. д.

Если после просмотра последней строки должен произойти переход к просмотру следующей строки, то это означает, что определение логического следствия выполнено и формула H является логическим следствием формул $F_1, \dots, F_m$.

Пример 1

Необходимо проверить логическое следование:

$$\text{если } F_1(X,Y) = X \wedge Y,\ \ H(X,Y) = X \vee Y, \text{ то } \ F_1 | = H$$

Пример 1

Необходимо проверить логическое следование:

$$\text{если } F_1(X,Y) = X \wedge Y,\ H(X,Y) = X \vee Y,\ \text{то } F_1| = H.$$

Решение

Для проверки строим таблицу истинности

0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	1	0	0	1
3	1	1	1	1

Сравним построчно значения столбцов таблицы истинности $F_1(X,Y)$ и $H(X,Y)$.

- В строке N = 0 столбца $F_1(X,Y)$ стоит 0 $\Longrightarrow$ осуществляем переход к строке N = 1.
- В строке N = 1 столбца $F_1(X,Y)$ стоит 0 $\Longrightarrow$ переходим к строке N = 2.
- В строке N = 2 столбца $F_1(X,Y)$ стоит 1 $\Longrightarrow$ проверяем, стоит ли 1 в строке столбца $H(X,Y)$. Так как это действительно так $\Longrightarrow$ осуществляем переход к строке N
- Аналогично просматриваем строку N = 3.

Пример 2

Необходимо проверить логическое следствие:

если $F_1(X,Y,Z) = X \wedge Y,\ F_2(X,Y,Z) = Z \to X,\ H(X,Y,Z) = X \to (Y \vee Z)$

то $F_1, F_2 | = H$.

Пример 2

Необходимо проверить логическое следствие:

если $F_1(X,Y,Z) = X \wedge Y,\ F_2(X,Y,Z) = Z \to X,\ H(X,Y,Z) = X \to (Y \vee Z)$

то $F_1, F_2 \mid= H$.

Решение

Для проверки строим таблицу истинности

0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Эквивалентные формулы

- Формулы $\mathrm{F} = F_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $G = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ алгебры логики называются *равносильными (эквивалентными)*, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в формулы пропозициональных переменных, т. е. для любой интерпретации φ выполняется равенство $\varphi(F) = \varphi(G)$.

Эквивалентные формулы

Покажем, что формулы $F = \bar{x}$ и $G = \left(\bar{y} \wedge (y \vee \bar{x})\right) \vee \bar{x}$ эквивалентны. Для этого построим таблицу истинности и убедимся, что логические значения формул на любом наборе значений входящих в формулы пропозициональных переменных совпадают.

0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1

Пример

Покажем, что формулы $F = \bar{x}$ и $G = \left(\bar{y} \wedge (y \vee \bar{x})\right)$ не эквивалентны.

Пример

Покажем, что формулы $F = \bar{x}$ и $G = \left(\bar{y} \wedge (y \vee \bar{x})\right)$не эквивалентны.

Решение

Построим таблицу истинности

0	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	1	0	1	0

По таблице истинности видно, что существуют наборы, на которых логические значения формул не совпадают.

Классы логических формул

- Формула F называется *тождественно истинной (тавтологией)*, если для любой интерпретации φ выполняется равенство $\varphi(F) = 1$.

Например, формула $F = X \wedge Y \rightarrow X$является тождественно истинной:

0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

А формула $F = X \leftrightarrow (X \wedge Y)$ не является тождественно истинной:

0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Классы логических формул

- Формула F называется *тождественно ложной (противоречивой)*, если для любой интерпретации φ выполняется равенство $\varphi(F) = 0$.

Классы логических формул

Докажем тождественную ложность формулы $F = X \wedge \overline{(Y \rightarrow X)}$ методом подстановки значений переменных (Hint: F(X,Y))

Классы логических формул

Докажем тождественную ложность формулы $F = X \wedge \overline{(Y \rightarrow X)}$ методом подстановки значений переменных

Доказательство:

$$F(0{,}0) = 0 \wedge \overline{(0 \rightarrow 0)} = 0;$$

$$F(0{,}1) = 0 \wedge \overline{(1 \rightarrow 0)} = 0;$$

$$F(1{,}0) = 1 \wedge \overline{(0 \rightarrow 1)} = 0;$$

$$F(1{,}1) = 1 \wedge \overline{(1 \rightarrow 1)} = 0.$$

При любых значениях пропозициональных переменных формула равна 0. Это означает, что формула F тождественно ложна (противоречива).

Классы логических формул

Формула F называется ***выполнимой (опровержимой),*** если существует интерпретация, при которой формула F истинна (ложна). Эта терминология применима также к множествам формул: множество Q формул ***выполнимо,*** если существует интерпретация, при которой истинны все формулы Q.

Классы логических формул

Пример

Формула $F = \bar{X} \to (Y \to X)$ выполнима, так как, например $F(0,0) = \bar{0} \to (0 \to 0) = 1 \to 1 = 1$. Но данная формула не является тавтологией, так как $F(0,1) = \bar{0} \to (1 \to 0) = 1 \to 0 = 0$.

Пример

Формула $F = \bar{X} \to (Y \to X)$ выполнима, так как существуют наборы, на которых она равна 0, но данная формула не является тавтологией, так как на наборе (0, 1) она равна 1.

0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Классы логических формул

- *Признак равносильности формул*: две формулы F и G равносильны тогда и только тогда, когда формула $F \leftrightarrow G$ является тавтологией.

Пример

Формула $F = X \to Y$ и $F = \bar{Y} \to \bar{X}$ равносильны, так как формула $X \to Y \leftrightarrow \bar{Y} \to \bar{X}$ является тавтологией.

0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Классы логических формул

Пример

Формула $F = X \to Y$ и $F = \bar{Y} \to \bar{X}$ равносильны, так как формула $X \to Y \leftrightarrow \bar{Y} \to \bar{X}$ является тавтологией.

Классы логических формул

Пример

Формула $F = X \to Y$ и $F = \bar{Y} \to \bar{X}$ равносильны, так как формула $X \to Y \leftrightarrow \bar{Y} \to \bar{X}$ является тавтологией.

Решение:

0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Законы алгебры логики

Булевой алгеброй, или **алгеброй логики**, называется множество всех логических функций с ***булевыми операциями***: дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Булевы операции подчиняются следующим законам:

1. Ассоциативный закон:

а) $x(yz) = (xy)z$;

б) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

2. Коммутативный закон:

а) $xy = yx$;

б) $x \vee y = y \vee x$.

3. Дистрибутивный (распределительный) закон:

а) $x(y \vee z) = xy \vee xz$;

б) $x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z)$.

4. Закон идемпотентности:

а) $xx = x$;

б) $x \vee x = x$.

5. Двойное отрицание: $\bar{\bar{x}} = x$.

6. Свойства констант:

а) $x \wedge 1 = x$; б) $x \wedge 0 = 0$;

в) $x \vee 1 = 1$; г) $x \vee 0 = x$;

д) $\bar{1} = 0$; е) $\bar{0} = 1$.

7. Закон противоречия: $x\bar{x} = 0$.

8. Закон исключения третьего: $x \vee \bar{x} = 1$

9. Законы де Моргана:

а) $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$;

б) $\overline{x \vee y} = \bar{x}\bar{y}$.

Правила упрощения булевых функций

Знание законов алгебры высказываний позволяет выполнять эквивалентные преобразования любых логических формул, т. е. такие преобразования, которые сохраняют значения логических функций для любых наборов независимых переменных.

Правила упрощения булевых функций

Правила, применяемые для упрощения логических функций

Правило поглощения:

а) ;

б) .

Правило склеивания:

.

Правило раскрепощения (обратное к склеиванию):

.

Обобщенное склеивание:

.

Удаление отрицания:

.

Правила упрощения булевых функций

Алгоритм упрощения булевой функции

Перейти в систему булевых операций (конъюнкция, дизъюнкция и отрицание).

С помощью закона де Моргана опустить все отрицания до элементарных переменных и удалить двойные отрицания по закону двойного отрицания.

Применить законы идемпотентности и противоречия, сократить лишние конъюнкции (дизъюнкции) и повторения переменных в конъюнкциях (дизъюнкциях).

Упростить выражение, удалив все константы, применяя свойства констант

Пример

Необходимо упростить выражение $F = (F_1 \to F_2) \to \big((F_2 \to F_3) \to (F_1 \lor F_2 \to F_3)\big)$.

Пример

Необходимо упростить выражение $F = (F_1 \to F_2) \to \big((F_2 \to F_3) \to (F_1 \vee F_2 \to F_3)\big)$.

