

# Лекция 9

- Вихревая линия, вихревая поверхность, вихревая трубка, вихревой жгут, вихрь
- Интенсивность или напряжение вихря
- Циркуляция скорости
- Теорема Стокса, следствие из теоремы Стокса
- Теоремы Гельмгольца
- Теорема Био-Савара
- Вихревые схемы крыла
- Метод дискретных вихрей

# Вихревая линия, вихревая поверхность,

**Определение 1.** Вихревой линией называют линию, в каждый момент времени вектор угловой скорости направлен по касательной к ней.

$$[\overset{\Delta}{\omega}, d\overset{\Delta}{r}] \equiv \overset{\Delta}{\omega} \times d\overset{\Delta}{r} = 0 \quad (09.1)$$

**Определение 2.** Если через каждую точку некоторой линии  $L$ , не являющейся вихревой линией, провести вихревые линии, то их совокупность образует **вихревую поверхность**.

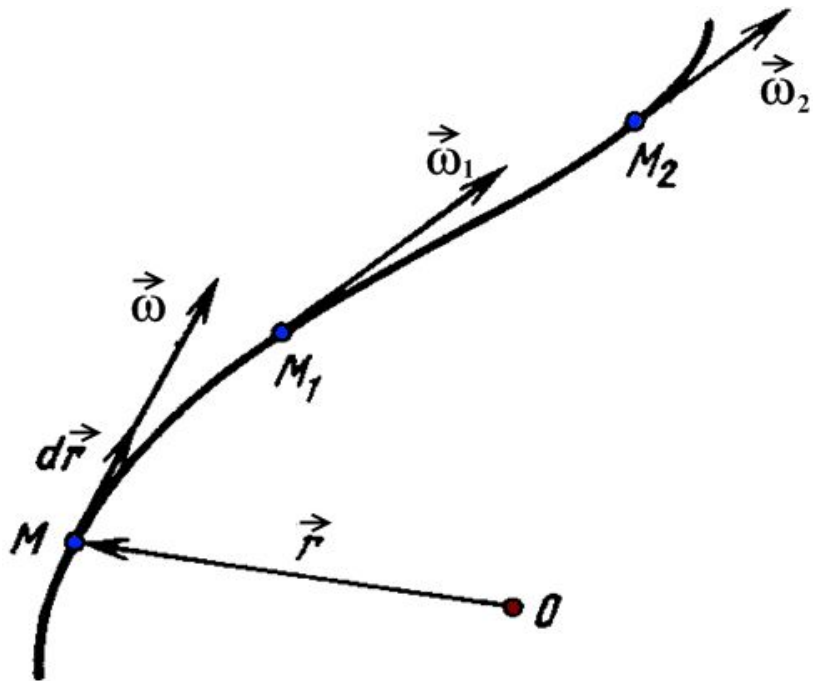


Рисунок 09.1 – Вихревая линия

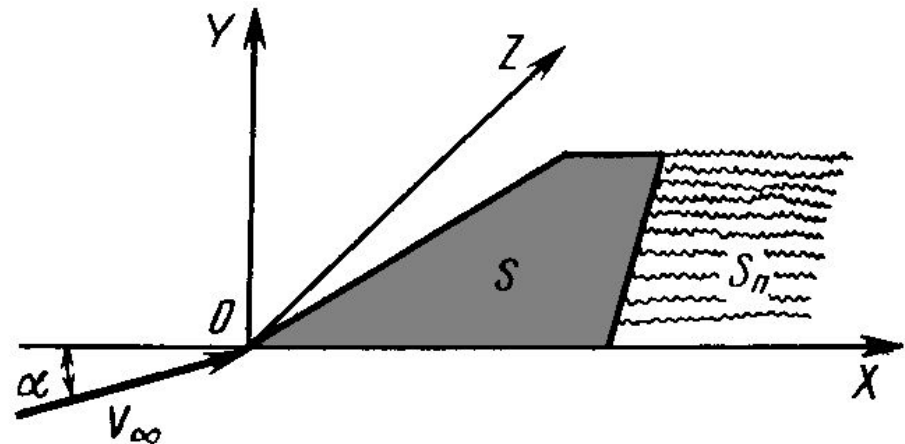


Рисунок 09.2 – Вихревая поверхность за крылом

# Дифференциальное уравнение вихревой линии

Условие коллинеарности двух векторов

$$[\overset{\boxtimes}{\omega}, d\overset{\boxtimes}{r}] \equiv \overset{\boxtimes}{\omega} \times d\overset{\boxtimes}{r} = 0 \quad (09.2)$$

$$\begin{vmatrix} \overset{\boxtimes}{i} & \overset{\boxtimes}{j} & \overset{\boxtimes}{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \overset{\boxtimes}{i} (\omega_y dz - \omega_z dy) + \overset{\boxtimes}{j} (\omega_z dx - \omega_x dz) + \overset{\boxtimes}{k} (\omega_x dy - \omega_y dx) = 0$$
$$(\omega_y dz - \omega_z dy) = 0 \quad (09.3)$$

$$(\omega_z dx - \omega_x dz) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}} \quad (09.4)$$

$$(\omega_x dy - \omega_y dx) = 0$$

Другое условие коллинеарности двух векторов

$$\boxed{\omega_x \cdot \lambda = dx; \quad \omega_y \cdot \lambda = dy; \quad \omega_z \cdot \lambda = dz}$$

# Вихревая трубка, вихревой жгут, вихрь, ИНТЕНСИВНОСТЬ ВИХРЯ

**Определение 3.** Если линия  $L$  является замкнутым контуром, то вихревая поверхность превращается в *вихревую трубку*.

