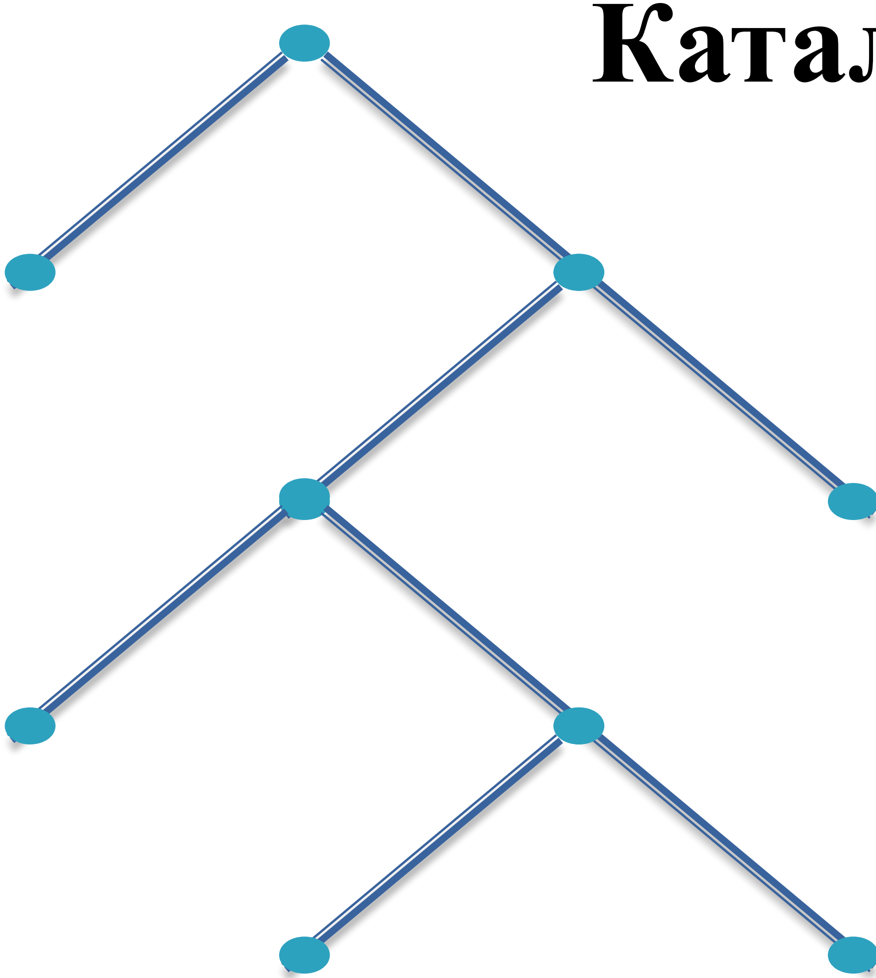
Плоские деревья и числа Каталана



Автор работы:
ученик 8 «Б» класса
МБОУ лицея «Технический»
Баев Даниил

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры
алгебры и геометрии СГАУ
Игнатьев Михаил Викторович

Числа Каталана

C_n – это число правильных расстановок n пар скобок.

Пример:

C_0=1

C_1=1 ( )

C_2=2 (( )) ( )( )

C_3=5 ((( ))) ( )( )( ) ( )(( )) (( ))( ) (( )( ))

