Некоторые законы распределения случайных величин

Нормальный закон распределения («закон Гаусса»)

Плотность вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad X \sim N(a, \sigma)$$

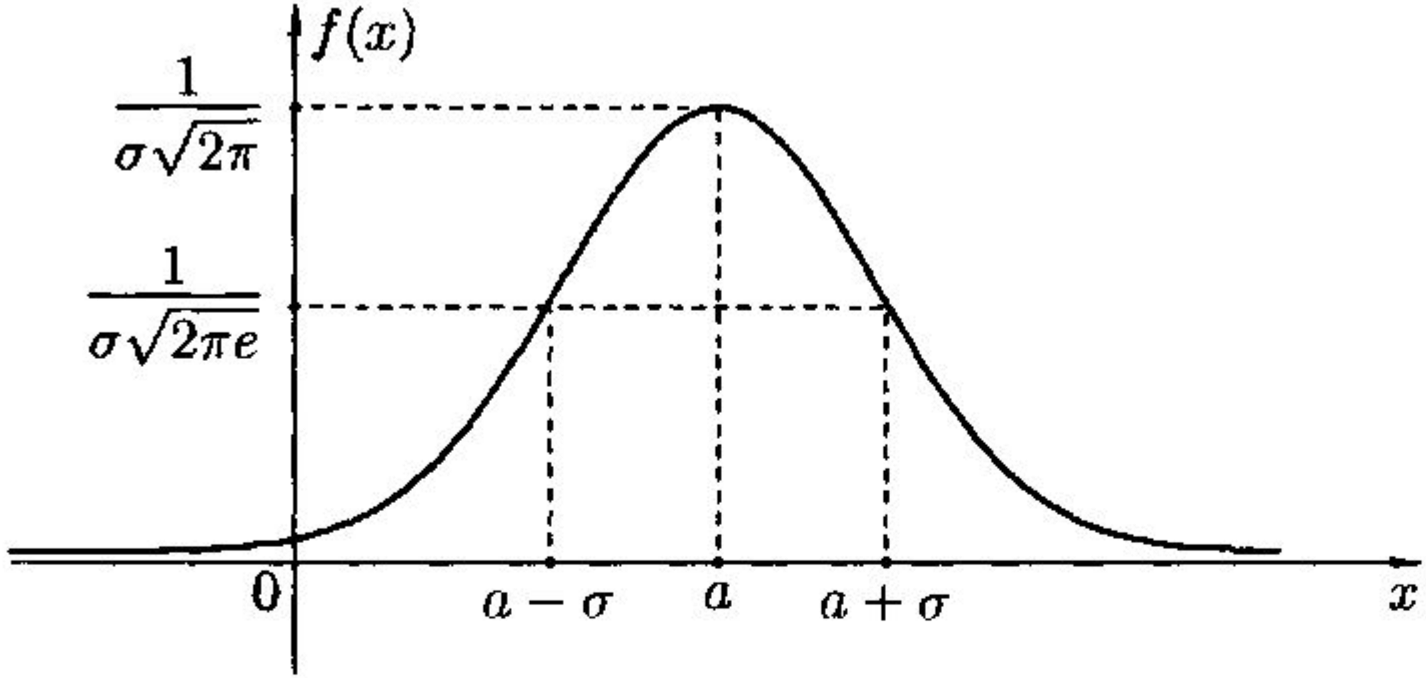
Свойства плотности вероятностей

1. $f(x) > 0$ при любом $x \in (-\infty, +\infty)$

2. Ось абсцисс является горизонтальной асимптотой

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = 0$$

График нормального закона



$$f_{\max} = f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Максимальное значение

Точки перегиба

$$M_1\left(a-\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{и} \quad M_2\left(a+\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Характеристическая функция гауссовской случайной величины

$$g(v) = e^{iva - \frac{\sigma^2 v^2}{2}}$$

Линейное преобразование гауссовской случайной величины $Y = cX + b$

$$Y \sim N(ca + b, |c|\sigma)$$

Сумма $X + Y$ двух независимых гауссовских случайных величин $X \sim N_X(a_1, \sigma_1)$ и $Y \sim N_Y(a_2, \sigma_2)$

$$X + Y \sim N_{X+Y}(a_1 + a_2, \sigma_1 + \sigma_2)$$

Центральные моменты гауссовской случайной величины $\mu_k[X]$

Нечетные моменты $\mu_k[X] = 0$ (*A=0* - коэффициент асимметрии)

