



Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

*Справочный материал к практике 14 по
дисциплине «Математика» для студентов
направления подготовки
09.03.02 «Информационные системы и
технологии»*

Экстремум. Условный экстремум функции 2 переменных

*Составитель:
ст. преподаватель кафедры «Физико-
математические науки» Черемухин А. Д.*

Пример 1. Найдите экстремумы функции $-6x^4 - y^4 - 8x^2 + 7xy + 4y^2$

1. Находим частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x} f = -24x^3 + 16x + 7y \quad \frac{\partial}{\partial y} f = -4y^3 + 7x + 8y$$

2. Объединим в систему уравнений и решим ее (через замену, поскольку она нелинейна)

$$\begin{cases} -24x^3 - 16x + 7y = 0 \\ -4y^3 + 7x + 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{24x^3 + 16x}{7} \\ -4y^3 + 7x + 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow -4 \left(\frac{24x^3 + 16x}{7} \right)^3 + 7x + 8 \left(\frac{24x^3 + 16x}{7} \right) = 0 \Rightarrow -\frac{55296}{343}x^9 - \frac{110592}{343}x^7 - \frac{73728}{343}x^5 - \frac{6976}{343}x^3 + \frac{177}{7}x = 0$$

$$\frac{55296}{343}x^9 - \frac{110592}{343}x^7 + \frac{73728}{343}x^5 - \frac{6976}{343}x^3 - \frac{79}{7}x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 0.5054; x_3 = -0.5054 \Rightarrow y_1 = 0; y_2 = 1.5979; y_3 = -1.5979$$

Мы нашли предполагаемые точки экстремума: $M(0; 0)$ $N(0.5054; 1.5979)$ $K(-0.5054; -1.5979)$

3. Проверим их на наличие экстремума. Найдем вторые производные

$$f_{xx}'' = -72x^2 - 16; f_{yy}'' = -12y^2 + 8; f_{xy}'' = 7;$$

Пример 1. Найдите экстремумы функции $-6x^4 - y^4 - 8x^2 + 7xy + 4y^2$

4. Сформируем дискриминант и найдем его значения для каждой точки

$$D = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = (-72x^2 - 16) \cdot (-12y^2 + 8) - 49$$

$$D(M) = (-72x^2 - 16) \cdot (-12y^2 + 8) - 49 = -177 - \text{если } D \text{ отрицателен, точки экстремума нет}$$

$$D(K) = (-72x^2 - 16) \cdot (-12y^2 + 8) - 49 = (-72 \cdot (-0.5054)^2 - 16) \cdot (-12 \cdot (-1.5979)^2 + 8) - 49 = 729.77$$

если D положителен, точки экстремума есть (если D = 0, то мы ничего не знаем)

форма точки экстремума (max, min) зависит от значения второй производной

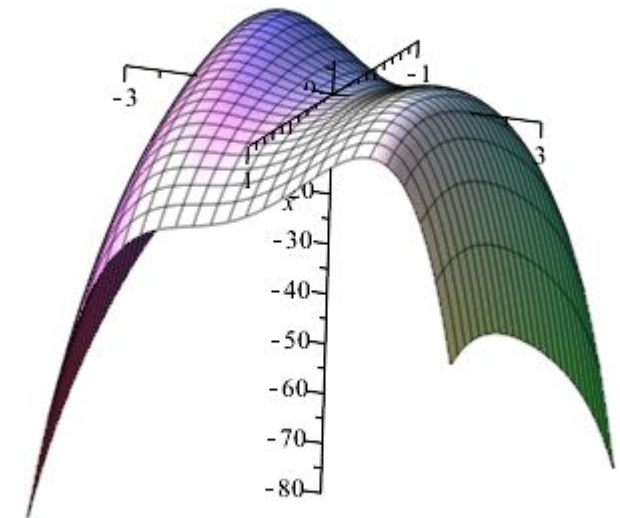
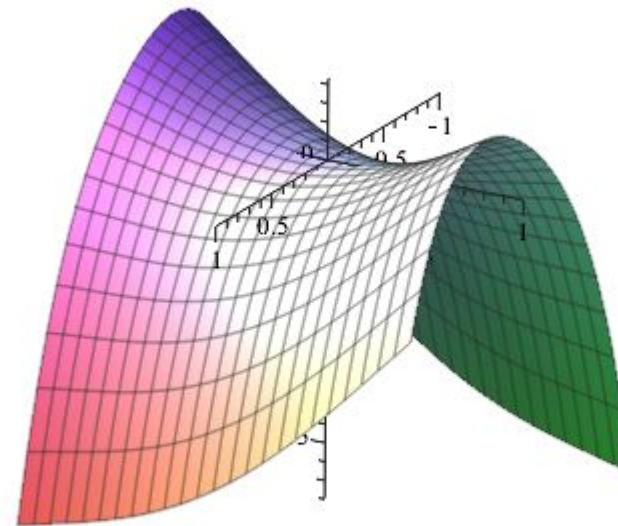
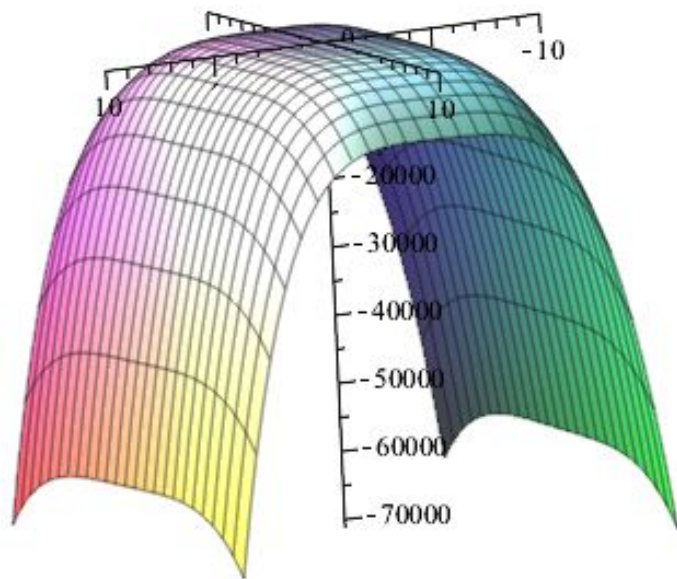
$$f''_{xx}(K) = -72x^2 - 16 = -72 \cdot (-0.5054)^2 - 16 = -34.39 < 0 - \text{следовательно, K - точка максимума (если } > 0 - \text{ то точка минимума)}$$