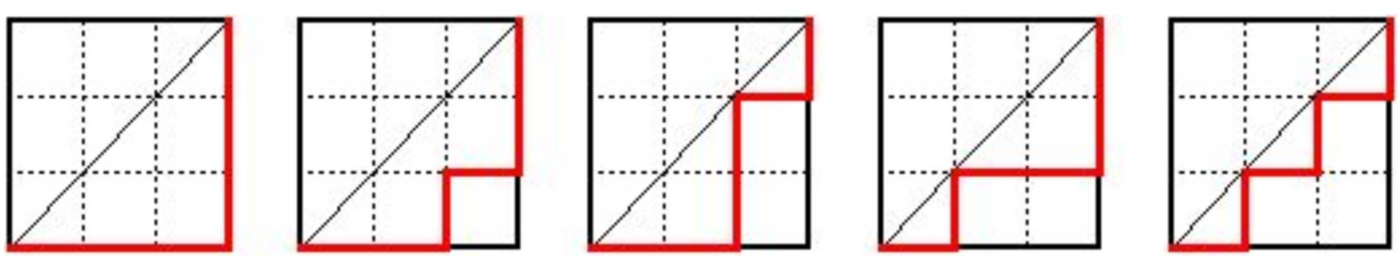
Пути в квадрате

$C_3 = 5$

Число путей $= C_n$

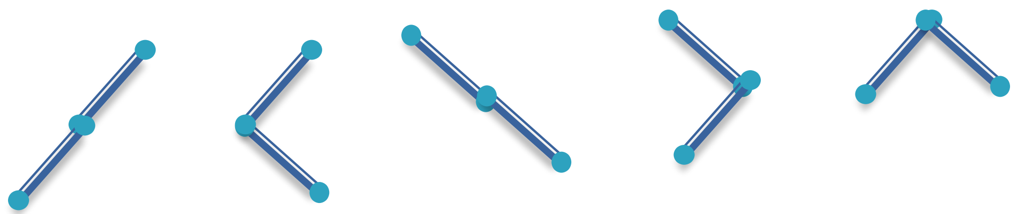
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Смещение на 1 клетку вправо	(
Смещение на 1 клетку вверх	)



((( )))   (( )( ))   (( ))( )   ( )(( ))   ( )( )( )

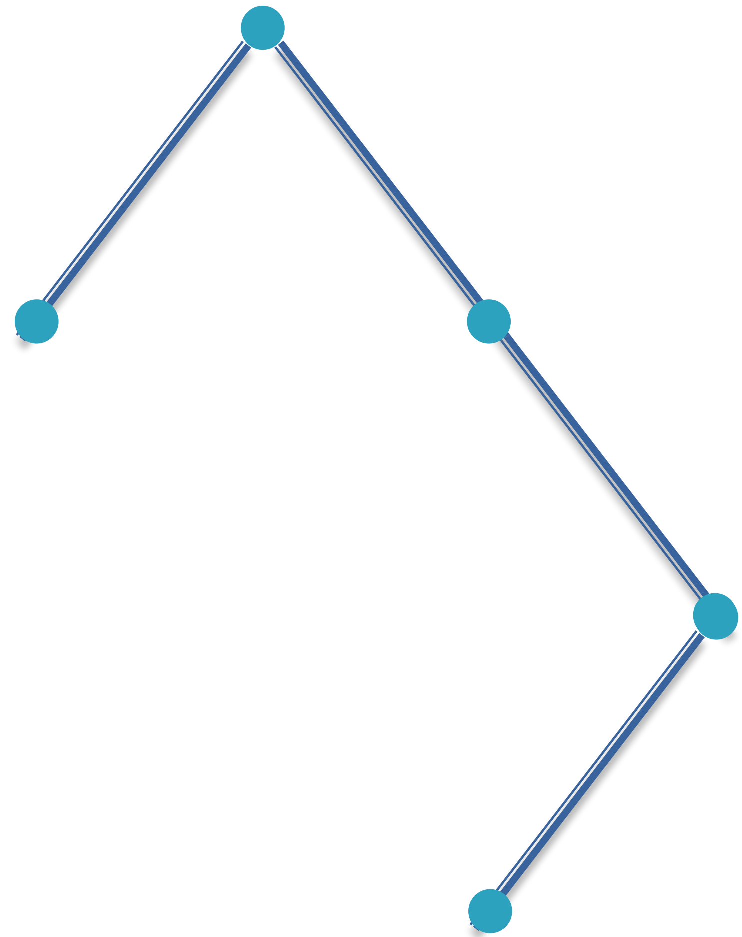
Деревья на плоскости

- Дерево – связный граф без циклов
- Двоичное дерево – это такое дерево, у каждой вершины которого не более двух потомков
- Пример:
- *n*=0, где n - количество вершин => 0 (пустое дерево)
- *n*=1 => 1 дерево 
- *n*=2 => 2 
- *n*=3 => 5 