Четные моменты $\mu_k[X] = (\mathrm{k}-1)!!\,\sigma^k$

В частности: $\mu_2[X]$=D(X)=σ^2

$\mu_4[X]$=D(X)=$3\sigma^4$ $E = \frac{\mu_{4[X]}}{\sigma^4} - 3 = 0$

$\mu_6[X]$=$15\sigma^6$

Вычисление вероятности $P(\alpha < X < \beta)$

Функция Лапласа $\Phi(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$$\Phi(+\infty) = 0{,}5 \qquad\qquad \Phi(-x) = -\Phi(x)$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

$$P(|X - a| < \delta) = (\delta > 0) = P(a - \delta < X < a + \delta) =$$

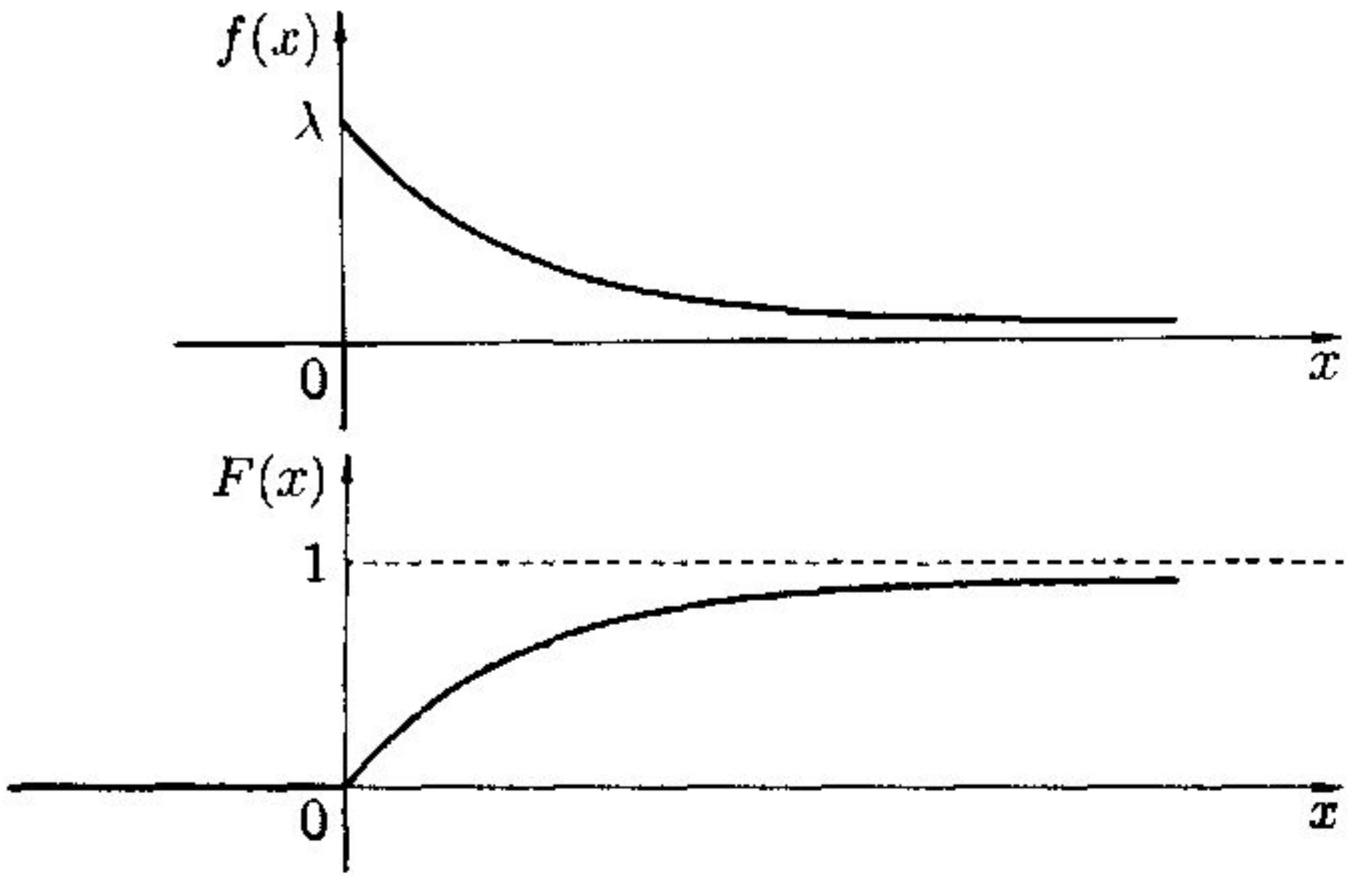
$$= \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