Решение

1. Удалить всюду логическую связку «→» (перейти к булевым операциям):

$$F = \left(\overline{\overline{F_1} \vee F_2}\right) \vee \left(\left(\overline{\overline{F_2} \vee F_3}\right) \vee \left(\overline{F_1 \vee F_2} \vee F_3\right)\right).$$

2. Опустить отрицание на элементарные формулы по закону де Моргана и удалить двойные отрицания по закону двойного отрицания: $F = (F_1 \wedge \overline{F_2}) \vee (F_2 \wedge \overline{F_3}) \vee (\overline{F_1} \wedge \overline{F_2}) \vee F_3$.

3. Выполнить преобразование по закону дистрибутивности: $F = ((F_1 \vee \overline{F_1}) \wedge \overline{F_2}) \vee (F_2 \wedge \overline{F_3}) \vee F_3$.

4. По закону исключения третьего удалить элемент $(F_1 \vee \overline{F_1})$: $F = \overline{F_2} \vee (F_2 \wedge \overline{F_3}) \vee F_3$.

5. Выполнить преобразование по закону дистрибутивности: $F = \overline{F_2} \vee (F_2 \vee F_3) \wedge (\overline{F_3} \vee F_3)$.

6. По закону исключения третьего удалить элемент $(\overline{F_3} \vee F_3)$: $F = \overline{F_2} \vee (F_2 \vee F_3)$.

7. Применить закон ассоциативности: $F = (\overline{F_2} \vee F_2) \vee F_3)$

8. Применить закон исключения третьего: $F = 1 \vee F_3$.

9. Приравнять «истине» значение формулы F согласно закону преобразования выражений с константами.

Нормальные формы формул алгебры логики
Дизъюнктивная нормальная форма

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) формулы есть формула, равносильная формуле исходной логической функции и записанная в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций, построенных на пропозициональных переменных, т. е.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K_1} \vee \boldsymbol{K_2} \vee \boldsymbol{K_3} \vee \ldots,$$

где $\boldsymbol{K_i} = (A \wedge B \wedge C \wedge \ldots)$.

Элементарной конъюнкцией, или ***конъюнктивным одночленом*** от переменных *A*, *B*, *C*, … называется конъюнкция каких-либо из этих переменных или их отрицаний.

В элементарной конъюнкции нет двух одинаковых пропозициональных переменных, так как по закону идемпотентности $F \wedge F = F$.

В ДНФ нет двух одинаковых элементарных конъюнкций, так как по закону идемпотентности $F \vee F = F$.

Если одна из элементарных конъюнкций содержит F и $\overline{F}$, то элементарную конъюнкцию следует удалить, так как $F \wedge \overline{F} = 0$.

Нормальные формы формул алгебры логики
Конъюнктивная нормальная форма

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) формулы есть формула, равносильная формуле исходной логической функции и записанная в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций, построенных на пропозициональных переменных, т. е.

$$\boldsymbol{F = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \wedge \ldots,}$$

где $\boldsymbol{D_i} = (A \vee B \vee C \vee \ldots)$.

Элементарной дизъюнкцией, или *дизъюнктивным одночленом* от переменных A, B, C, … называется дизъюнкция каких-либо из этих переменных или их отрицаний.

В элементарной дизъюнкции нет двух одинаковых пропозициональных переменных, так как по закону идемпотентности $F \vee F = F$.

В КНФ нет двух одинаковых элементарных дизъюнкций, так как по закону идемпотентности $F \wedge F = F$.

Если одна из элементарных дизъюнкций содержит F и $\bar{F}$, то элементарную дизъюнкцию следует удалить, так как $F \vee \bar{F} = 1$.

Алгоритм приведения к нормальной форме

Шаг 1. Устранить логические связки «$\rightarrow$» и «$\leftrightarrow$» всюду по правилам:

1) $F_1 \leftrightarrow F_2 \equiv (F_1 \rightarrow F_2)(F_2 \rightarrow F_1) \equiv (\overline{F_1} \vee F_2)(\overline{F_2} \vee F_1) \equiv \overline{F_1}\,\overline{F_2} \vee F_1 F_2$;

2) $F_1 \rightarrow F_2 \equiv \overline{F_1} \vee F_2 \equiv \left(\overline{F_1 \overline{F_2}}\right)$.

Шаг 2. Продвинуть отрицание до элементарной формулы (пропозициональной переменной) по законам де Моргана и двойного отрицания.

Шаг 3. Применить закон дистрибутивности:

для КНФ – $F_1 \vee (F_2 F_3) \equiv (F_1 \vee F_2)(F_1 \vee F_3)$;

для ДНФ – $F_1(F_2 \vee F_3) \equiv F_1 F_2 \vee F_1 F_3$.

Пример

Дана формула $F = ((\overline{F_1 \wedge F_2}) \wedge (F_1 \vee F_2))$. Необходимо привести формулу к виду ДНФ.

Пример

Дана формула $F = ((\overline{F_1 \wedge F_2}) \wedge (F_1 \vee F_2))$. Необходимо привести формулу к виду ДНФ.

Решение

1. Применить закон де Моргана:

$$F = (\overline{F_1} \vee \overline{F_2}) \wedge (F_1 \vee F_2).$$

2. Применить закон дистрибутивности:

$$F = ((\overline{F_1} \vee \overline{F_2}) \wedge F_1) \vee ((\overline{F_1} \vee \overline{F_2}) \wedge F_2).$$

3. Применить закон дистрибутивности:

$$F = (\overline{F_1} \wedge F_1) \vee (\overline{F_2} \wedge F_1) \vee (\overline{F_1} \wedge F_2) \vee (\overline{F_2} \wedge F_2).$$

4. Применить закон исключения третьего:

$$F = (\overline{F_2} \wedge F_1) \vee (\overline{F_1} \wedge F_2).$$

Пример

Дана формула

$$F = ((A \to B) \to (C \to A)) \to (\bar{B} \to \bar{C})$$

Необходимо привести формулу к виду КНФ и ДНФ.

Пример

Дана формула $F = ((A \to B) \to (C \to A)) \to (\bar{B} \to \bar{C})$. Необходимо привести формулу к виду КНФ и ДНФ.

Решение

1. Устранить «→»: $F = \overline{(\overline{(\bar{A} \vee B)} \vee (\bar{C} \vee A))} \vee (\bar{\bar{B}} \vee \bar{C})$.

2. Продвинуть отрицание до элементарной формулы : $F = \big((\bar{A} \vee B) \wedge (C \wedge \bar{A})\big) \vee (B \vee \bar{C})$.

3. Применить закон дистрибутивности: $F = (\bar{A} \vee B \vee B \vee \bar{C}) \wedge (C \wedge \bar{A} \vee B \vee \bar{C})$.

4. Применить закон идемпотентности: $F = (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (C \wedge \bar{A} \vee B \vee \bar{C})$.

5. Применить закон дистрибутивности: $F = (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (C \vee B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee B \vee \bar{C})$.

6. Применить закон идемпотентности: $F = (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (C \vee B \vee \bar{C})$

7. Применить закон исключения третьего: $F = (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (B \vee 1)$

8. Удалить константы по свойствам констант: $F = (\bar{A} \vee B \vee \bar{C})$

Данная формула одновременно является ДНФ и КНФ формулы.

Пример

Необходимо упростить выражение $F = (F_1 \to F_2) \to \left((F_2 \to F_3) \to (F_1 \vee F_2 \to F_3)\right)$.

Пример

Необходимо упростить выражение $F = (F_1 \to F_2) \to \big((F_2 \to F_3) \to (F_1 \ \vee F_2 \to F_3)\big)$.

Решение

1. Удалить всюду логическую связку «→» (перейти к булевым операциям):

$$F = (\overline{\overline{F_1} \vee F_2}) \vee \Big((\overline{\overline{F_2} \vee F_3}) \vee (\overline{F_1 \ \vee F_2} \vee F_3)\Big).$$

2. Опустить отрицание на элементарные формулы по закону де Моргана и удалить двойные отрицания по закону двойного отрицания: $F = (F_1 \wedge \overline{F_2}) \vee (F_2 \wedge \overline{F_3}) \vee (\overline{F_1} \wedge \overline{F_2}) \vee F_3$.

3. Выполнить преобразование по закону дистрибутивности: $F = ((F_1 \vee \overline{F_1}) \wedge \overline{F_2}) \vee (F_2 \wedge \overline{F_3}) \vee F_3$.