Двоичные деревья

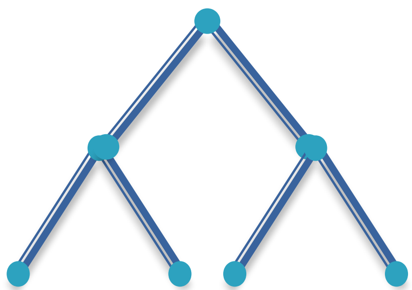
(( ))( )(( ))

Взаимно однозначное соответствие

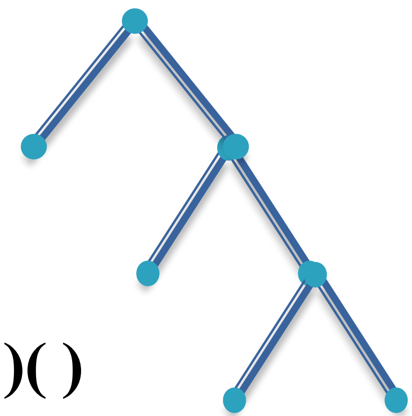


Строго двоичные деревья

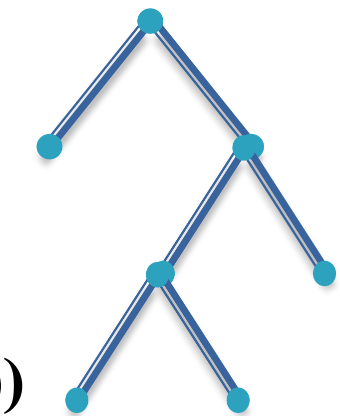
Посчитать количество строго двоичных деревьев с n+1 листами, при n=3



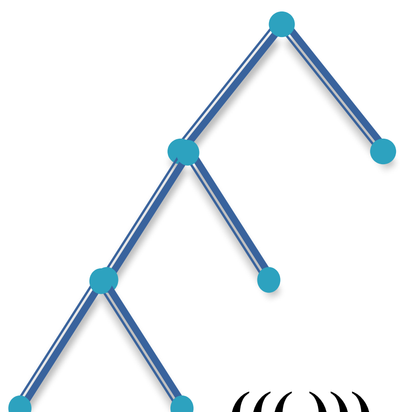
(( ))( )



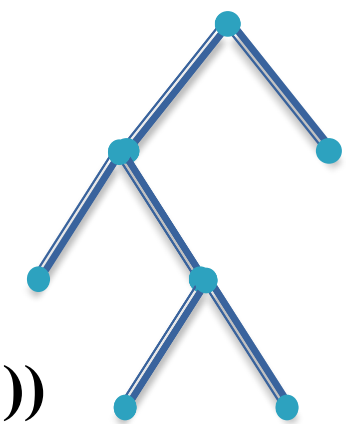
( )( )( )



( )(( ))



((( )))



(( )( ))

Итого: количество деревьев с $n+1$ листами равно C_n

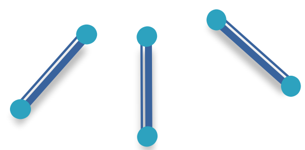
Троичные деревья

Сколько существует троичных деревьев с n вершинами?