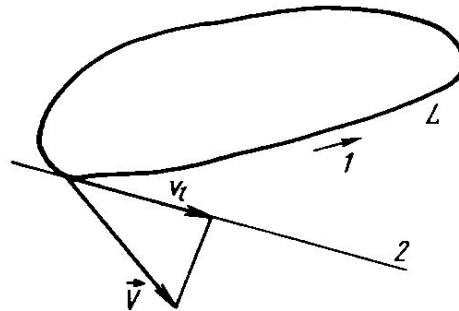
**Определение 4.** Вихревая трубка вместе с заключённым в ней вращающимся воздухом образует *вихревой жгут*, который обычно для краткости называют *вихрем*.

**Определение 5.** *Интенсивностью* или *напряжением* вихря  $J$  называют *удвоенный поток вектора угловой скорости* через поперечное сечение вихря  $S$

$$J = 2 \int_S (\vec{\omega}, \vec{n}) dS,$$

(09.5)

**Определение 6.** *Циркуляцией* скорости  $\Gamma$  по замкнутому контуру  $L$  называют криволинейный интеграл вида



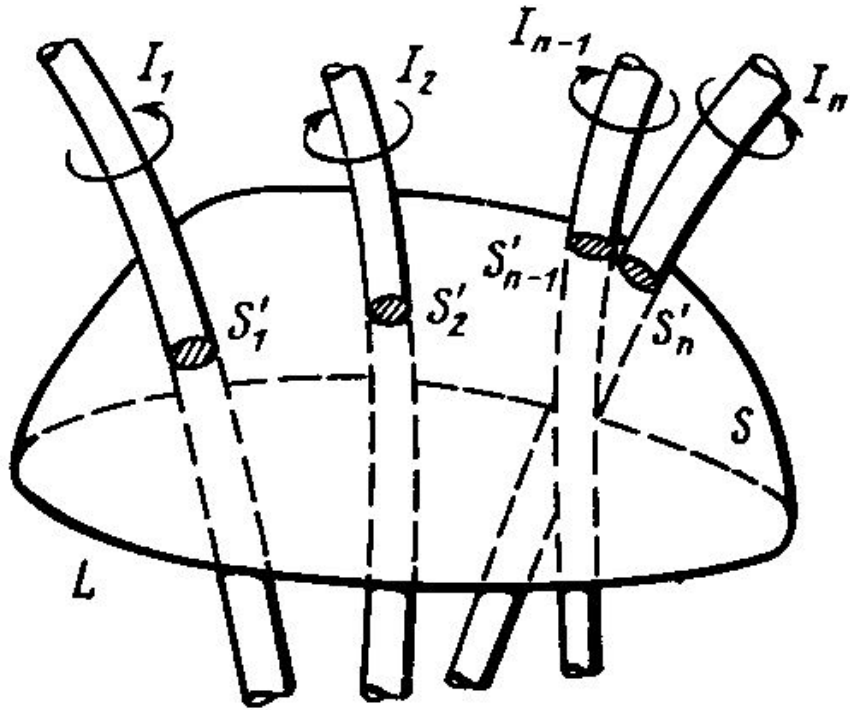
$$\Gamma = \oint_L v_L dL$$

(09.6)

Рисунок 9.3 – Определение циркуляции

# Теорема Стокса

**Теорема Стокса:** циркуляция скорости по замкнутому контуру  $L$  равна суммарной интенсивности вихрей, пересекающих произвольную поверхность  $S$ , опирающийся на этот контур



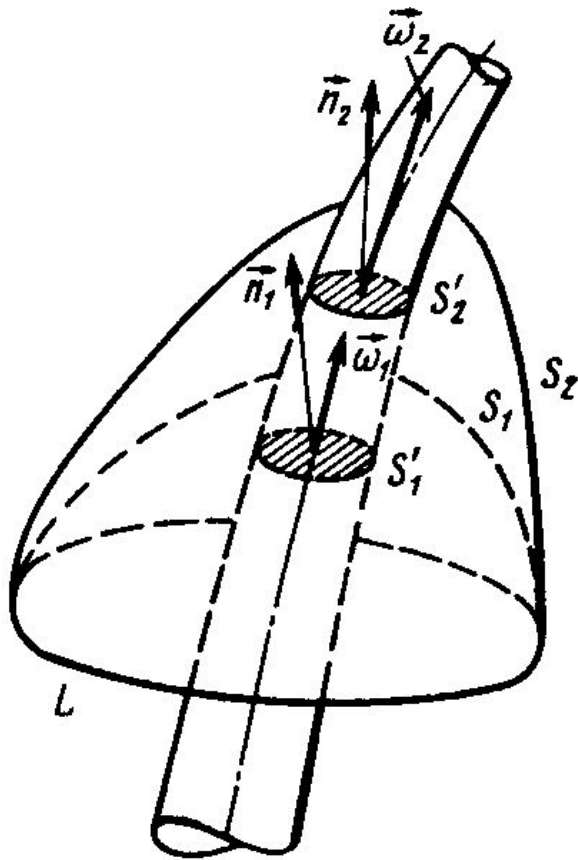
$$\Gamma = \oint_L v_l dL = \sum_{i=1}^n J_i = \sum_{i=1}^n 2 \oint_{S'_i} (\vec{\omega}, \vec{n}) dS \quad (09.7)$$

Для одного вихря

$$\Gamma = \oint_L v_l dL = J = 2 \int_{S'} (\vec{\omega}, \vec{n}) dS \quad (09.8)$$

Рисунок 9.4 – Вихри, пересекающие поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $L$