4. По закону исключения третьего удалить элемент $(F_1 \vee \overline{F_1})$: $F = \overline{F_2} \vee (F_2 \wedge \overline{F_3}) \vee F_3$.

5. Выполнить преобразование по закону дистрибутивности: $F = \overline{F_2} \vee (F_2 \vee F_3) \wedge (\overline{F_3} \vee F_3)$.

6. По закону исключения третьего удалить элемент $(\overline{F_3} \vee F_3)$: $F = \overline{F_2} \vee (F_2 \vee F_3)$.

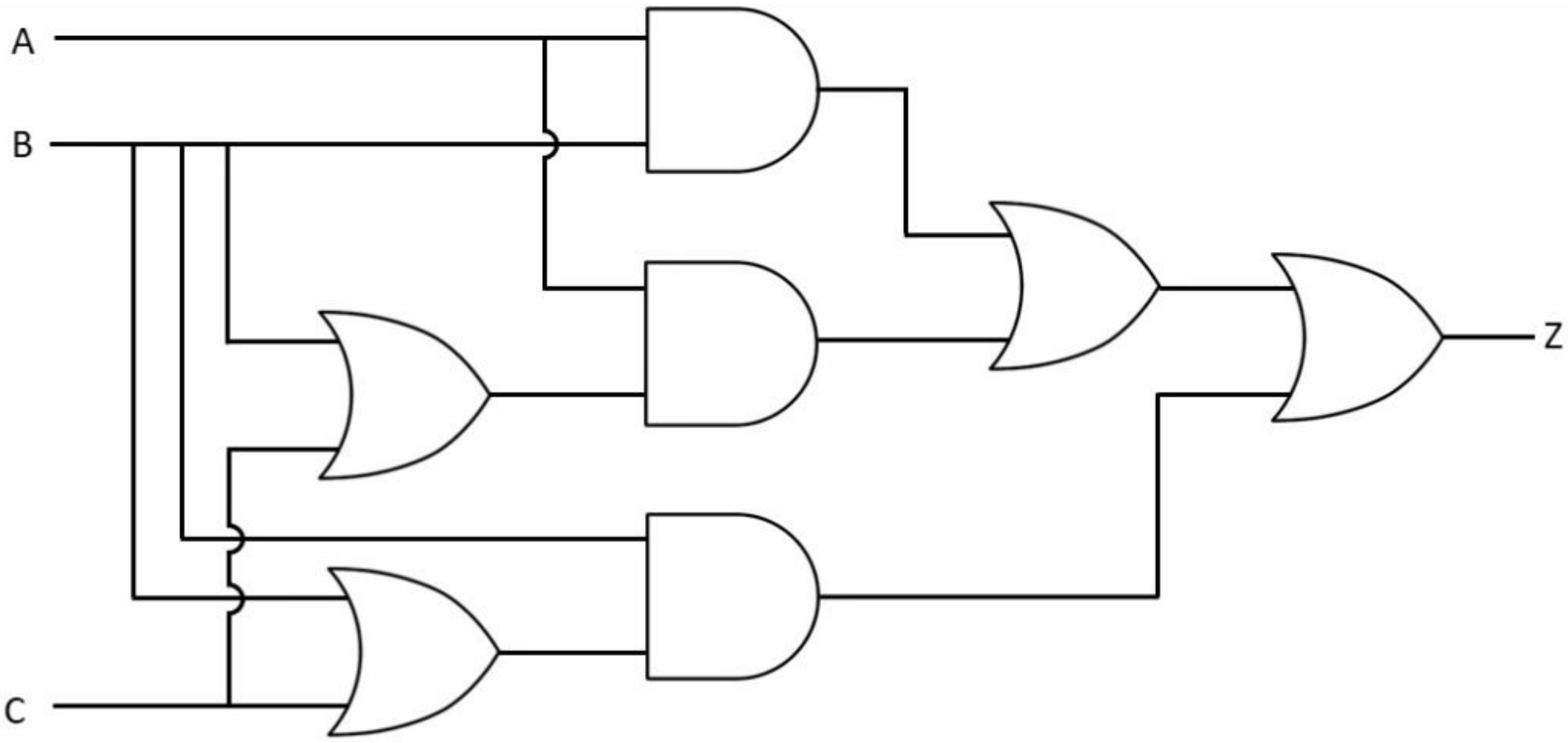
7. Применить закон ассоциативности: $F = (\overline{F_2} \vee F_2) \vee F_3)$

8. Применить закон исключения третьего: $F = 1 \vee F_3$.

9. Приравнять «истине» значение формулы F согласно закону преобразования выражений с константами.

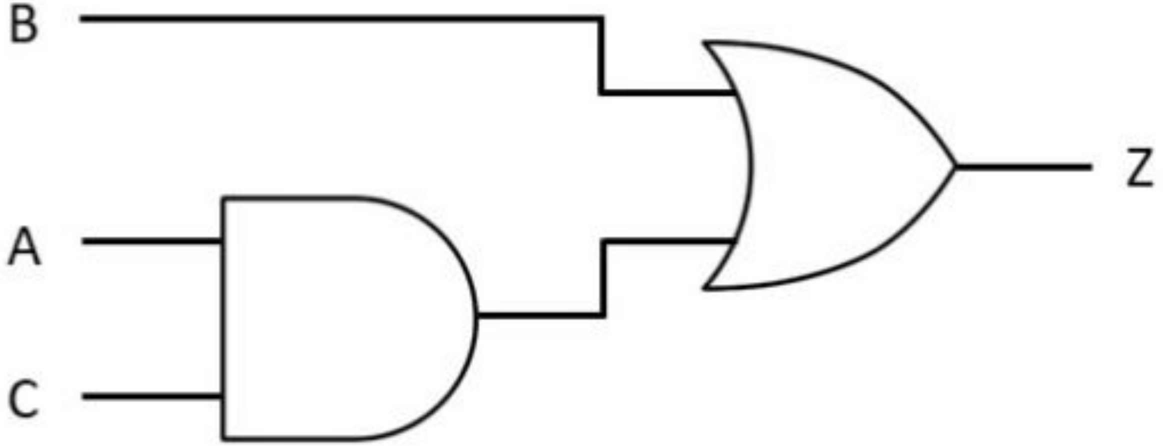
Практический пример

- $Z = A \wedge B \vee A \wedge (B \vee C) \vee B \wedge (B \vee C)$



- $$Z = A \wedge B \vee B \wedge (B \vee C) \vee B \wedge (B \vee C) =$$
$$= A \wedge B \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge B) \vee (B \wedge C) =$$
$$= A \wedge B \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee B \vee (B \wedge C) =$$
$$= (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee B \vee (B \wedge C) =$$
$$= (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee B =$$
$$= (A \wedge C) \vee B$$

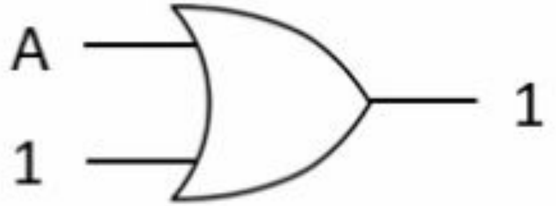
A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