$$\text{При } \delta = 3\sigma \quad P(|X - a| < 3\sigma) = 0{,}9973$$

Пример. При сортировке случайные значения веса зерна распределены нормально со средним значением 0,15 г среднеквадратическим отклонением 0,03 г.Нормальные всходы дают зерна, вес которых более 0,01 г. Определить процент семян, от которых следует ожидать нормальные всходы.

Показательное (экспоненциальное) распределение.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$



Характеристическая функция

$$g(v) = (1 - \frac{iv}{\lambda})^{-1}$$

Кумулянтная функция

$$\varphi(v) = -ln(1 - \frac{iv}{\lambda})$$

$$m_1[X] = -i\varphi\,'(0) \qquad m_1[X]=\frac{1}{\lambda}$$

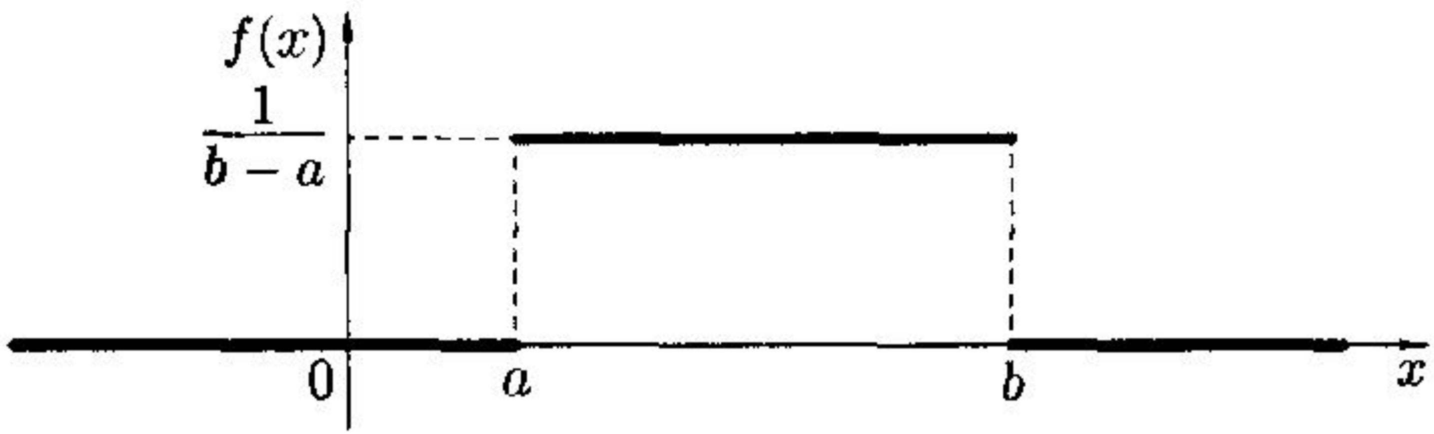
$$D(X) = -\varphi\,''(0) \qquad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

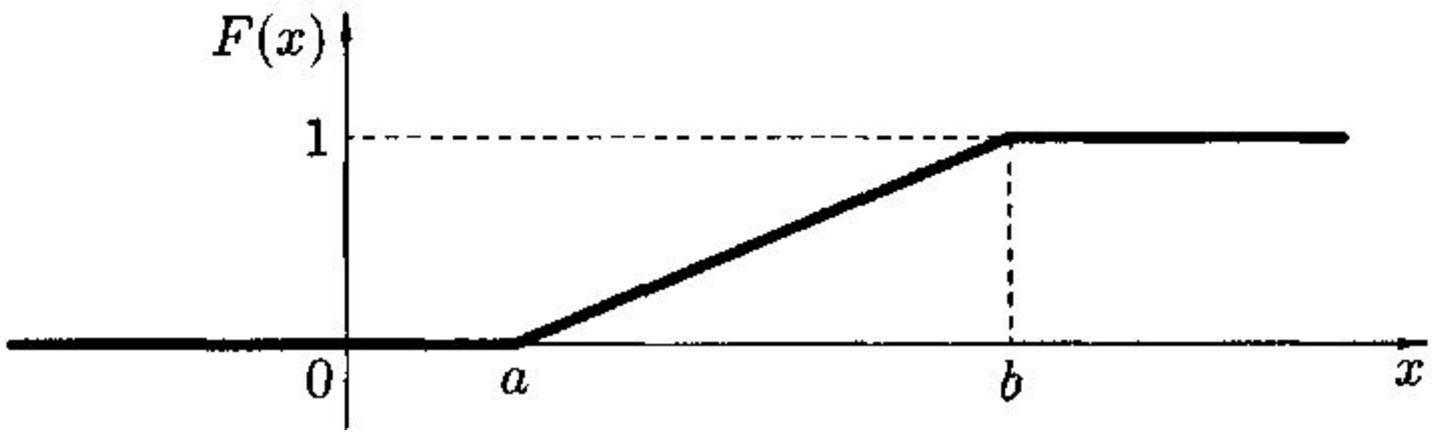
Равномерное распределение.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in (a,b) \\ 0, x \notin (a,b) \end{cases}$$