# Следствие из теоремы Стокса



$$\Gamma = \oint_L v_l dL = J_1 = 2 \int_{S'_1} (\vec{\omega}, \vec{n}) dS$$

$$\Gamma = \oint_L v_l dL = J_2 = 2 \int_{S'_2} (\vec{\omega}, \vec{n}) dS \Rightarrow J_1 = J_2$$

$$J = 2 \int_S (\vec{\omega}, \vec{n}) dS = 2 \int_S \omega_n dS = 2 \omega_{n\vec{n}\vec{\omega}} S = const$$

**Вывод: вихри обрываться не могут!**

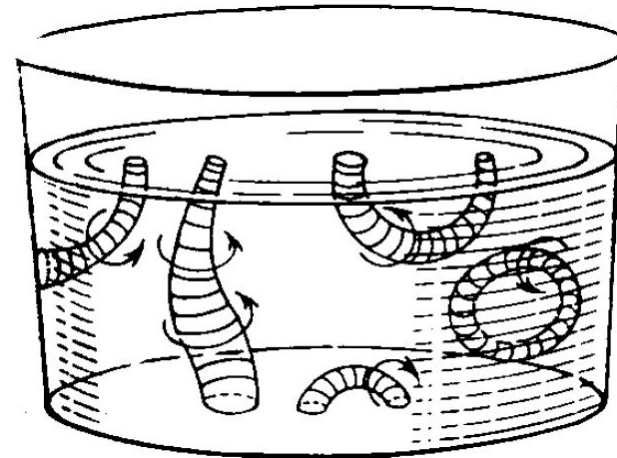


Рисунок 9.6 – Вихри, существующие в жидкости

Рисунок 9.5 – Вихрь, пересекающий две поверхности, опирающиеся на один и тот же контур  $L$

# Теоремы Гельмгольца

**Теорема 1.** *В непрерывных течениях идеального газа вихревая трубка с течением времени не разрушается и всегда остаётся вихревой трубкой.*