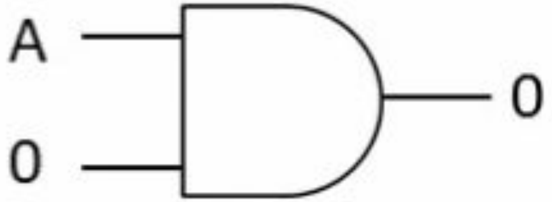
$Z = (A \wedge C) \vee B$

Annulment

$A \lor 1 = 1$

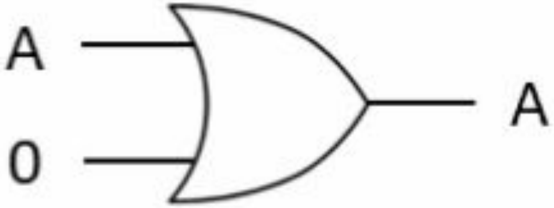


$A \land 0 = 0$

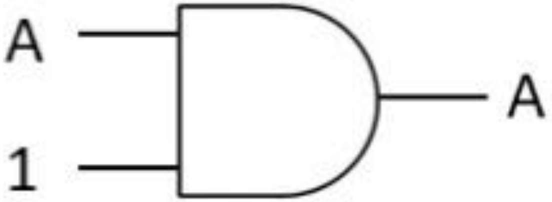


Identity

$A \lor 0 = A$

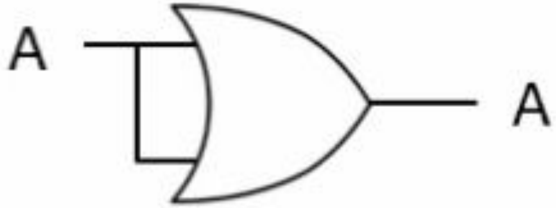


$A \land 1 = A$

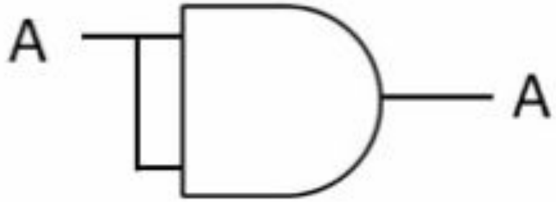


Idempotent

$A \lor A = A$

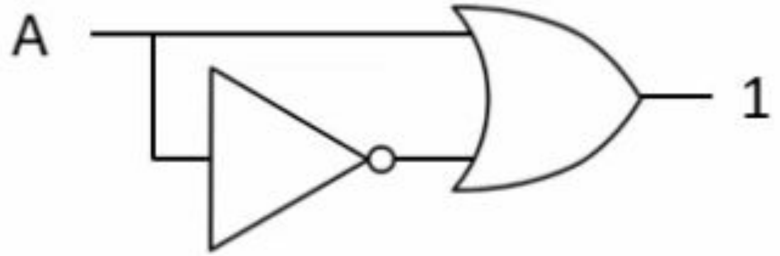


$A \land A = A$

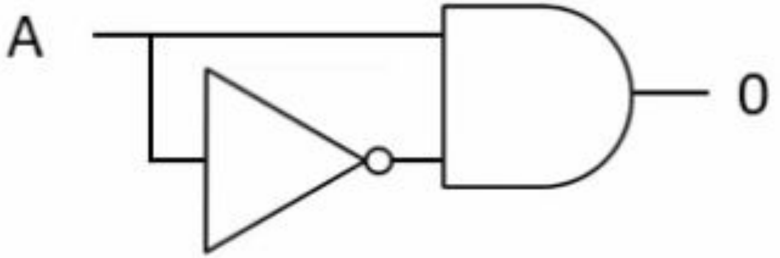


Complement

$A \lor \neg A = 1$

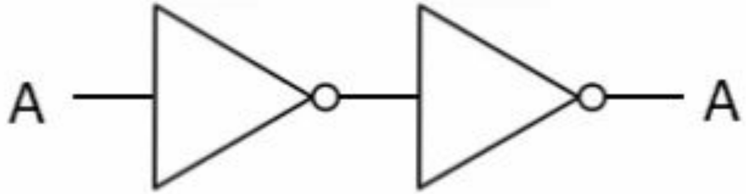


$A \land \neg A = 0$



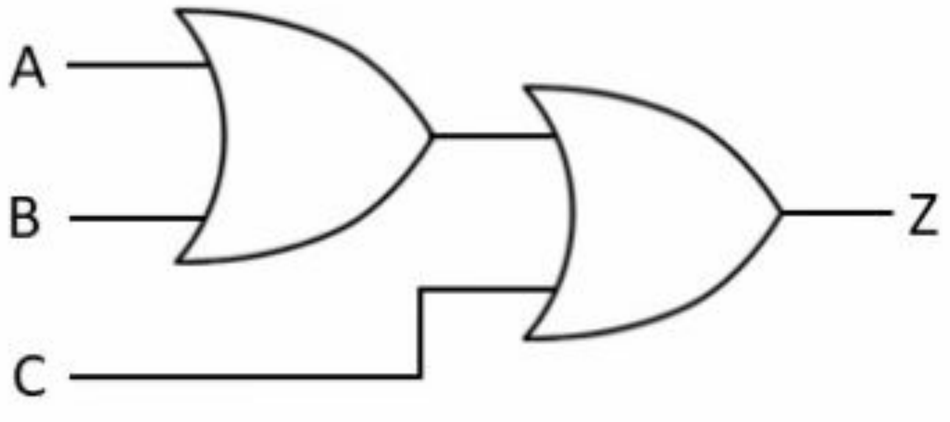
Double Negation

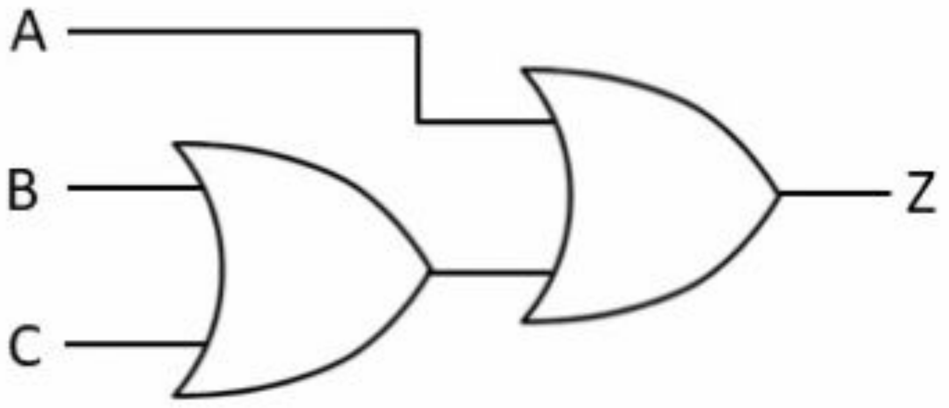
$\neg(\neg A) = A$



Associative

$(A \lor B) \lor C = A \lor (B \lor C)$





Associative

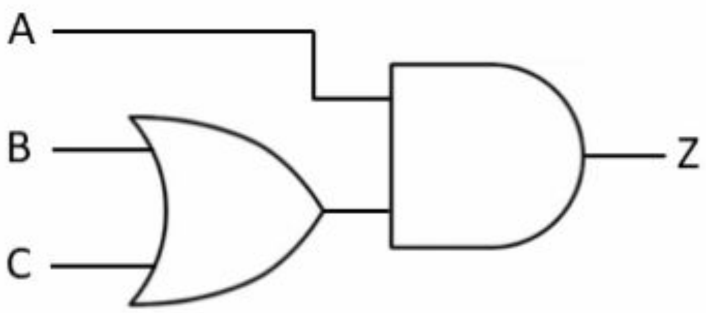
$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

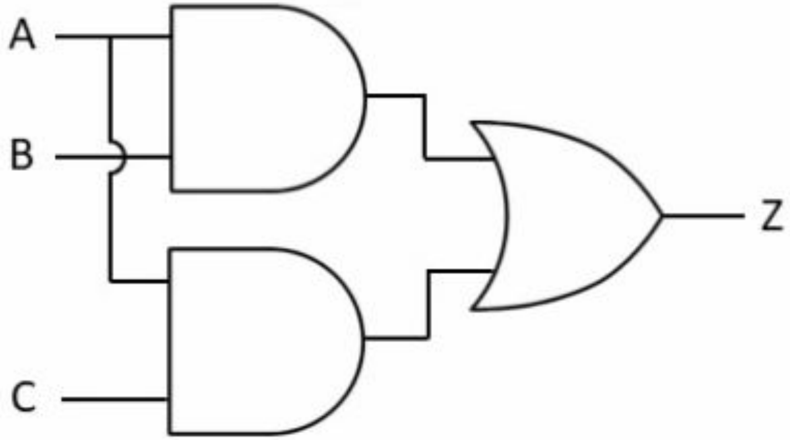
$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

Commutative

$A \vee B = B \vee A$

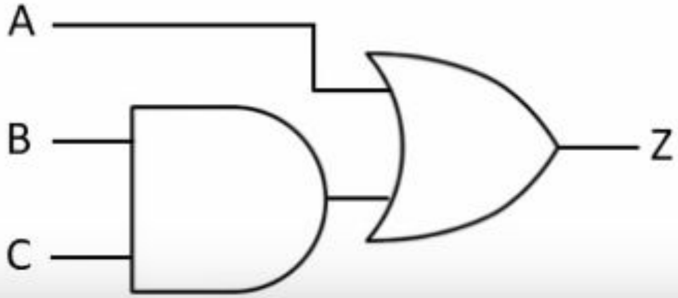
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