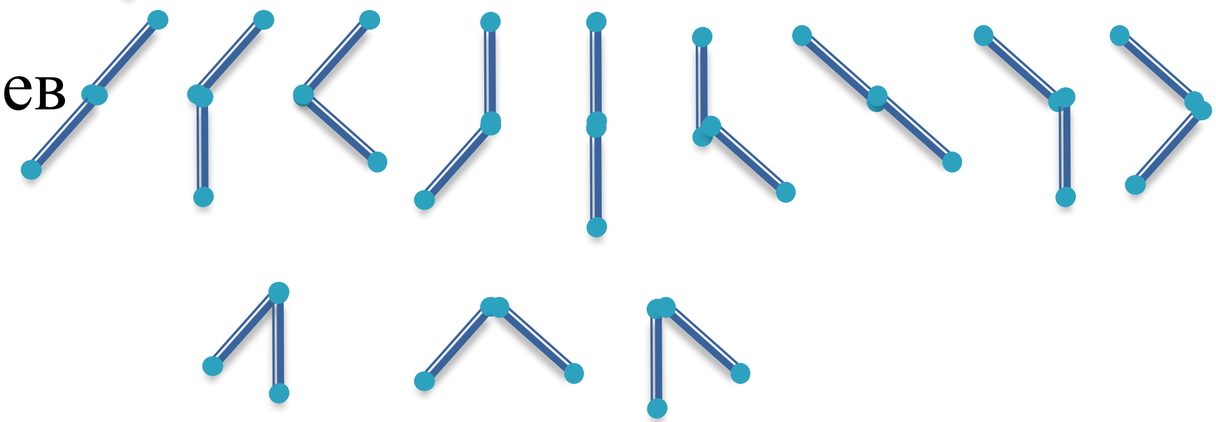
n=0 => 1 дерево (пустое)