**Теорема 2.** *В непрерывных течениях идеального газа напряжение вихревого жгута с течением времени не изменяется.*

# Теорема Био-Савара

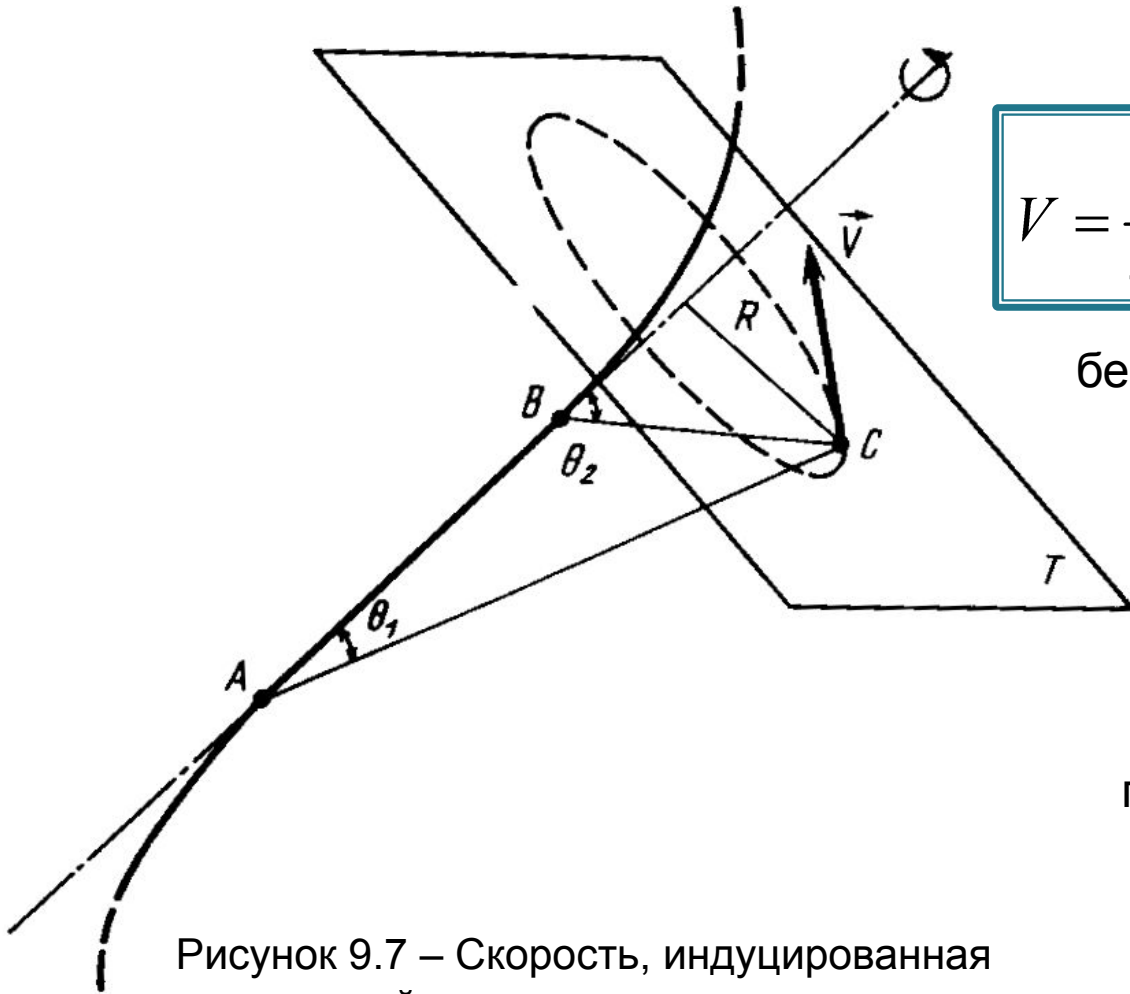


Рисунок 9.7 – Скорость, индуцированная прямолинейным отрезком вихря

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad (9.9)$$

бесконечный вихрь

$$\theta_1 = 0; \quad \theta_2 = \pi$$

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

полубесконечный вихрь

$$\theta_1 = 0; \quad \theta_2 = \pi/2$$

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R}$$



# Вихревые схемы крыла

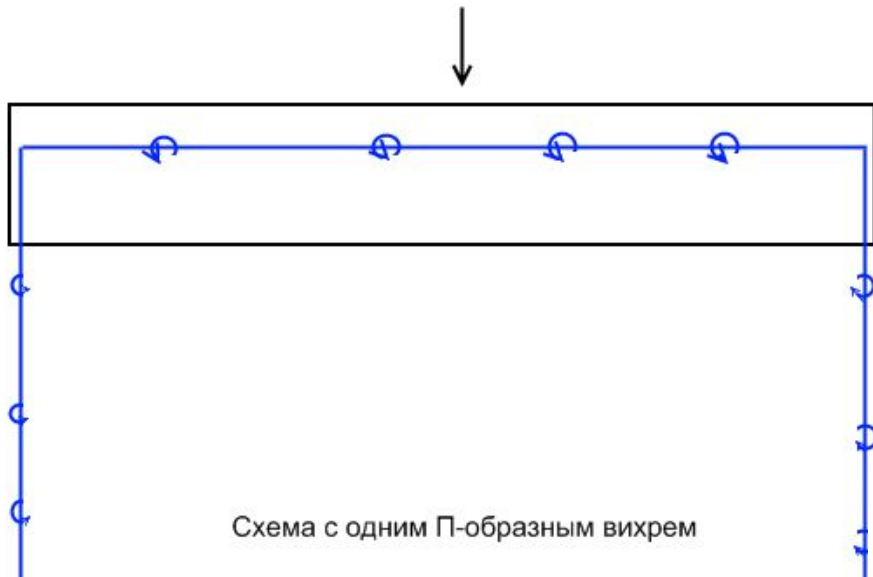


Схема с одним П-образным вихрем