$$m_1[X] = \frac{a+b}{2} \qquad D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$g(v) = -i\,\frac{e^{iba} - e^{iav}}{v(b-a)}$$


f(x)
1
b − a
0
a
b
x


F(x)
1
0
a
b
x

Распределение Пуассона

$$P(m, \Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^m}{m!} e^{-\lambda \Delta t}$$

Биномиальный закон распределения

$$P_n\,(m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$$

Центральная предельная теорема

Пример. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2, то при увеличении числа n закон распределения суммы

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

неограниченно приближается к нормальному

Основные понятия математической статистики

Термин статистика происходит от латинского слова «статус» -состояние.

В настоящее время статистика включает в себя следующие разделы:

1. Сбор статистических сведений, характеризующих отдельные составляющие каких-либо массовых совокупностей;

2. Статистическое исследование полученных данных, заключающееся в выяснении тех закономерностей, которые могут быть установлены на основе массовых наблюдений.

3. Разработка приемов статистического наблюдения и анализа статистических данных. Этот раздел составляет основное содержание математической статистики.

На основе полученных статистических данных можно решать следующие задачи:

1. Оценивать значения неизвестной вероятности случайного события.

2. Определить неизвестные функции распределения или моменты случайной величины X.

В результате n независимых наблюдений СВ X получены следующие ее значения $x_1, x_2, \dots, x_n$. Требуется определить, хотя бы приближенно, неизвестную функцию распределения случайной величины X или ее моменты (например, среднее, дисперсия).

3. Определение неизвестных параметров распределения.

(Часто исходя из некоторых соображений можно сделать заключение о типе функции распределения интересующей нас СВ. Тогда задача сводится к нахождению неизвестных параметров)

Примеры.

а. Пуассоновский поток λ - ?

б. Гауссовское распределение a и σ - ?; a - ?, σ – известно; σ- ? a – известно.

в. Экспоненциальное распределение - λ ?

4. Оценка зависимости

Производиться последовательность наблюдений сразу двух СВ X и Y. В результате наблюдений получаем пары значений $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Требуется выяснить наличие функциональной или корреляционной связи между X и Y.

Понятие выборки

Определение. Совокупность всех подлежащих изучению результатов всех мыслимых наблюдений, производится над каким-то объектом, называется генеральной совокупностью

Определение. Выборка называется репрезентативной (представительной), если она хорошо представляет свойства генеральной совокупности

В результате эксперимента над случайной величиной X мы получаем множество ее значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ как результатов n наблюдений.

Множество $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ отдельных значений СВ распределенных по неизвестному нам, но одинаковому закону *F(x)* называется выборкой объема *n* из генеральной совокупности.