n=1 => 1 дерево

n=2 => 3 дерева



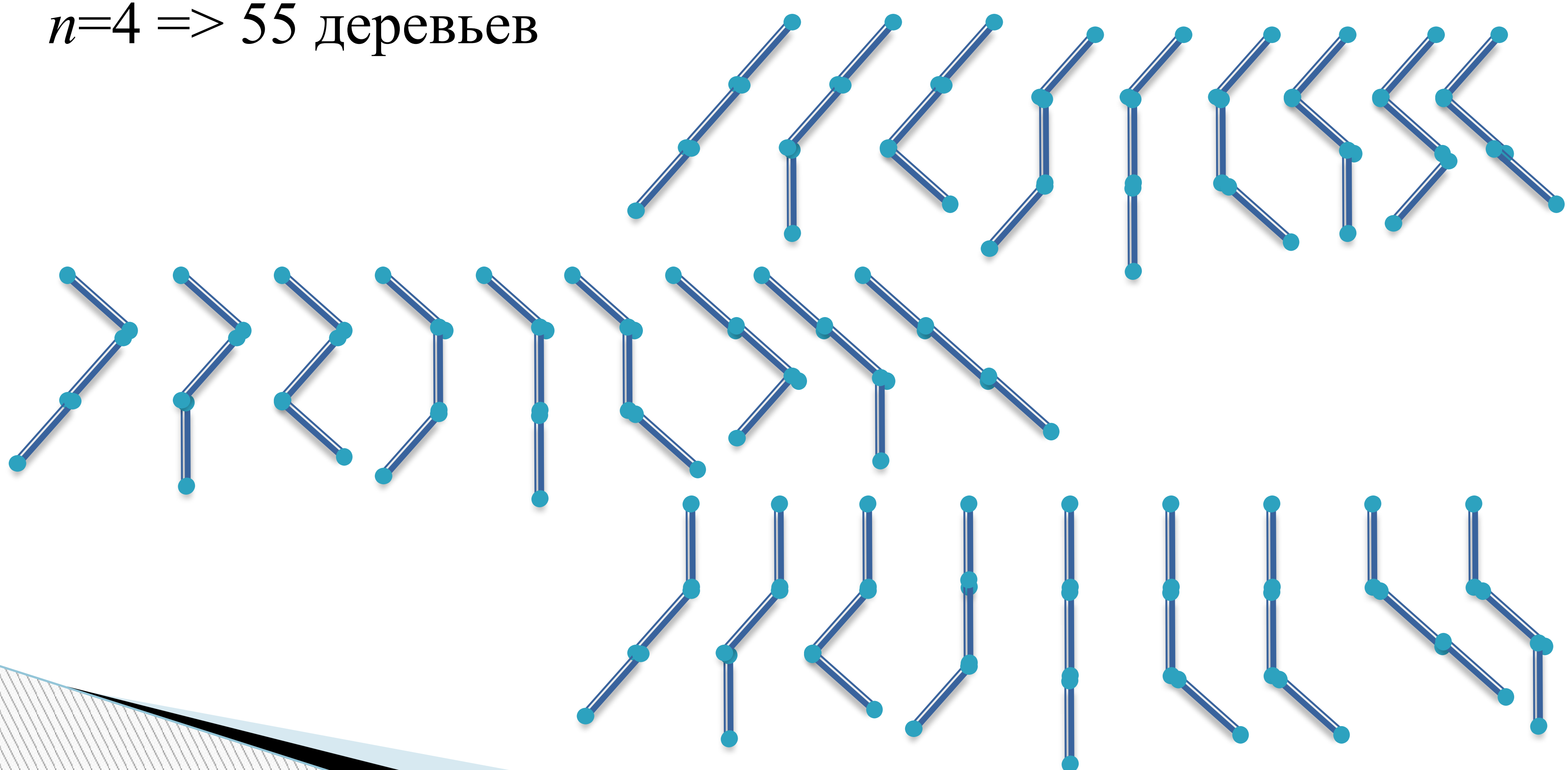
n=3 => 12 деревьев