$$D(N) = (-72x^2 - 16) \cdot (-12y^2 + 8) - 49 = (-72 \cdot (0.5054)^2 - 16) \cdot (-12 \cdot (1.5979)^2 + 8) - 49 = 729.77$$

$$f''_{yy}(N) = -72x^2 - 16 = -72 \cdot (0.5054)^2 - 16 = -34.39 < 0 - \text{следовательно, N - точка максимума}$$

5. Точки N и K – точки максимума

Посмотрим на график функции $-6x^4 - y^4 - 8x^2 + 7xy + 4y^2$



Пример 2. Найдите экстремумы функции $f(x, y) = 3x + 9y$ при условии $\phi: 8x^2 + 9y + 10 = 0$

1. Сформируем функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = 3x + 9y + \lambda(8x^2 + 9y + 10)$$

2. Найдем частные производные от функции Лагранжа

$$L'_x = 16\lambda x + 3 \quad L'_y = 9 + 9\lambda \quad L'_\lambda = 8x^2 + 9y + 10$$

3. Приравняем их к 0 и найдем стационарные точки

$$\begin{cases} 16\lambda x + 3 = 0 \\ 9 + 9\lambda = 0 \\ 8x^2 + 9y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16\lambda x + 3 = 0 \\ \lambda = -1 \\ 8x^2 + 9y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0.188 \\ \lambda = -1 \\ 8x^2 + 9y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0.188 \\ \lambda = -1 \\ y = -1.14 \end{cases}$$

4. Посчитаем вторые производные и определитель по формуле

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0\lambda_0) & \varphi'_y(M_0\lambda_0) \\ \varphi'_x(M_0\lambda_0) & L''_{xx}(M_0\lambda_0) & L''_{xy}(M_0\lambda_0) \\ \varphi'_y(M_0\lambda_0) & L''_{xy}(M_0\lambda_0) & L''_{yy}(M_0\lambda_0) \end{vmatrix}$$

Пример 2. Найдите экстремумы функции $f(x, y) = 3x + 9y$ при условии $\lambda : 8x^2 + 9y + 10 = 0$

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0\lambda_0) & \varphi'_y(M_0\lambda_0) \\ \varphi'_x(M_0\lambda_0) & L''_{xx}(M_0\lambda_0) & L''_{xy}(M_0\lambda_0) \\ \varphi'_y(M_0\lambda_0) & L''_{xy}(M_0\lambda_0) & L''_{yy}(M_0\lambda_0) \end{vmatrix} \quad \varphi'_x = 16x, \quad \varphi'_y = 9 \quad L''_{xx} = 16\lambda \quad L''_{yy} = 0 \quad L''_{xy} = 0$$

$$-\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 16x & 9 \\ 16x & 16\lambda & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 9 \cdot 9 \cdot 16\lambda = 1296\lambda \Rightarrow \Delta(K) = -1296 \rightarrow \Delta < 0$$

значит, т. К - условный максимум (если $\Delta > 0$ - то точка минимум)