Числа x_i- элементы выборки или варианты

Форма записи выборки

$x_1{}' \leq x_2{}' \leq x_3{}' \leq \cdots \leq \ x_n{}'$ - вариационный ряд

$x_n' - x_1'$ - размах выборки

			…		
Номер группы (*i*)	1	2	…	k-1	
		2	…	1	
			…		

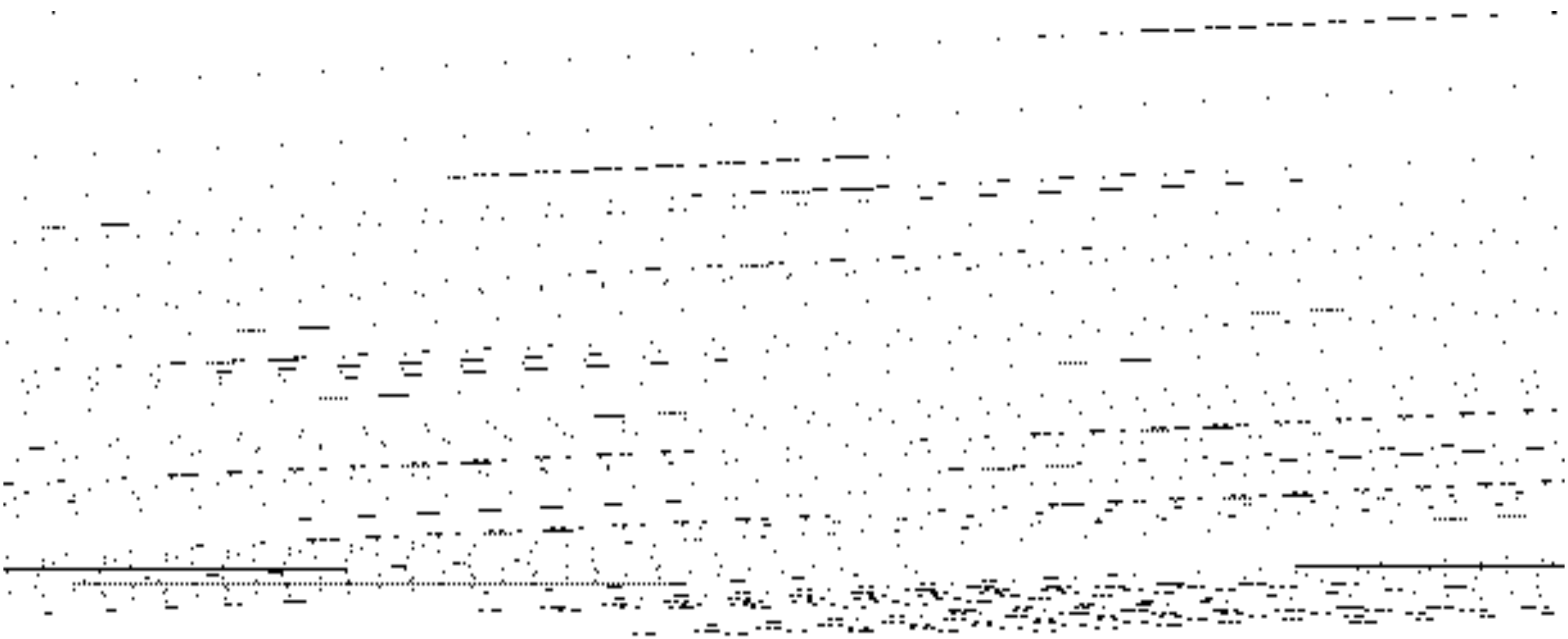
Пример 1. При измерениях частоты пульса в однородных группах обследуемых получены следующие результаты: 71, 72, 74, 70, 70, 72, 71, 74, 71, 72, 73, 71, 72, 72, 72, 73, 72, 74, 72,74 . Составить по этим результатам статистический ряд распределения частот и относительных частот.

Объем выборки: $n = 2 + 4 + 8 + 2 + 4 = 20$

Ряды распределения частот и относительных частот

Пульс			72		
		4	8	2	
			0,4		

Полигон частот и полигон относительных частот



Пример 2. При измерениях роста в однородных группах обследуемых получены следующие результаты:

178, 160, 154, 183, 155, 153, 167, 186, 163, 155, 157, 175, 170, 166, 159, 173, 182, 167, 171, 169, 179, 165, 156, 179, 158, 171, 175, 173, 164, 172.

Составить по этим результатам группированный статистический ряд распределения частот и относительных частот. Построить гистограмму и полигон относительных частот

$$x_{min} = 153 \qquad x_{max} = 186$$

Формула Стерджеса: $h = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + \log_2 n}$