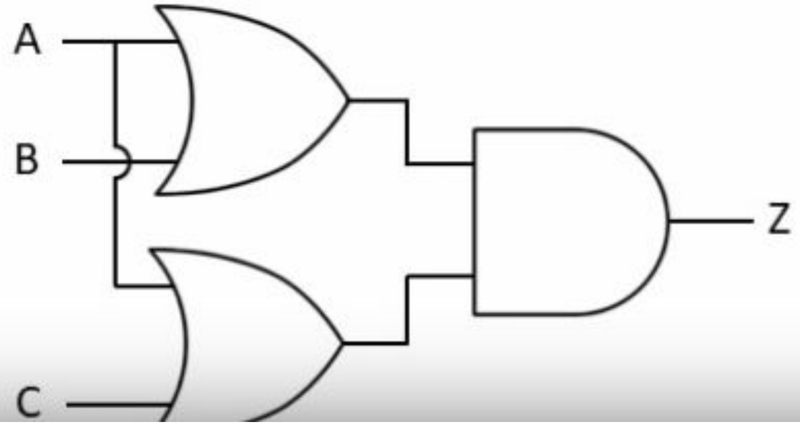




A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

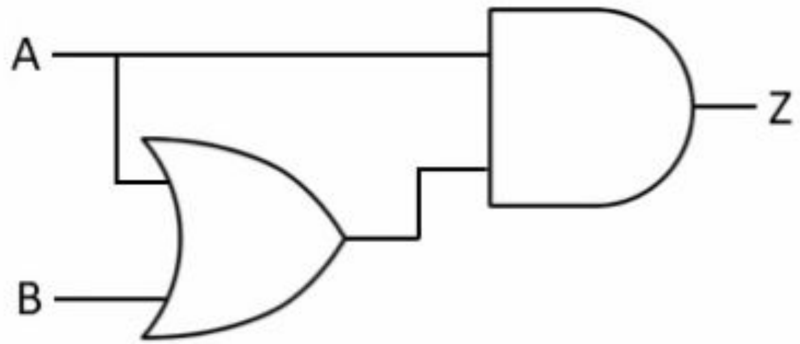
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$





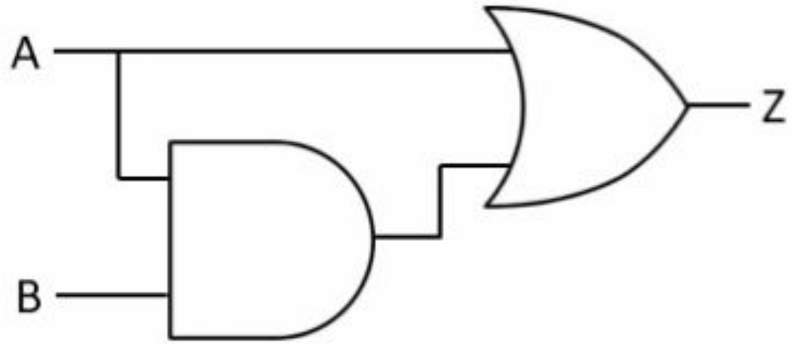
A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$A \land (A \lor B) = A$



A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$A \lor (A \land B) = A$



A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Теорема об эквивалентной формуле с тесными отрицаниями

Для любой ППФ алгебры высказываний существует эквивалентная ей формула с тесными отрицаниями.

Теорема об эквивалентной формуле с тесными отрицаниями

Доказательство:

Доказательство индукцией по числу логических связок, входящих в ППФ A.

n = 0 (A - пропозициональная переменная), теорема верна.

n = 1, A имеет одну из следующих форм: $\neg a$, $(a \wedge b)$, $(a \vee b)$, $(a \to b)$

В первых трех случаях утверждение теоремы, очевидно, верно.

В последнем случае по эквивалентности (таблицы основных эквивалентностей) имеем $(a \to b) \equiv (\neg a \vee b)$.

Теорема об эквивалентной формуле с тесными отрицаниями

Доказательство:

$n \leq N, N \in \mathbb{N}$

$n = N + 1$. ППФ A с $N + 1$ связкой может быть получена, лишь в виде

$A \equiv \neg B$, либо $A \equiv (B \wedge C)$, либо $A \equiv (B \vee C)$, либо $A \equiv (B \rightarrow C)$, где B, C- п.п. имеющие каждая не более N связок и, согласно предположению индукции, имеющие каждая эквивалентную формулу с тесными отрицаниями.

Если $A \equiv (B \wedge C)$, либо $A \equiv (B \vee C)$, то утверждение теоремы, очевидно, верно.

Теорема об эквивалентной формуле с тесными отрицаниями

Доказательство:

Если $A \equiv \neg B$, то возможны следующие случаи:

1. $B \equiv \neg D$, тогда $A = \neg\neg D \equiv D$, где Dсодержит не более чем N связок, и, таким образом, утверждение теоремы верно в силу предположения индукции.
2. $B \equiv (D \wedge R)$, тогда $A \equiv \neg(D \wedge R) \equiv (\neg D \vee \neg R)$, где $\neg D$ и $\neg R$ содержат каждая не более чем N связок, и, таким образом, утверждение теоремы верно и в этом случае.
3. $B \equiv (D \vee R)$, тогда $A \equiv \neg(D \vee R) \equiv (\neg D \wedge \neg R)$, где $\neg D$ и $\neg R$ содержат каждая не более чем N связок, и, таким образом, утверждение теоремы верно и в этом случае.
4. $B \equiv (D \rightarrow R)$, тогда $A \equiv \neg(D \rightarrow R) \equiv (\neg D \wedge \neg R)$, где D и $\neg R$ содержат каждая не более чем N связок, и, таким образом, утверждение теоремы верно и в этом случае.

Теорема об эквивалентной формуле с тесными отрицаниями

Доказательство:

Таким образом, утверждение теоремы доказано в случае $A \equiv \neg B$. Если, наконец, $A \equiv (B \rightarrow C)$, то $A \equiv (\neg B \vee C)$, где B и C содержат каждая не более чем N связок. Заметим, что возможен случай, когда $\neg B$ содержит $N + 1$связку (тогда C - пропозициональная переменная), но, согласно предыдущему рассмотренному случаю, $A \equiv \neg B$ имеет эквивалентную формулу с тесными отрицаниями. Формула C имеет эквивалентную формулу с тесными отрицаниями согласно предположению индукции. Следовательно, утверждение теоремы верно и в этом случае. Таким образом, утверждение теоремы доказано полностью.

Теорема о существовании эквивалентной ДНФ

Для любой ППФ АВ существует эквивалентная ей ДНФ.

Доказательство. Согласно теореме об эквивалентной формуле с тесными отрицаниями, для любой ППФ АВ существует эквивалентная ей формула с тесными отрицаниями. Поэтому теорема о существовании эквивалентной ДНФ будет доказана, если будет доказано существование эквивалентной ДНФ для любой формулы с тесными отрицаниями.

Теорема о существовании эквивалентной КНФ

Для любой ППФ АВ существует эквивалентная ей КНФ.

Теорема о виде тождественно ложной ДНФ

Если A – тождественно ложная ДНФ, то любая ее элементарная конъюнкция содержит некоторую пропозициональную переменную вместе с тесным отрицанием этой же пропозициональной переменной

Правила получения тавтологий

- Правило заключения (modus ponens)
- Правило подстановки

Правило заключения (modus ponens)

Также называется правилом отделения

Теорема: Если формулы F и $F \to H$ являются тавтологиями, то формула H так же тавтология.

$$\text{из } \vDash F, \text{ и } \vDash F \to H \text{ следует } \vDash H$$

Правило заключения (modus ponens)

- Доказательство:

Пусть ⊨ F($X_1, \dots, X_n$), ⊨ F($X_1, \dots, X_n$)→H($X_1, \dots, X_n$)

Допустим, что H($X_1, \dots, X_n$) не является тавтологией, что означает ∃ высказывания $A_1, \dots, A_n$, такие что f(H($X_1, \dots, X_n$)) $= 0$

Но F($X_1, \dots, X_n$) – тавтология, $A_1, \dots, A_n$, такие что f(F($A_1, \dots, A_n$)) $= 1$

$\mathrm{f}(\mathrm{F}(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{n}) \rightarrow \mathrm{H}(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{n})) = \mathrm{f}(\mathrm{F}(A_1, \dots, A_n)) \rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{H}(A_1, \dots, A_n)) = 1 \rightarrow 0 = 0$, противоречит ТИ формулы $\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{H}$.

Следовательно, предположение неверно.

Тогда ⊨ H

Правило подстановки

- Пусть в формуле F содержится ПП X (а, возможно, и другие ПП), и H – любая формула.