Рисунок 9.10 – Один П-образный вихрь

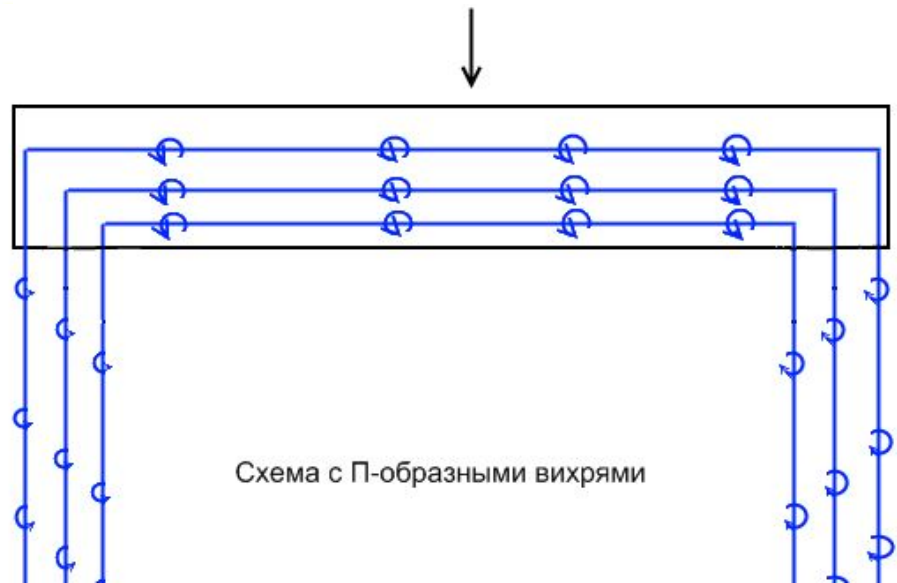


Схема с П-образными вихрями

Рисунок 9.10 – Схема с N П-образных вихрей

# Вихревые схемы крыла

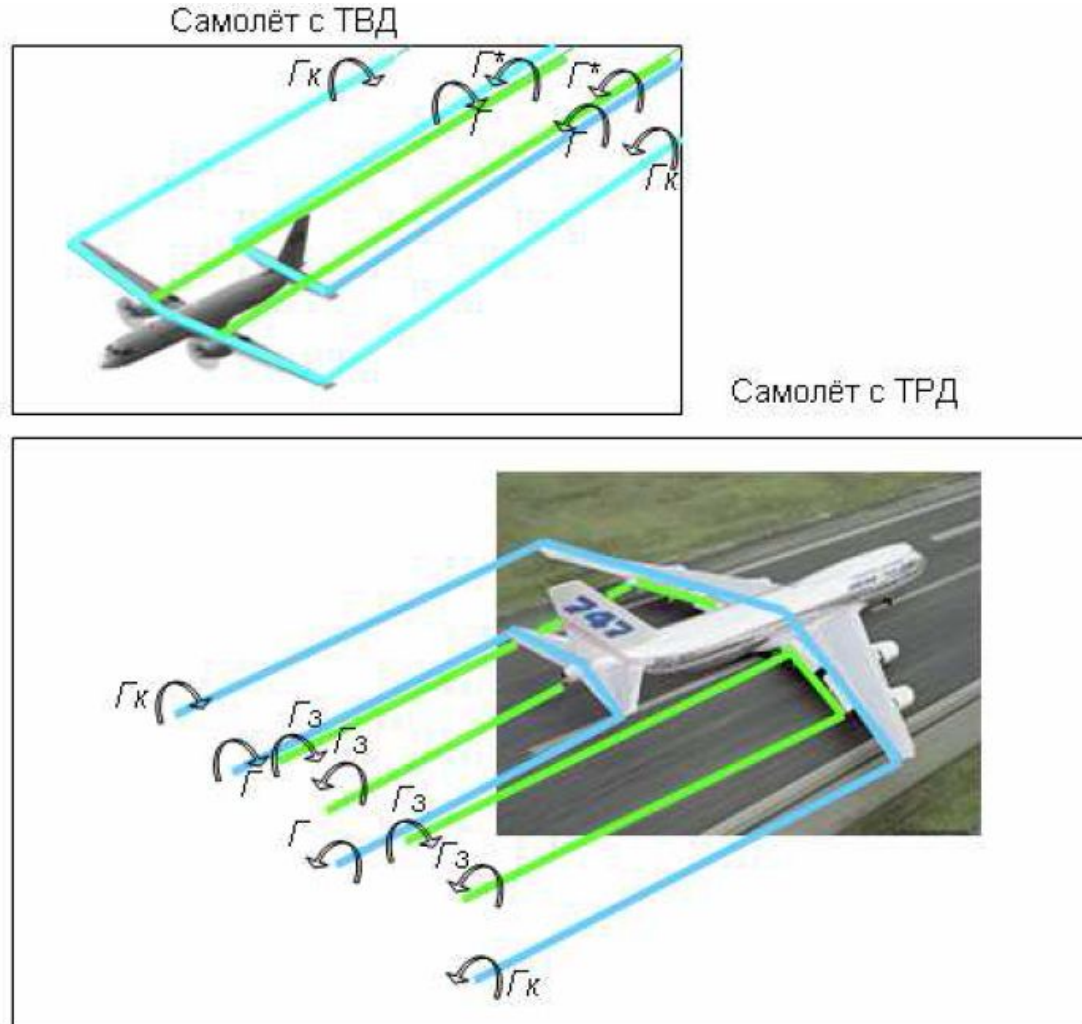


Рисунок 9.11 – Вихревые схемы для расчёта дальнего вихревого следа

[Желанников А.И. Оперативные методы расчёта характеристик вихревого следа за самолётами // Вестник Харьковского национального университета  
Серия «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» № 847, 2009, с.184-190

# Метод дискретных вихрей

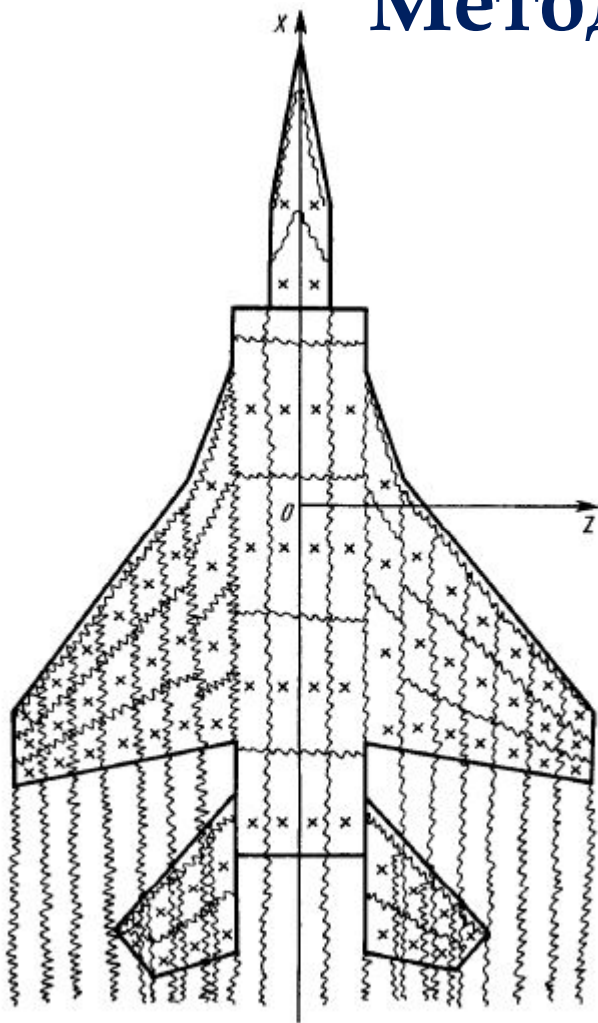


Рис. 10.5. Расчетная схема летательного аппарата при расчете по методу дискретных вихрей (линейная модель)