В нашем случае: $h = \frac{186 - 153}{1 + \log_2 30} \approx 5{,}59$

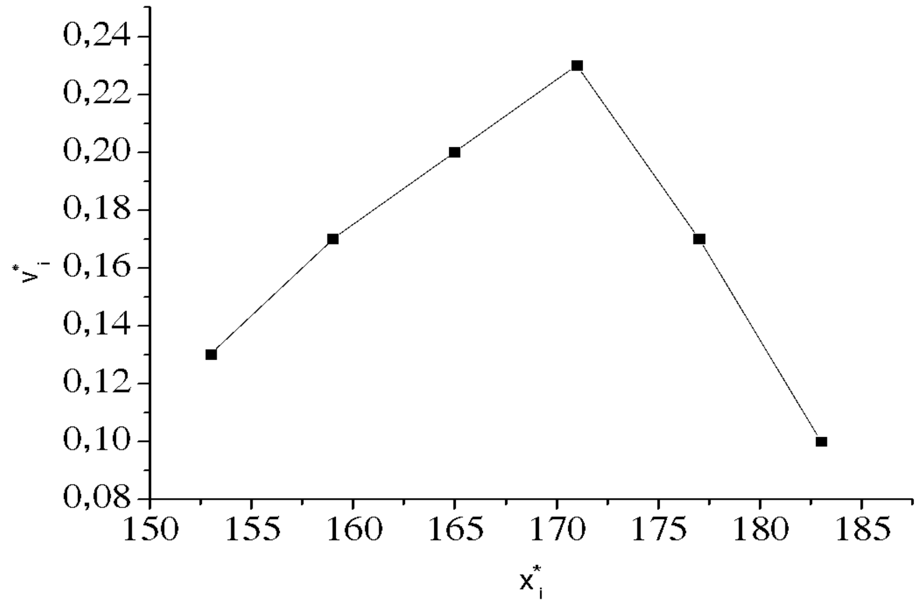
Пример $h = 6$ $x_{\text{нач}} = 150$

Исходные данные разобьем на 6 интервалов: [150,156), [156,162), [162,168), [168,174), [174,180), [180,186]

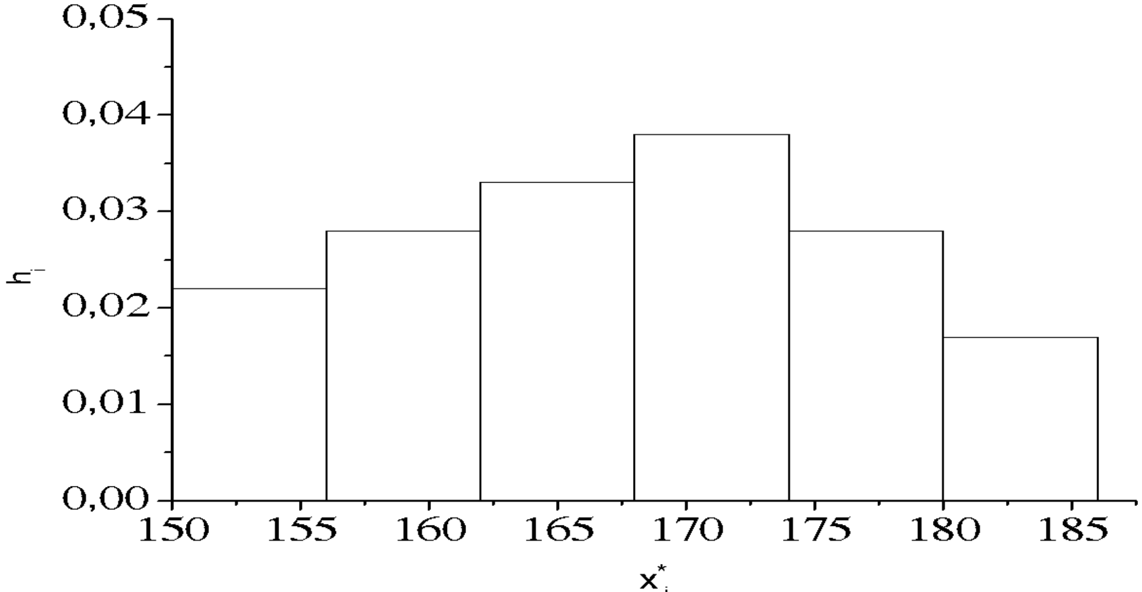
Определим число выборочных данных n_i, попавших в каждый промежуток

	[150,156)	[156,162)	[162,168)	[168,174)	[174,180)	[180,186]
	153	159	165	171	177	183
Частота	4	5	6	7	5	3
	0,13	0,17	0,20	0,23	0,17	0,1
	0,022	0,028	0,033	0,038	0,028	0,017

H_i высота прямоугольника гистограммы



Полигон относительных частот



Гистограмм а

Эмпирическая функция распределения

Определение. Характеристики СВ, найденные на основе выборочных данных называются эмпирическими или выборочными

Пусть есть выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n_x – число элементов выборки, меньших x.