Если в формулу F вместо символа X, везде, где он входит в F, вставить формулу H, то получим новую формулу

$$\boldsymbol{S_X^H F}$$

$$\text{формула, полученная из } \boldsymbol{F} \text{ в результате подстановки в неё формулы } \boldsymbol{H} \text{ вместо ПП } \boldsymbol{X}$$

Пример:

$$((X \vee Y) \longrightarrow (X \wedge \neg Y)),$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{Y}}^{(\boldsymbol{X}_1 \wedge \boldsymbol{X}_2)}((X \vee Y) \longrightarrow (X \wedge \neg Y)) = ((X \vee (\boldsymbol{X}_1 \wedge \boldsymbol{X}_2)) \longrightarrow (X \wedge \neg (\boldsymbol{X}_1 \wedge \boldsymbol{X}_2)),$$

Алфавит - любое непустое не более чем счетное множество, элементы которого будем называть символами (буквами).

Слово (цепочка) в данном алфавите – произвольная конечная последовательность символов данного алфавита; эта последовательность может не содержать ни одного символа (пустое слово).

Произведением (конкатенацией) слов α и β назовем слово $\alpha\beta$. Если $\alpha=\beta\gamma\delta$, то $\beta\gamma\delta$ - **подслова (подцепочки)** слова α.

Алфавит - любое непустое не более чем счетное множество, элементы которого будем называть символами (буквами).

Слово (цепочка) в данном алфавите – произвольная конечная последовательность символов данного алфавита; эта последовательность может не содержать ни одного символа (пустое слово).

Произведением (конкатенацией) слов α и β назовем слово αβ. Если α=βγδ, то βγδ - **подслова (подцепочки)** слова α.

Результат замены данного вхождения подслова γ в слове βγδ на слово – с лово βδ.

Результат подстановки Saβαв слово α вместо символаасловаβ- слово, полученное изαодновременной заменой всех вхожденийсимволаана словоβ.Введем в рассмотрение алфавит, состоящий из следующихтрех множеств символов:

Совершенные нормальные формулы

Основные способы задания булевых функций:

1. Аналитический
2. Истинностные таблицы

Как перейти от ТИ к формуле?

Совершенные нормальные формы

Если каждая элементарная конъюнкция (или элементарная дизъюнкция) формулы содержит символы всех пропозициональных переменных, то такая формула называется ***совершенной.***

Существуют ***совершенные дизъюнктивные нормальные формы*** формулы (СДНФ) и ***совершенные конъюнктивные нормальные формы*** формулы (СКНФ).

СДНФ

ДНФ, в которой каждая элементарная конъюнкция зависит ото всех входящих в нее пропозициональных переменных и каждая переменная входит в каждую элементарную конъюнкцию ровно один раз, называется

совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ).

СКНФ

КНФ, в которой каждая элементарная дизъюнкция зависит от всех входящих в нее пропозициональных переменных и каждая переменная входит в каждую элементарную дизъюнкцию ровно один раз, называется

совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)

Совершенные нормальные формы
Алгоритм преобразования ДНФ к виду СДНФ

Шаг 1. Если в элементарную конъюнкцию *F* не входит подформула F_i и $\overline{F}_i$, то дополнить элементарную конъюнкцию высказыванием $F_i \vee \overline{F}_i$ и выполнить преобразование формулы по закону дистрибутивности:

$$\boldsymbol{F(F_i \vee \overline{F_i}) = FF_i \vee F\overline{F}_i} \,.$$

При этом знак конъюнкции в формулах можно опускать, т. е. запись F_1F_2 соответствует записи $F_1 \wedge F_2$, или $F_1 \cdot F_2$.

Шаг 2. Если в элементарную конъюнкцию *F* не входит подформула F_j или $\overline{F}_j$, то повторить шаг 1.

Шаг 3. Упрощаем полученную формулу, используя равносильности:

$$F \wedge F = F; \quad F \vee F = F.$$

Совершенные нормальные формы

Пример

Необходимо привести формулу $F = F_1 \overline{F_2} \vee F_1 \overline{F_3} F_4 \vee F_1 F_2 F_3 \overline{F_4}$ к виду СДНФ.

Совершенные нормальные формы

Пример

Необходимо привести формулу $F = F_1\,\overline{F_2} \vee F_1\,\overline{F_3}\,F_4 \vee F_1F_2F_3\overline{F_4}$ к виду СДНФ.

Решение

1. $F = F_1\,\overline{F_2}\,(F_3 \vee \overline{F_3}) \vee F_1\,\overline{F_3}\,F_4(F_2 \vee \overline{F_2}) \vee F_1F_2F_3\overline{F_4}$.

2. $F = F_1\,\overline{F_2}\,F_3 \vee F_1\,\overline{F_2}\,\overline{F_3} \vee F_1\,F_2\overline{F_3}\,F_4 \vee F_1\,\overline{F_2}\,\overline{F_3}\,F_4 \vee F_1\,F_2F_3\overline{F_4}$.

3. $F = F_1\,\overline{F_2}\,F_3\,(F_4 \vee \overline{F_4}) \vee F_1\,\overline{F_2}\,\overline{F_3}(F_4 \vee \overline{F_4}) \vee F_1\,F_2\overline{F_3}\,F_4 \vee F_1\,\overline{F_2}\,\overline{F_3}\,F_4 \vee F_1\,F_2F_3\overline{F_4}$.

4. $F = F_1\,\overline{F_2}\,F_3\,F_4 \vee F_1\,\overline{F_2}\,F_3\overline{F_4} \vee F_1\,\overline{F_2}\,\overline{F_3}F_4 \vee F_1\,\overline{F_2}\,\overline{F_3}\overline{F_4} \vee F_1\,F_2\overline{F_3}\,F_4 \vee F_1\,\overline{F_2}\,\overline{F_3}$
$F_4 \vee F_1\,F_2F_3\overline{F_4}$.

5. $F = F_1\,\overline{F_2}\,F_3\,F_4 \vee F_1\,\overline{F_2}\,F_3\overline{F_4} \vee F_1\,\overline{F_2}\,\overline{F_3}F_4 \vee F_1\,\overline{F_2}\,\overline{F_3}\overline{F_4} \vee F_1\,F_2\overline{F_3}\,F_4 \vee F_1\,F_2F_3\overline{F_4}$.

Совершенные нормальные формы
Алгоритм преобразования КНФ к виду СКНФ

Шаг 1. Если в элементарную дизъюнкцию F не входит подформула F_i и $\overline{F_i}$, то дополнить элементарную дизъюнкцию высказыванием $F_i \quad \overline{F_i}$ и выполнить преобразование формулы по закону дистрибутивности:

$$F \vee F_i\,\overline{F_i} = (F \vee F_i)\,(F \vee \overline{F_i}).$$

При этом знак конъюнкции в формулах можно опускать, т. е. запись F_1F_2 соответствует записи $F_1 \wedge F_2$, или $F_1 \cdot F_2$.

Шаг 2. Если в элементарную дизъюнкцию F не входит подформула F_j или $\overline{F_j}$, то повторить шаг 1.

Шаг 3. Упрощаем полученную формулу, используя равносильности:

$$F \wedge F = F; \quad F \vee F = F.$$

Совершенные нормальные формы

Пример

Необходимо привести формулу $F = (F_1 \vee F_2)\,(\overline{F_1} \vee \overline{F_2} \vee F_3)$ к виду СКНФ.

Совершенные нормальные формы

Пример

Необходимо привести формулу $F = (F_1 \vee F_2)\ (\overline{F_1} \vee \overline{F_2} \vee F_3)$ к виду СКНФ.

Решение

$$F = (F_1 \vee F_2 \vee F_3\ \overline{F_3})\ (\overline{F_1} \vee \overline{F_2} \vee F_3)$$

$$F = (F_1 \vee F_2 \vee F_3)(F_1 \vee F_2 \vee \overline{F_3})\ (\overline{F_1} \vee \overline{F_2} \vee F_3)$$

Совершенные нормальные формы. Таблицы истинности

<u>Элементарные конъюнкции СДНФ</u> формируются для значений формулы 1. Число элементарных конъюнкций равно числу истинных значений формулы. Пропозициональные переменные, входящие в элементарную конъюнкцию, записываются без изменений, если их значение равно 1, и с логической связкой отрицание – если их значение равно 0.

СДНФ для всякой логической функции единственна. Для тождественно ложной функции СДНФ не существует.

<u>Элементарные дизъюнкции СКНФ</u> формируются для значений формулы 0. Число элементарных дизъюнкций равно числу ложных значений формулы. Пропозициональные переменные, входящие в элементарную дизъюнкцию, записываются без изменений, если их значение равно 0, и с логической связкой отрицание – если их значение равно 1.

СКНФ для всякой логической функции единственна. Для тождественно истинной функции СКНФ не существует.

