Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

Справочный материал к практике 14 по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Экстремум. Условный экстремум функции 2 переменных

Составитель:
ст. преподаватель кафедры «Физико-математические науки» Черемухин А. Д.

Пример 1. Найдите экстремумы функции $-6x^4 - y^4 - 8x^2 + 7xy + 4y^2$

1. Находим частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x} f = -24x^3 + 16x + 7y \qquad \frac{\partial}{\partial y} f = -4y^3 + 7x + 8y$$

2. Объединим в систему уравнений и решим ее (через замену, поскольку она нелинейна)

$$\begin{cases} -24x^3 - 16x + 7y = 0 \\ -4y^3 + 7x + 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{24x^3 + 16x}{7} \\ -4y^3 + 7x + 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow -4\left(\frac{24x^3 + 16x}{7}\right)^3 + 7x + 8\left(\frac{24x^3 + 16x}{7}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{55296}{343}x^9 - \frac{110592}{343}x^7 - \frac{73728}{343}x^5 - \frac{6976}{343}x^3 + \frac{177}{7}x = 0$$

$$\frac{55296}{343}x^9 - \frac{110592}{343}x^7 + \frac{73728}{343}x^5 - \frac{6976}{343}x^3 - \frac{79}{7}x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 0.5054; x_3 = -0.5054 \Rightarrow y_1 = 0; y_2 = 1.5979; y_3 = -1.5979$$

Мы нашли предполагаемые точки экстремума: $M(0;\,0)$ $N(0.5054;\,1.5979)$ $K(-0.5054;-1.5979)$

3. Проверим их на наличие экстремума. Найдем вторые производные

$$f_{xx}'' = -72x^2 - 16;\; f_{yy}'' = -12y^2 + 8;\; f_{xy}'' = 7;$$

Княгининский университет
Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

Пример 1. Найдите экстремумы функции $-6x^4 - y^4 - 8x^2 + 7xy + 4y^2$

4. Сформируем дискриминант и найдем его значения для каждой точки

$$D = f_{xx}'' \cdot f_{yy}'' - (f_{xy}'')^2 = (-72x^2 - 16) \cdot (-12y^2 + 8) - 49$$

$$D(M) = (-72x^2 - 16) \cdot (-12y^2 + 8) - 49 = -177$$ – *если* D *отрицателен, точки экстремума нет*

$$D(K) = (-72x^2 - 16) \cdot (-12y^2 + 8) - 49 = (-72 \cdot (-0.5054)^2 - 16) \cdot (-12 \cdot (-1.5979)^2 + 8) - 49 = 729.77$$

если D *положителен, точки экстремума есть* (*если* D = 0, *то мы ничего не знаем*)

форма точки экстремума (max, min) *зависит от значения второй производной*

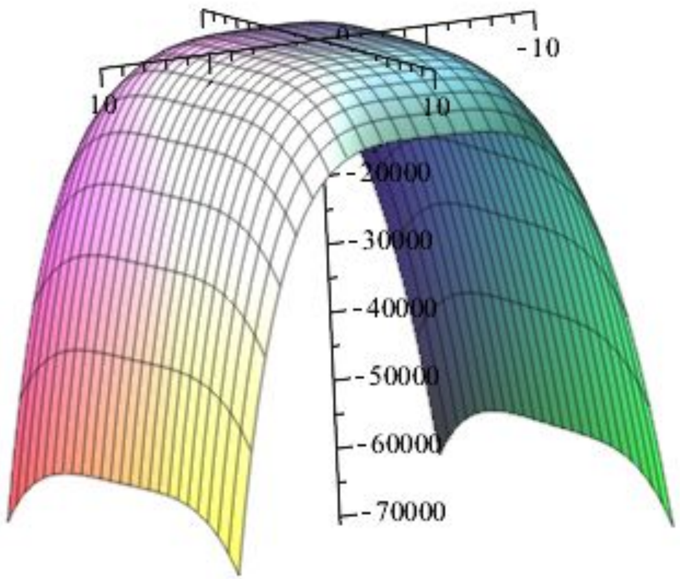
$f_{xx}''(K) = -72x^2 - 16 = -72 \cdot (-0.5054)^2 - 16 = -34.39 < 0$ – *следовательно,* K – *точка максимума* (*если* > 0 – *то точка минимума*)