Определение. Эмпирической функцией распределения называется

$$F_x{}^* = \frac{n_x}{n}$$

Свойства $F_x{}^*$:

1. $0 \leq F_x{}^* \leq 1$

2. $F_x{}^*$ неубывающая функция

3. Если x_1 наименьшая , а x_k наибольшая варианты, то

$$F_x{}^* = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ 1 & x > x_k \end{cases}$$

Пульс			72		
		4	8	2	
			0,4		

$$F_x{}^* = \begin{cases} 0, & x \le 70 \\ 0{,}3 & 71 < x \le 72 \\ 0{,}7 & 72 < x \le 73 \\ 0{,}8 & 73 < x \le 74 \\ 1, & x > 75 \end{cases}$$

Определение. Пусть дана последовательность СВ $\{x_n\}$. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится по вероятности к числу a, если для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется такое число $N(\varepsilon, \delta)$ зависящее от ε , δ, что для всех n $> N(\varepsilon, \delta)$ выполняется неравенство

$$P(|x_n - a| < \varepsilon) > 1 - \delta$$

Теорема. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ последовательность попарно независимых СВ с конечными математическими ожиданиями $m_1, m_2, \dots, m_n$ и дисперсиями $D_1, D_2, \dots, D_n$ ограниченными одним и тем же числом Q $(D_i < Q \;\; i = 1, \dots, n)$ то последовательность СВ

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

сходится по вероятности к среднему арифметическому математических ожиданий

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n}$$

величин $X_1, X_2, \dots, X_n$,

L

что означает

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta$$

Следствие1. (Теорема Бернулли). Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых может появиться некоторое событие A с постоянной вероятностью p.

При неограниченном увеличении числа опытов n относительная частота p^* появления события A сходится по вероятности к p.

Следствие2. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ - последовательность независимых СВ распределенных по одному закону, имеющему конечное математическое m_X ожидание и конечную дисперсию D_X.

Тогда среднее арифметическое этих величин

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

сходится по вероятности к m_X.

Замечание. Аналогично можно доказать, что любой выборочный момент k-го порядка

$$\frac{1}{n}\sum {X_i}^k = \widehat{m}_k$$

сходится по вероятности к соответствующему k - му моменту $m_k[X]$ исходного распределения, если только существует момент порядка *2k* этого распределения.

Оценки для неизвестных параметров закона распределения.

Необходимо отметить, что любое значение искомого параметра, вычисленное на основе ограниченной выборки, будет содержать элементы случайности.

Это приближенное случайное значение мы будем называть оценкой параметра.

Пусть имеется случайная величина X, закон распределения которой содержит неизвестный параметр a, т.е. $f(x; a)$.

Требуется по выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$, полученной в результате n независимых наблюдений, оценить неизвестный параметр a.

Обозначим $\widehat{a}$ оценку для параметра a.

$$\widehat{a} = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$\widehat{a}$ является функцией результатов n наблюдений над случайной величиной X.

$\widehat{a}$ случайная величина

Предъявим к оценке ряд требований, которым она должна удовлетворять, чтобы быть доброкачественной:

1. Оценка должна быть состоятельной. Оценка называется состоятельной, если при неограниченном увеличении объема выборки n она сходится по вероятности к оцениваемому параметру

$$\hat{a} = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n) \underset{n \to \infty}{\overset{P}{\to}} a$$

2. Оценка должна быть несмещенной, т.е. ее математическое ожидание должно совпадать с оцениваемым параметром

$$m_1[\hat{a}] = a$$

$$m_1[\hat{a}] - a = b_n(a) \text{ смещение}$$

Если

$$\lim_{n\to\infty} b_n(a) = 0$$

то оценка называется асимптотически несмещенной.

3. Оценка $\hat{a}$ должна быть эффективной, т.е. она должна обладать по сравнению с другими наименьшей дисперсией

$$D(\hat{a})=V_{min}$$

V_{min}- минимально возможная величина дисперсии, определяемая из неравенства Крамера Рао и называемая потенциальной или предельной точностью.

Для характеристики точности оценки на практике обычно используют величину

$$\delta(\hat{a}) = \sqrt{D(\hat{a})}\,/a$$

относительная среднеквадратическая погрешность

Отношение $V_{min}/D(\hat{a}) \leq 1$ называется эффективностью

Методы нахождения точечных оценок

Наиболее распространенные методы построении точечных оценок:

метод моментов,

метод максимального правдоподобия

метод максимума апостериорной плотности вероятности оцениваемого параметра и т.д.