Совершенные нормальные формы. Таблицы истинности

Пример:

Необходимо записать СДНФ и СКНФ для функции, заданной таблицей истинности.

	B	*C*	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Совершенные нормальные формы. Таблицы истинности

Пример:

Необходимо записать СДНФ и СКНФ для функции, заданной таблицей истинности.

	B	C	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Формула СДНФ имеет вид:

$$F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}BC \vee A\bar{B}\bar{C} \vee ABC$$

Формула СКНФ имеет вид:

$$F(A,B,C) = (A \vee B \vee \bar{C})(A \vee \bar{B} \vee C)\,(\bar{A} \vee B \vee \bar{C})\,(\bar{A} \vee \bar{B} \vee C)$$

Теорема о существовании эквивалентной КНФ

Для любой ППФ АВ существует эквивалентная ей КНФ.

Доказательство: аналогично доказательству теоремы об эквивалентной ДНФ.

Согласно теореме об эквивалентной формуле с тесными отрицаниями, для любой ППФ АВ существует эквивалентная ей формула с тесными отрицаниями. Поэтому теорема о существовании эквивалентной КНФ будет доказана, если будет доказано существование эквивалентной КНФ для любой формулы с тесными отрицаниями.

Теорема о виде тождественно ложной ДНФ

- Доказательство: Доказательство проводится от противного. Предположим, что для некоторой элементарной конъюнкции данной формулы A переменные $a_{1,}a_2, \dots a_k$ входят в эту элементарную конъюнкцию без отрицаний, а (a_{k+1} ,… a_n)- отрицаниями, т.е. ($a_{1,}\wedge a_2\wedge, \dots \wedge a_k\wedge \neg a_{k+1}\wedge \dots \wedge \neg a_n$). Тогда при $a_{1,}$=t, … a_k= t, a_{k+1}= f… a_n = f., имеем $A_1 = t$, и, следовательно $A = t$, что противоречит тому, что – тождественно ложная формула Следовательно, утверждение теоремы верно.

Теорема о виде тождественно истинной КНФ

Теорема (о виде тождественно истинной к.н.ф.): Если A тождественно истинная к.н.ф., то любая элементарная дизъюнкция содержит некоторую пропозициональную переменную вместе с тесным отрицанием этой пропозициональной переменной.

Доказательство. Доказательство проводится вполне аналогично доказательству предыдущей теоремы о виде тождественно ложной ДНФ.

Условия существования с.д.н.ф., с.к.н.ф

Теорема 2. Для любой опровержимой п.п.ф. существует эквивалентная с.к.н.ф. Кроме доказанных теорем 1 и 2, справедливы следуюшие утверждения.

Теорема 3. Для тождественно ложной п.п.ф. не существует эквиваленти ей с.д.н.ф.

Теорема 4. Для тождественно истинной п.п.ф. не существует эквивалентной й с.к.н.ф.

Условия существования с.д.н.ф., с.к.н.ф

- Доказательство: Доказательства теорем 3 и 4 немедленно следуют, соответственно, из теоремы тождественно ложной д.н.ф и тождественно истинной к.н.ф. Решая поставленную задачу, мы научились строить с.д.н.ф. и с.к.н.ф. (при условии их существования) по заданной таблице истинности. Однако, с.д.н.ф. и с.к.н.ф., эквивалентные данной формуле, можно строить и путем проведения эквивалентных преобразований этой формулы. Именно, для приведения п.п.ф. к эквивалентной с.д.н.ф. (с.к.н.ф.) нужно:

- привести данную формулу к эквивалентной д.н.ф. (к.н.ф.);
- дополнить полученную д.н.ф. (к.н.ф.) до с.д.н.ф. (с.к.н.ф.),пользуясь эквивалентностью- $(A \vee \neg A) \equiv T$ (для с.к.н.ф. - эквивалентностью -$(A \wedge \neg A) \equiv F$)

Понятие логического высказывания в АВ

- Высказывание B называется **логическим следствием высказываний** (A_1, A_2,... A_m), в алгебре высказываний, если п.п.ф. принимает значение t) всякий раз, когда все формулы A_1, A_2,... A_m одновременно принимают значение t). Факт такого логического следствия символически будем записывать в виде $A_1, A_2, \ldots A_m \vDash B$

Понятие логического высказывания в АВ

- Пример

Рассмотрим рассуждение: Если температура плавления вещества равна 0°С (высказывание A), а температура вещества равна -20°С (высказывание B), то вещество находится в твердом состоянии (высказывание C)

$((A \wedge B) \rightarrow C)$ – формальная запись приведенного утверждения (сложного высказывания)).

В данном рассуждении - три посылки: $((A \wedge B) \rightarrow C), A)$, заключение C).

Понятие логического высказывания в АВ

Пример

Рассуждение признается правильным, если заключение является **справедливым (истинным)** при справедливости (истинности) посылок. Другими словами, правильное рассуждение должно обеспечивать заключению истинностное значение t всякий раз, когда все посылки имеют истинностное значение t. Проверка этого факта можно осуществить путем построения таблицы истинности всех участвующих в рассуждении формул. Для рассматриваемого случая имеем:

Понятие логического высказывания в АВ

Пример

1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
0	1	1	0
0	0	1	1
0	0	1	0

Непротиворечивые (выполнимые) и противоречивые (невыполнимые) множества посылок

- Множество посылок

$$F = (A_1, \dots A_n)$$

называется **выполнимым**, если существует такой набор значений входящих в него попозициональных переменных, на котором все формулы из F приннимают одновременно значения t. Если такого набора значений попозициональных переменных не существует, то F - **невыполнимо**.

Непротиворечивые (выполнимые) и противоречивые (невыполнимые) множества посылок

- Примеры:

1. Множество $F = \{A, (A \vee B)\}$ выполнимо, так как, например, при $A = t, B = f$ имеем $\{A = t, (A \vee B) \ = t\}$).

2. Множество $F = \{A, (\neg A \wedge B)\}$ невыполнимо, так как если $A = t$, то при любом значении B имеем $\{A = t, (\neg A \wedge B) \ = f\}$, а если $A = f$, то при $B = t$ имеем $\{A = f, (\neg A \wedge B) \ = t\}$, а при $B = f$ имеем $\{A = f, (\neg A \wedge B) \ = f\}$; таким образом, формулы из F никогда одновременно не принимают значения t.

Установление факта логического следствия из данного множества посылок

Замечание 1.

Запись$\vDash B$ означает тождественную истинность формулы B.

Замечание 2.

Высказывание B не является логическим следствием высказываний $A_1, A_2, \dots A_n$, в том случае, когда $B = F$ при условии $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = t$. Если F - невыполнимо, то $F \vDash B$ при любом B. Это видно из сведения логического следствия с учетом замечания 2.

Установление факта логического следствия из данного множества посылок

Замечание 4.

Учитывая определение значения формулы со связкой $\wedge$ получаем, что множество посылок $F = \{A_1, A_2, \dots A_m\}$ выполнимо тогда и только тогда, когда выполнима формула $(A_1 \wedge \dots \wedge A_m)$, невыполнимо тогда и только тогда, когда формула $(A_1 \wedge \dots \wedge A_m)$ тождественно ложна. Учитывая определения логического следствия, выполнимого и невыполнимого множества посылок, а также сделанные замечания можно сформулировать следующую процедуру для определения того является ли данное высказывание B логическим следствием данного множества посылок $F = \{A_1, A_2, \dots A_m\}$

Установление факта логического следствия из данного множества посылок

1. Проверить F на выполнимость; если F- невыполнимо, то $F \vDash B$, если F - выполнимо, то перейти к следующему пункту проверки.
2. Составить систему логических уравнений
$$\begin{cases} B = f \\ A_1 = t \\ \quad \dots \\ A_n = t \end{cases}$$
3. Исследовать полученную систему на совместность; если система несовместна, то $F \vDash B$, если система совместна, то является логическим следствием множества посылок F.

Основные теоремы о логическом следствии

- Пусть $F = \{A_1, A_2, \dots A_m\}$ некоторое множество посылок. Множество $F \cup \{A\}$, где A - некоторая п.п.ф., будем записывать в виде F, A.

Теорема 1. $F, A \vDash A$

Доказательство. Если множество посылок $\{F, A\}$ выполнимо, то существуют такие наборы значений пропозициональных переменных, от которых зависит это множество посылок, на которых одновременно все формулы из F и формула A принимают значение t, следовательно, в таком случае $F, A \vDash A$ согласно определению логического следствия. Если же множество посылок $\{F, A\}$ невыполнимо, то $F, A \vDash A$ согласно замечанию 3 из предыдущего пункта.