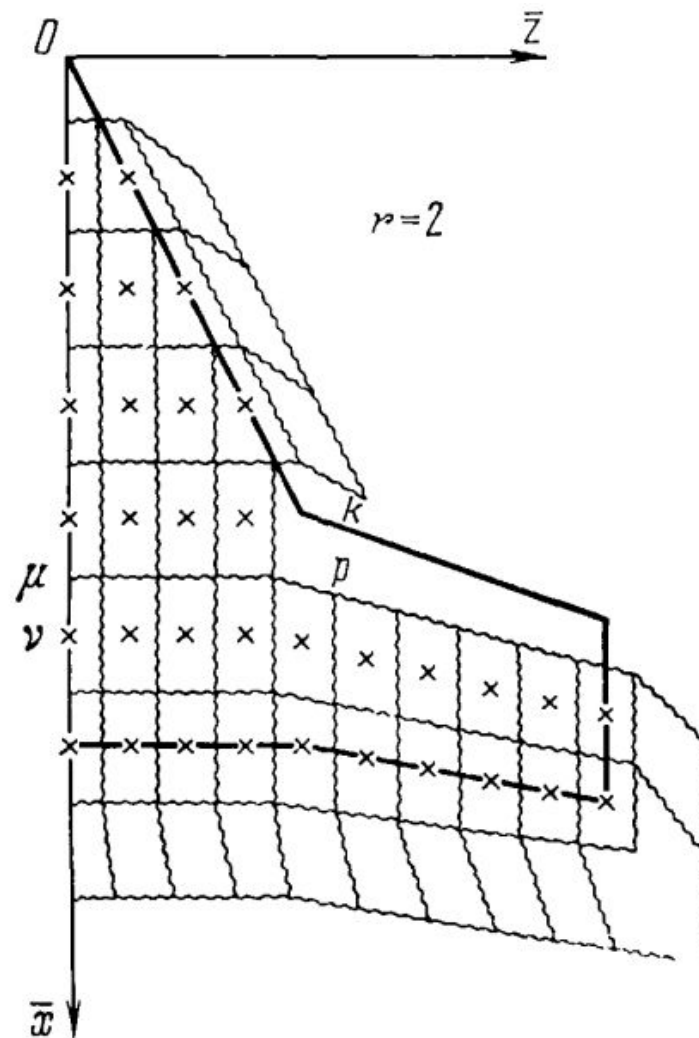


Рисунок 9.13 – Расчетная схема МДВ (нестационарная модель)

Рисунок 9.12 – Расчетная схема МДВ (линейная модель)

[Аэродинамика летательных аппаратов / Под ред. Колесникова Г.А., 1993, с. 391]

# Примеры расчётов по методу дискретных вихрей

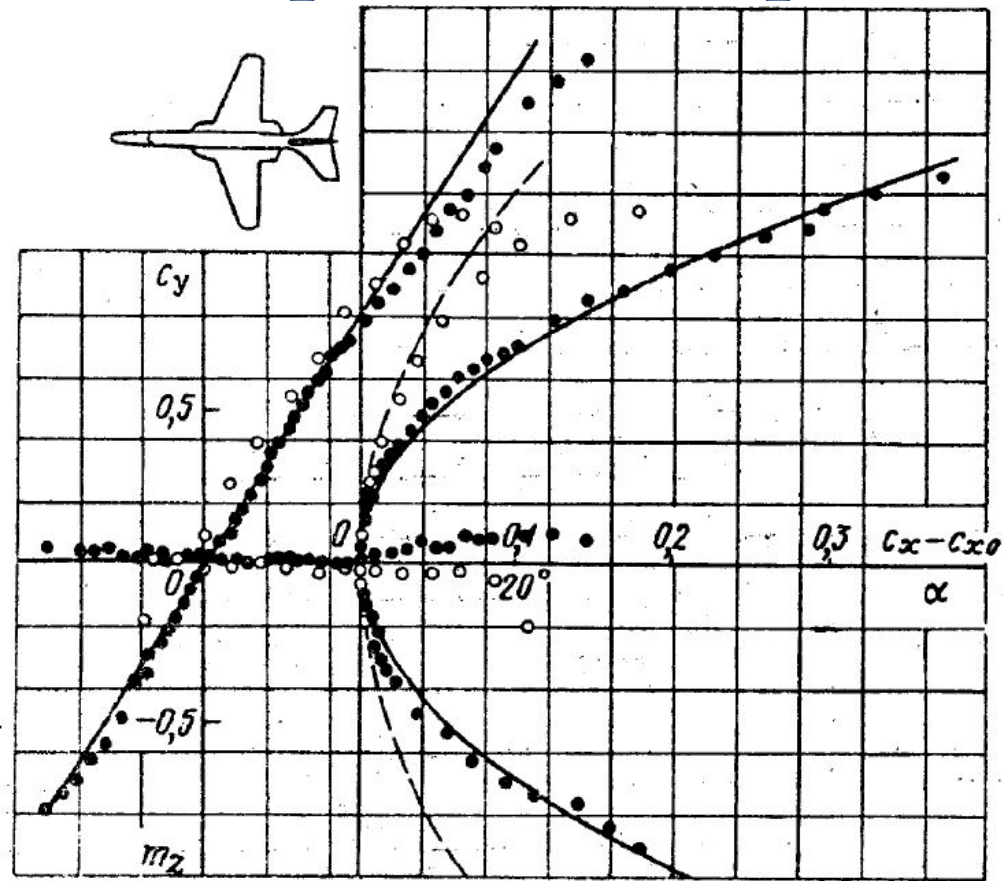


Рисунок 9.14 - Сравнение объёмных и плоских моделей с расчётом по МДВ

[Учёные записки ЦАГИ, том X, 1979, Ермоленко С.Д. и др.]