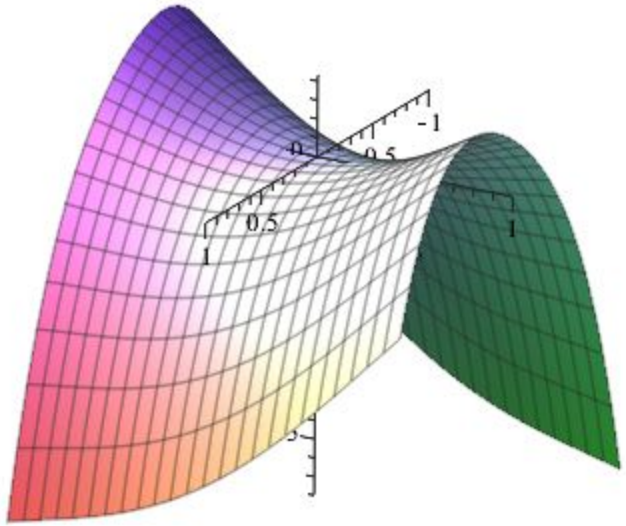
$$D(N) = (-72x^2 - 16) \cdot (-12y^2 + 8) - 49 = (-72 \cdot (0.5054)^2 - 16) \cdot (-12 \cdot (1.5979)^2 + 8) - 49 = 729.77$$

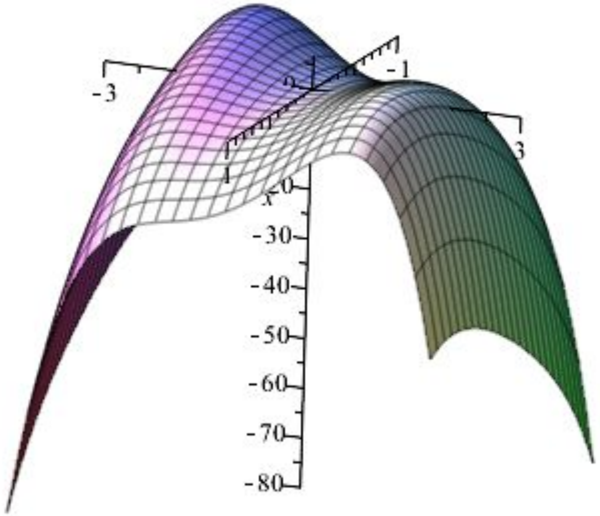
$f_{xx}''(N) = -72x^2 - 16 = -72 \cdot (0.5054)^2 - 16 = -34.39 < 0$ – *следовательно,* N – *точка максимума*

5. Точки N и K – точки максимума

Посмотрим на график функции $-6x^4 - y^4 - 8x^2 + 7xy + 4y^2$







Пример 2. Найдите экстремумы функции $f(x,y)=3x+9y$ $при условии$ $\varphi: 8x^2+9y+10=0$

1. Сформируем функцию Лагранжа

$$L(x,y,\lambda)=3x+9y+\lambda(8x^2+9y+10)$$

2. Найдем частные производные от функции Лагранжа

$$L_x'=16\lambda x+3 \quad L_y'=9+9\lambda \quad L_\lambda'=8x^2+9y+10$$

3. Приравняем их к 0 и найдем стационарные точки

$$\begin{cases}16\lambda x+3=0\\ 9+9\lambda=0\\ 8x^2+9y+10=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}16\lambda x+3=0\\ \lambda=-1\\ 8x^2+9y+10=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0.188\\ \lambda=-1\\ 8x^2+9y+10=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0.188\\ \lambda=-1\\ y=-1.14\end{cases}$$

4. Посчитаем вторые производные и определитель по формуле

$$\Delta=-\begin{vmatrix}0 & \varphi_x'(M_0\lambda_0) & \varphi_y'(M_0\lambda_0)\\ \varphi_x'(M_0\lambda_0) & L_{xx}''(M_0\lambda_0) & L_{xy}''(M_0\lambda_0)\\ \varphi_y'(M_0\lambda_0) & L_{xy}''(M_0\lambda_0) & L_{yy}''(M_0\lambda_0)\end{vmatrix}$$

Пример 2. Найдите экстремумы функции $f(x,y) = 3x + 9y$ *при условии* $\lambda : 8x^2 + 9y + 10 = 0$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0\lambda_0) & \varphi'_y(M_0\lambda_0) \\ \varphi'_x(M_0\lambda_0) & L''_{xx}(M_0\lambda_0) & L''_{xy}(M_0\lambda_0) \\ \varphi'_y(M_0\lambda_0) & L''_{xy}(M_0\lambda_0) & L''_{yy}(M_0\lambda_0) \end{vmatrix}$$

$\varphi_x' = 16x;\ \varphi_y' = 9\ L_{xx}'' = 16\lambda\ \ L_{yy}'' = 0\ \ L_{xy}'' = 0$

$$-\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x' & \varphi_y' \\ \varphi_x' & L_{xx}'' & L_{xy}'' \\ \varphi_y' & L_{xy}'' & L_{yy}'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 16x & 9 \\ 16x & 16\lambda & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 9 \cdot 9 \cdot 16\lambda = 1296\lambda \Rightarrow \Delta(K) = -1296 \to \Delta < 0$$

значит, т. К – *условный максимум* (*если* $\Delta > 0$ – *то точка минимум*)