Основные теоремы о логическом следствии

Теорема 2. Пусть B - некоторая п.п.ф. Тогда, если $F \vDash A$, то $F, B \vDash A$

Доказательство. Проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы 1.

Следствие теоремы 2. Пусть F'- конечное множество п.п.ф. Тогда, если $F \vDash A$, то $F' \vDash A$

Доказательство. Легко проводится индукцией по числу формул в F'.

Основные теоремы о логическом следствии

Теорема 3. Если $F, A, B \vDash C$, то $F, B, A \vDash C$.

Доказательство. Очевидно.

Теорема 4. Если $F, A \vDash B$ и $F \vDash A$, то $F \vDash B$.

Доказательство. Если множество посылок $\{F, A\}$ выполнимо, то:

-так как $F, A \vDash B$, то B принимает значение t всякий раз, когда формулы из $\{F, A\}$ одновременно принимают значение t;

- так как $F \vDash A$, то A принимает значение t всякий раз, когда все формулы из F одновременно принимают значение t.

Основные теоремы о логическом следствии

- Следовательно, B принимает значение t всякий раз, когда все формулы из F одновременно принимают значение 1, т.е. $F \vDash B$. Если множество посылок $\{F, A\}$ невыполнимо, то из условия $F \vDash A$ получаем, что F невыполнимо (иначе должен было существовать набор значений пропозициональных переменных, котором одновременно все формулы из F и формула A принимают значение t, что невозможно в силу невыполнимости $\{F, A\}$). Но если - невыполнимо, то $F \vDash B$ согласно замечанию 3 из предыдущего пункта.

Основные теоремы о логическом следствии

- Теорема 5. Если $F \vDash B_1, \ldots F \vDash B_n$, и $B_1, \ldots B_n \vDash C$, то $F \vDash C$.

Доказательство. Из условия $B_1, \ldots B_n \vDash C$ согласно следствию теоремы 2 имеем $F, B_1, \ldots B_n \vDash C$. Из условия $\mathrm{F} \vDash B_n$ согласно следствию теореме 4 имеем $F, B_1, \ldots B_{n-1} \vDash B_n$.. Из $F, B_1, \ldots B_n \vDash C$ и $F, B_1, \ldots B_{n-1} \vDash B_n$ по теореме 4 получим $F, B_1, \ldots B_{n-1} \vDash C$. Из условия $\mathrm{F} \vDash B_{n-1}$ согласно следствию теоремы 2 имеем $F, B_1, \ldots B_{n-2} \vDash B_{n-1}$. Из $F, B_1, \ldots B_{n-1} \vDash C$ и $F, B_1, \ldots B_{n-2} \vDash B_{n-1}$ по теореме 4 получим $F, B_1, \ldots B_{n-2} \vDash C$

Продолжая этот процесс далее, на последней стадии будем иметь в результате предыдущих шагов $F, B_1 \vDash C$, из условия теоремы -$F \vDash B_1$ отсюда по теореме 4 получим $F \vDash C$.

Основные теоремы о логическом следствии

Теорема 6. $A \vDash B$ тогда и только тогда, когда $\vDash (A \to B)$.

Доказательство.

1. Необходимость Легко доказывается от противного.
2. Достаточность Пусть $\vDash (A \to B)$. Рассмотрим два случая.

1) Формула A не является тождественно ложной. Положим, $A = t$, тогда из условия $\vDash (A \to B)$ и определения значения формулы со связкой $\to$ получим $B = t$. Следовательно, по определению логического следствия, имеем $A \vDash B$.

2) Формула A является тождественно ложной. Тогда $\{A\}$ невыполнимо, и, согласно замечанию, имеем $A \vDash B$

Основные теоремы о логическом следствии

Теорема 7. $A_1, \dots A_m \vDash B$

1)тогда и только тогда, когда $(A_1 \wedge, \dots \wedge A_m) \vDash B$;

2) тогда и только тогда, когда$\vDash$ $((A_1 \wedge, \dots \wedge A_m) \rightarrow B)$.

Доказательство.

1) Как необходимость, так и достаточность немедленно следуют из определения значения формулы со связкой $\wedge$ и определения логического следствия.

2) Необходимость следует из необходимости 1) и теоремы 6 $A \equiv (A_1 \wedge, \dots \wedge A_m)$. Достаточность следует из достаточности теоремы 6 при $A \equiv (A_1 \wedge, \dots \wedge A_m)$).

Основные теоремы о логическом следствии

- Теорема 8. $A_1, \ldots A_m \vDash B$ тогда и только тогда, когда $A_1, \ldots A_{m-1} \vDash (A_m \to B)$

Доказательство. При $m = 1$ имеем утверждение доказанной выше теоремы 6.

Докажем теорему для случая $m \leq 1$.

1. **Необходимость**:Пусть $A_1, \ldots A_m \vDash B$. Тогда на основании утверждения теоремы 7 имеем $\vDash ((A_1 \wedge \cdots \wedge A_m) \to B$ или, воспользоваться ассоциативностью связки $\wedge$ (эквивалентность ШІІ.1), получим $\vDash ((A_1 \wedge \cdots \wedge A_{m-1}) \wedge A_m) \to B$. Легко проверить, $\vDash (((A \wedge C) \to D) \to (A \to (C \to D)))$, откуда, полагая $A \equiv (A_1, \ldots A_m)$, $C \equiv A_m$, $D \equiv B \to B$ с учетом определения значения формулы со связкой имеем$| = ((A_1 \wedge \cdots \wedge A_m - 1) \to (A_m \to B))$.

Основные теоремы о логическом следствии

- Применяя теорему 6, $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{m-1}) | = (A_m \to B))$, а применяя далее утверждение 1) теорем получаем $A_1, \ldots A_{m-1} \vDash (A_m \to B))$

2. **Достаточность** Доказывается проведением всех рассуждений, использован при доказательстве необходимости данной теоремы, в обратном порядке.

Следствие теоремы 8. $A_1, \ldots A_{m-1}, A_m \vDash B$, тогда и только тогда, когда $\vDash ((A_1 \to (\ldots \to A_m - 1 \to (A_m \to B \ldots)$.

Доказательство. Получается n-кратным применением теоремы 8

Основные теоремы о логическом следствии

Теорема 6. $A \vDash B$ тогда и только тогда, когда $\vDash (A \to B)$.

Доказательство.

1. **Необходимость** Легко доказывается от противного.

2. **Достаточность** Пусть $\vDash (A \to B)$. Рассмотрим два случая.

1) Формула A не является тождественно ложной. Положим $A = t$, тогда из условия $\vDash (A \to B)$ и определения значения формулы со связкой $\to$ получим $B = t$. Следовательно, по определению логического следствия, имеем $A \vDash B$.

2) Формула A является тождественно ложной. Тогда $\{A\}$ невыполнимо, и, согласно замечанию 3 п. 1.11, имеем $A \vDash B$

Основные теоремы о логическом следствии

- Теорема 9. $A_1, \ldots A_m \vDash B$ тогда и только тогда, когда $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \wedge \neg B)$ тождественно ложна.

Доказательство.

Необходимость Пусть $A_1, \ldots A_m \vDash B$, т.е. либо существуют такие наборы значений пропозициональных переменных (от которых зависят рассматриваемые формулы), на которых одно-временно $A_1 = \cdots = A_m = t$ и либо $B = t$, либо $\{A_1, \ldots A_m\}$, невыполнимо. В первом случае для указанных наборов значений $\neg B = f$, а для любых других наборов значений хотя бы одна из формул $A_1, \ldots A_m$ примет значение f, так что всегда $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \wedge \neg B) = f$. Во втором случае всегда хотя бы одна из формул $A_1, \ldots A_m$ примет значение f, так что снова всегда $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \wedge \neg B) = f$.

Основные теоремы о логическом следствии

- Достаточность Доказывается проведением всех рассуждений, использованных доказательстве необходимости данной теоремы, в обратном порядке.

Доказанные теоремы о логическом следствии позволяют:

-получать данную п.п.ф. в качестве логического следствия новой системы посылок (теоремы 1-5, 7(1), 8); при этом следует отметить теорему 5, которая дает способ последовательного получения данной п.п.ф. в качестве логического следствия вы-деленной системы посылок F;

-связать факт логического следствия данной п.п.ф. с тождественной истинностью или тождественной ложностью определенной формулы (теоремы 6,7(2), следствие теоремы 8, теорема 9); это дает способ определения того, является ли данная п.п.ф. логическим следствием данной системы посылок.