Троичные деревья

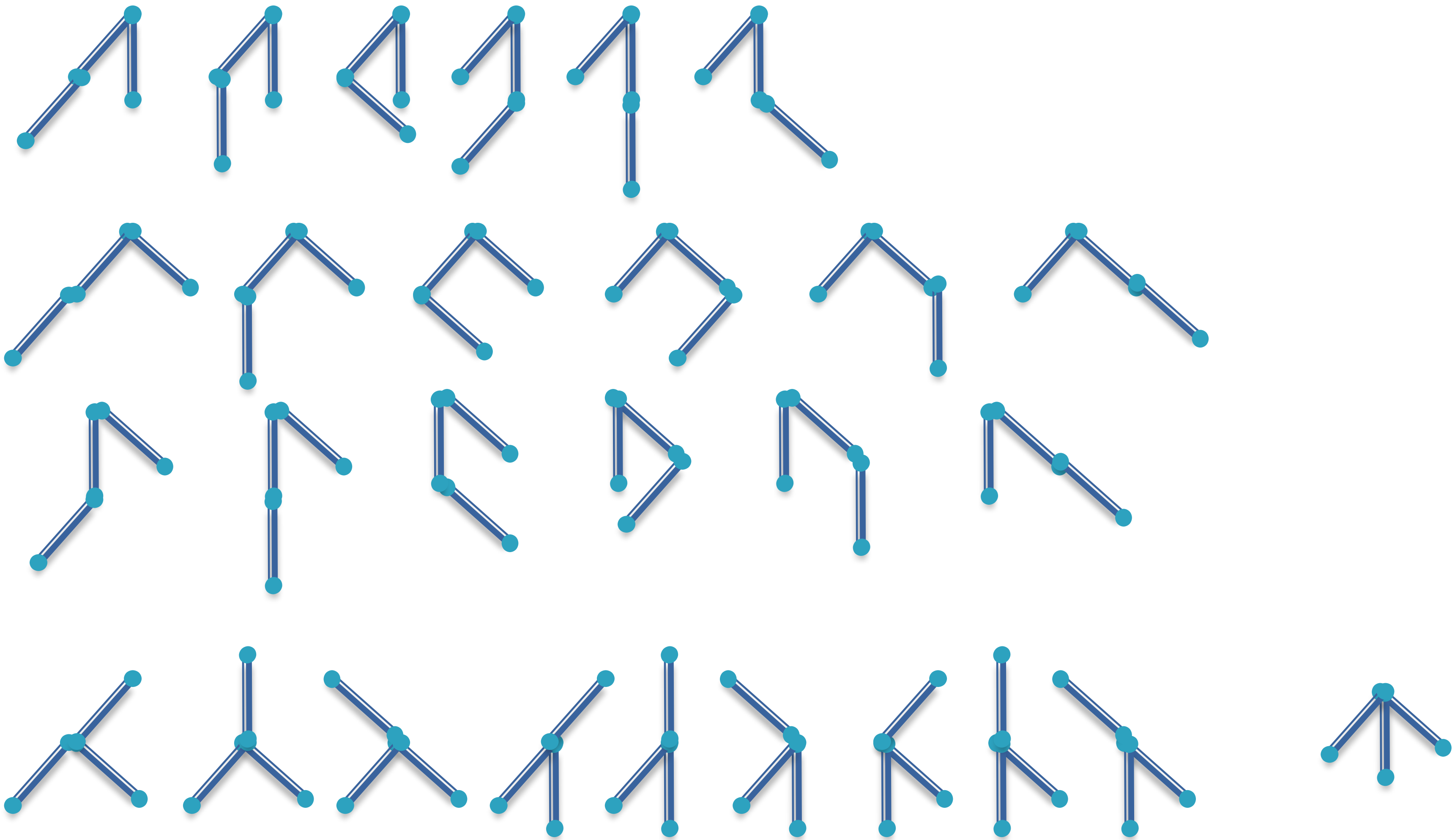
Сколько существует троичных деревьев с n вершинами?