Метод моментов

Выборочный момент k -го порядка определяется по формуле

$$m_k{}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^k$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ выборочные данные.

${m_1}^*$ – выборочное среднее

Аналогично определим центральные выборочные моменты

$$\mu_k{}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - {m_1}^*)^k$$

${\mu_2}^*$– центральный выборочный момент второго порядка или выборочная дисперсия ${D_x}^*$. Характеризует меру рассеяния выборочных значений относительно выборочного среднего.

Выборочный коэффициент асимметрии

$$A^* = \frac{{\mu_3}^*}{({D_x}^*)^{3/2}}$$

Выборочный коэффициент эксцесса

$$E^* = \frac{{\mu_4}^*}{({D_x}^*)^2} - 3$$

Рассмотрим свойства выборочных среднего и дисперсии

$$m_1{}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$D_x{}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_1{}^*)^2$$

По следствию из теорему Чебышева $m_1{}^*$ сходится по вероятности к m_x, т.е. является состоятельной

Оценка $m_1{}^*$ также является несмещенной

Дисперсия оценки $m_1{}^*$

$$D(m_1{}^*) = \frac{1}{n} D_x$$

Оценка дисперсии $D_x{}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1{}^*)^2$

Предложенная оценка является состоятельной

Можно показать, что $m_1(D_x{}^*) = \frac{n-1}{n} D_x$

Оценка дисперсии $D_x{}^*$ является смещенной

Определим исправленную выборочную дисперсию

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_x{}^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1{}^*)^2$$

Пример. При измерениях частоты пульса в однородных группах обследуемых получены следующие результаты: 71, 72, 74, 70, 70, 72, 71, 74, 71, 72, 73, 71, 72, 72, 72, 73, 72, 74, 72,74 . Найти выборочные среднее и дисперсию.

$$m_1{}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 72{,}1$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1{}^*)^2 = 1{,}21$$

Смещенная оценка $D_x{}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1{}^*)^2 = 1{,}15$

Понятие интервального оценивания параметров. Доверительный интервал.

Назначим некоторую достаточно большую вероятность β=0.9, 0.95 или 0.99 с которой будет выполняться событие $|\hat{a} - a| < \varepsilon$

$$P(|\hat{a} - a| < \varepsilon) = \beta$$

Диапазон максимальных возможных значений ошибки, возникающих при замене a на $\hat{a}$ будет равен $\mp\varepsilon$.

Интервал $(\hat{a} - \varepsilon, \hat{a} + \varepsilon)$ называется доверительным интервалом

Нахождение границ доверительного интервала

В качестве примера рассмотрим задачу о доверительном интервале для оценки среднего

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Найдем вероятность $P(|\hat{m}_1 - m_x| < \varepsilon\ ) = \beta$

$$\beta\ = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma(\hat{m}_1)}) \qquad\qquad \sigma(\hat{m}_1) = \sqrt{\frac{D_x}{n}}$$

Если дисперсия D_x не известна, то можно использовать ее оценку

$$D^*{}_x = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{m}_1)^2$$

Пример. Дана гауссовская случайная величина X со среднеквадратическим отклонением σ=2. Найти доверительный интервал для математического ожидания a, если $\hat{a} = 20{,}09, n = 16, \beta = 0{,}9$.

$\chi^2_{\text{набл}}$

Критерий согласия Пирсона

На основании выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с помощью критерия Пирсона можно проверить гипотезу H о том, что случайная величина X имеет некоторый закон распределения $F(x)$

Введем некоторую величину $\chi^2_{\text{набл}}$, характеризующую степень расхождения теоретического и эмпирического законов распределения.

Будем сравнивать $\chi^2_{\text{набл}}$ с некоторым порогом Π_α:

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \Pi_\alpha$ то гипотезу H будем принимать

Если $\chi^2_{\text{набл}} > \Pi_\alpha$ то гипотезу H будем отклонять

Группированный статистический ряд

				...	
				...	

f(x) плотность вероятностей гипотетического закона распределения

$$p_i = \int_{\Delta_i} f(x)dx$$

				...	

Мера расхождения между гистограммой и *f(x)*

$$\chi^2{}_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

$$\text{n} = \sum n_i$$

объем выборки