Какие способы решения систем уравнений с двумя переменными нам известны?

— Метод подстановки;

— метод алгебраического сложения;

— метод введения новых переменных;

— графический метод.

Если поставлена задача – найти такие пары $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют уравнению $p(x; y) = 0$ и уравнению $q(x; y) = 0$, то говорят, что данные уравнения образуют систему уравнений

$$\begin{cases} p(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0. \end{cases}$$

Пару значений (x; y), которая одновременно является решением и первого и второго уравнения системы, называют решением системы уравнений.

Решить систему уравнений – значит найти все её решения или установить, что решений нет.

Система трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} p(x;\ y;\ z) = 0 \\ q(x;\ y;\ z) = 0 \\ r(x;\ y;\ z) = 0 \end{cases}$$

Две системы уравнений называют **равносильными**, если они имеют **одни и те же решения** или **решений не имеют**.

Равносильные способы решения систем уравнений:

— метод подстановки;

— метод алгебраического сложения;

— введения новых переменных.

Неравносильные преобразования:

— возведение в квадрат обеих частей уравнения;

— умножение уравнений системы;

— преобразования, приводящие к расширению области определения.

Проверка решений их подстановкой в исходную систему обязательна.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y + 2z = 4, \\ 2x + y + z = 1, \\ x + 2y + z = 3. \end{cases}$

Решение.

$4x + 4y + 4z = 8;$

$x + y + z = 2;$

$x + (x + y + z) = 1;$
$x + 2 = 1;$
$x = -1;$

$(x + y + z) + y = 3;$
$2 + y = 3;$
$y = 1;$

$(x + y + z) + z = 4;$
$2 + z = 4;$
$z = 2;$

Ответ: $(-1; 1; 2)$.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 1, \\ \log_3 x = \log_3(1 - y). \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} y = 1 - x, \\ \log_3 x = \log_3 x; \end{cases}$$

$$\log_3 x = \log_3 x;$$

$$x = \alpha \; (\alpha > 0) \; ;$$

$$y = 1 - \alpha;$$

Ответ: $(\alpha; 1 - \alpha)$, $\alpha > 0$.

Пример 3. Решить систему уравнений $\left[\begin{array}{l} y^2 + 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{array}\right.$

Решение.

$$\begin{array}{l} y^2 + 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y^2 + 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} y^2 + 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{array}\right.$$

(1; 1), (−1; −1);

$$\left[\begin{array}{l} y^2 + 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} y^2 + 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y^2 + 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y^2 + 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y^2 + 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y^2 + 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{array}$$

Пример 4. Решить систему уравнений $\begin{cases} y^2 + 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} y^2 + 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{cases}$$

(1; 0), (–2; 3);

Проверка.

$y^2 + 2xy - 3x^2 = 0,$
$y^2 + 3x^2 = 4.$

$y^2 + 2xy - 3x^2 = 0,$
$y^2 + 3x^2 = 4.$

$y^2 + 2xy - 3x^2 = 0,$
$y^2 + 3x^2 = 4.$

$x = -2$, $y = 3$:

1 = 1 – верное равенство;

$y^2 + 2xy - 3x^2 = 0,$
$y^2 + 3x^2 = 4.$

– неопределён;

Ответ: (1; 0).