n=4 => 55 деревьев



Троичные деревья

Сколько существует троичных деревьев с n вершинами?



Троичные деревья

T_n – всего троичных деревьев с n вершинами.

n	1	2	3	4
T_n	1	3	12	55

Числа Фусса-Каталана

$c_n(p, r) = \frac{n}{np+r}\binom{np+r}{n}$

Пример:

$c_n(2, 1) = \frac{1}{2n+1}\binom{2p+1}{n} = c\frac{1}{n+1}\binom{2p}{n}$

Теорема: $T_n = c_n(3, 1) = \frac{1}{3n+1}\binom{3n+1}{n}$

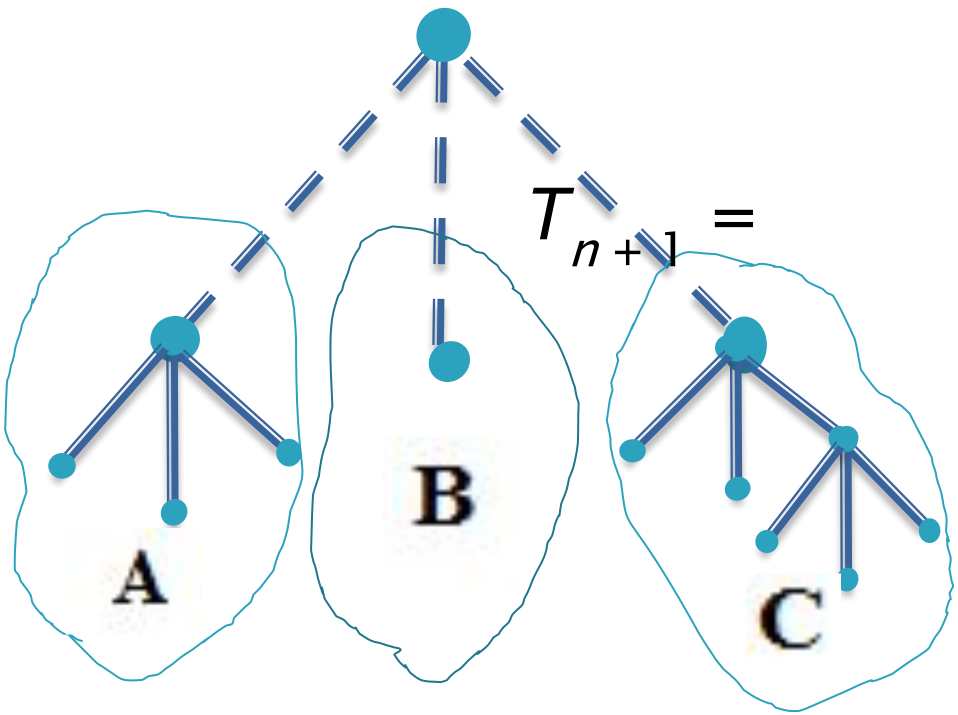
Доказательство теоремы

$t_n = c_n(3, 1)$

$t_{n+1} = \sum_{a+b+c=n} t_a t_b t_c = 1$

$T_{n+1} = \sum_{a+b+c=n} t_a t_b t_c, \; T_0 = 1$

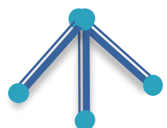