# Метод дискретных вихрей

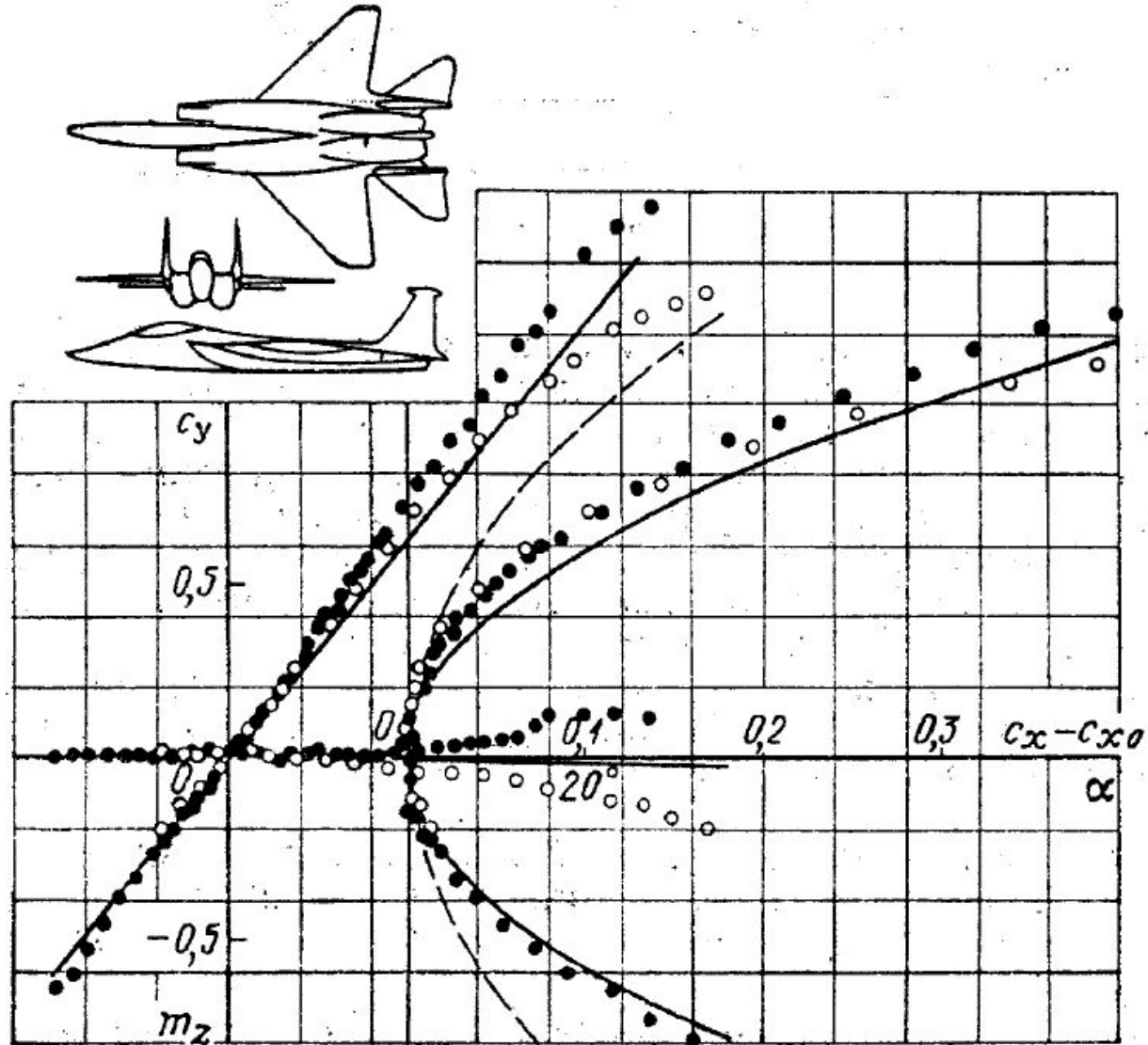


Рисунок 9.15 - Сравнение объёмных и плоских моделей с расчётом по МДВ

[Д. С. Фролов, С. Д. и др. Учёные записки ЦАГИ, том X, 1979.]