Доказательство теоремы



$$T_{n+1} = \sum_{a+b+c=n} t_a t_b t_c$$

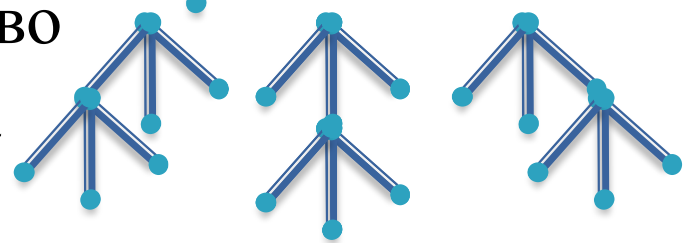
Строго троичные деревья

<u>Следствие</u> : Число строго троичных деревьев с 2n+1 листьями равно c_n

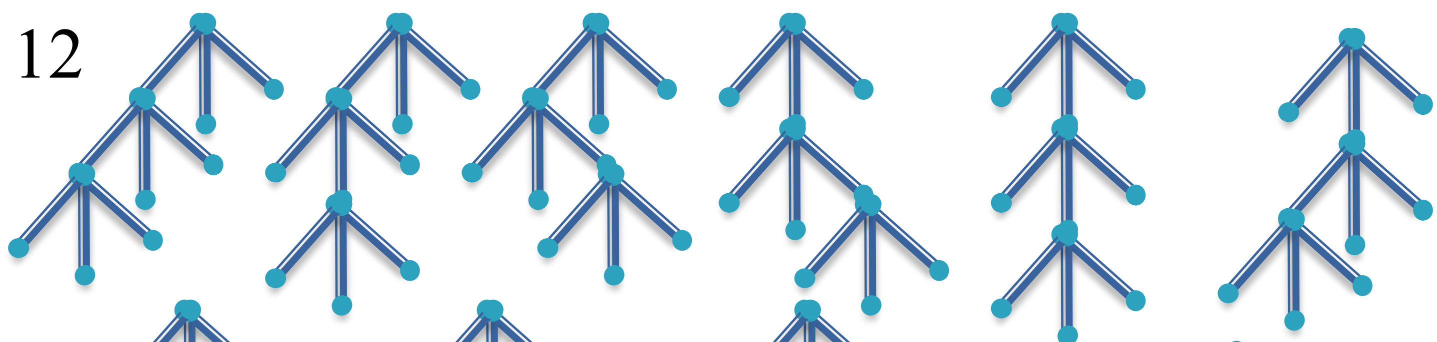


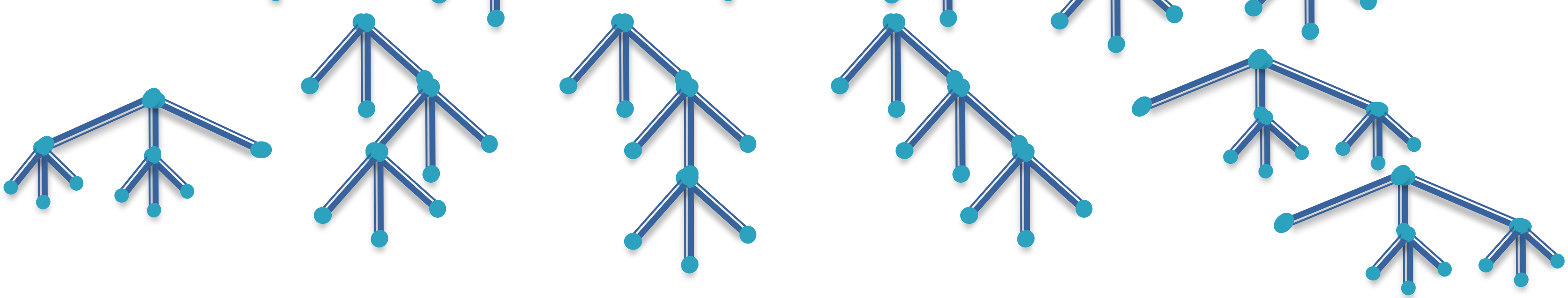
n=1 => 1 дерево

n=2 => 3 дерева

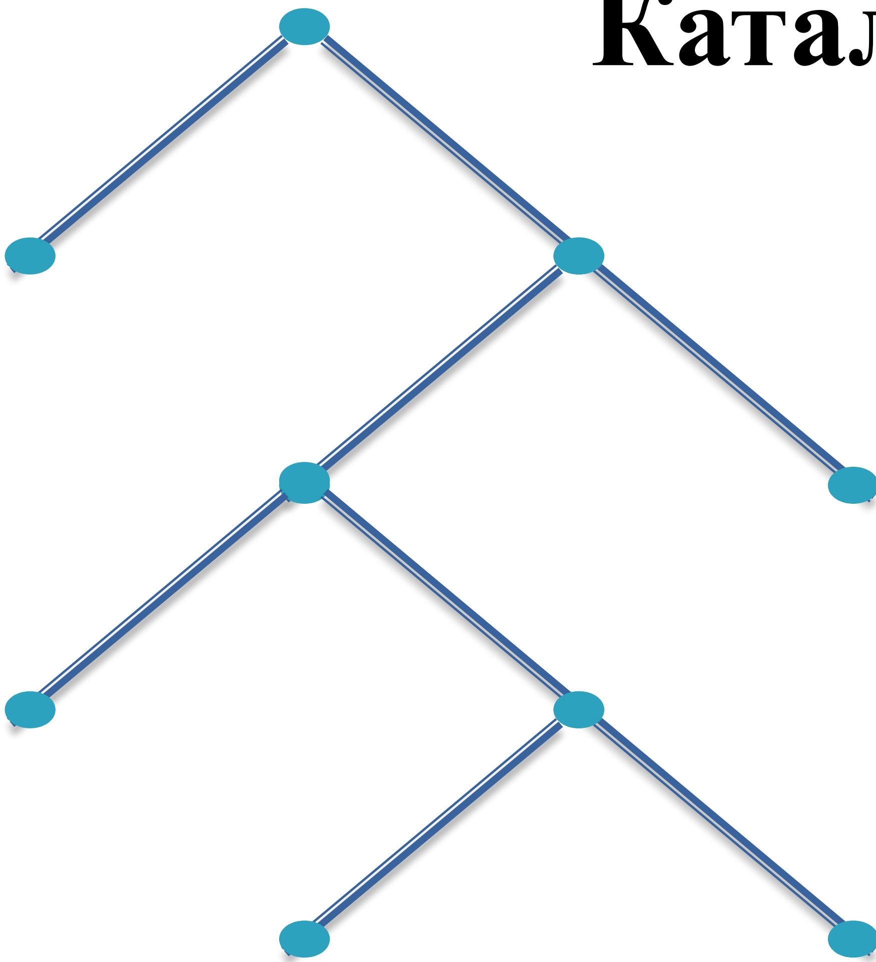


n=3 => 12





Плоские деревья и числа Каталана



Автор работы:
ученик 8 «Б» класса
МБОУ лицея «Технический»
Баев Даниил

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры
алгебры и геометрии СГАУ
Игнатьев Михаил Викторович