# Метод дискретных вихрей

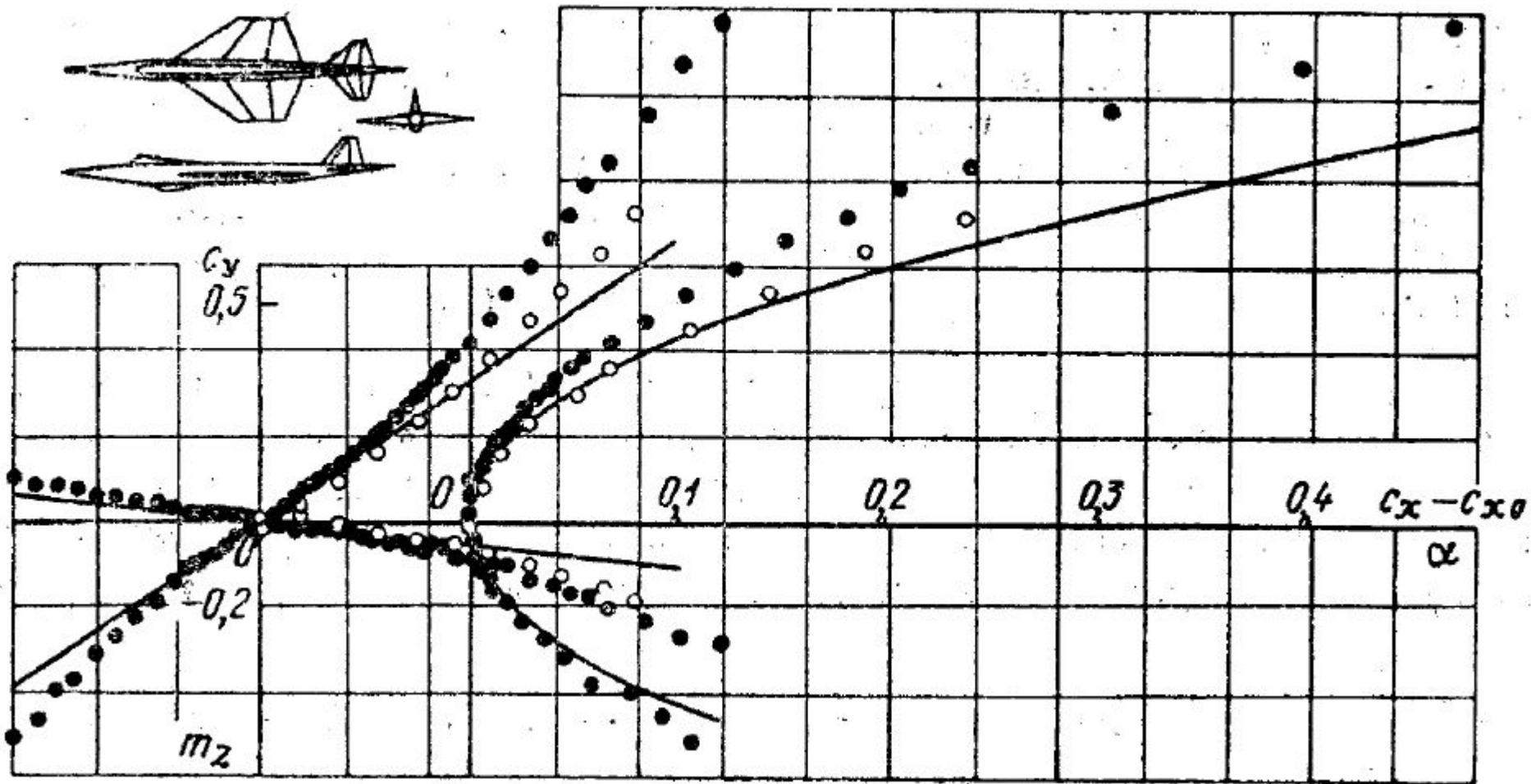


Рисунок 9.16 – Сравнение объёмных и плоских моделей с расчётом по МДВ  
[Ермоленко С.Д. и др. Учёные записки ЦАГИ, том X, 1979.]

# Примеры расчёта по нелинейной модели МДВ

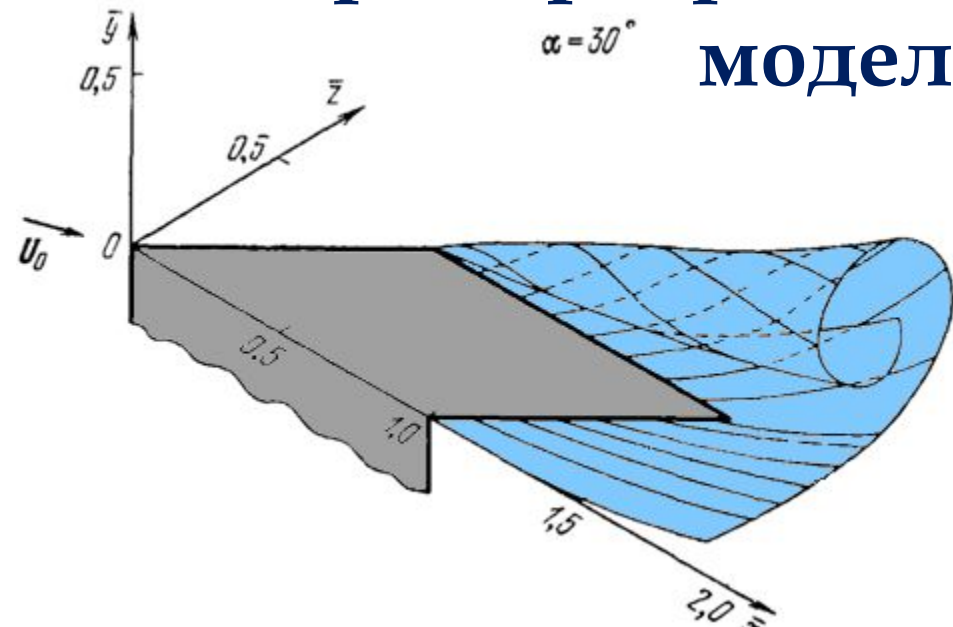


Рисунок 9.17 – Стационарная вихревая структура стреловидного крыла малого удлинения  $\lambda=1,0$   $\chi=45^\circ$   $\eta=1,0$

[Белоцерковский С.М. и др. 1978.]

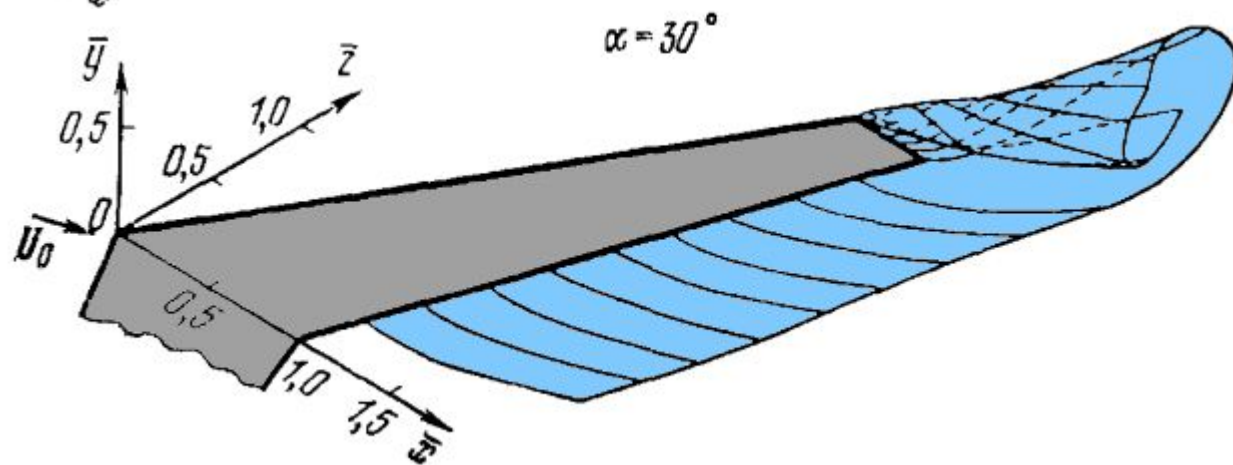


Рисунок 9.17 – Стационарная вихревая структура стреловидного крыла малого удлинения  $\lambda=7,5$   $\chi=30^\circ$   $\eta=2,5$

[Белоцерковский С.М. и др. 1978.]