Теория вероятностей и математическая статистика

“Элементы комбинаторики”

Тема 2

План лекции

1. Факториал
2. Основные формулы комбинаторики
   1) размещение
   2) перестановки
   3) сочетания
3. Бином Ньютона

Определение

Комбинаторика или теория конечных множеств – это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Факториал

Факториалом натурального числа ***n*** называется произведение последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно

$$n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * n$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = (n-1)!*n$$

$$n! = (n-2)!*(n-1)*n$$

1. Размещение

Пусть дано множество, состоящее из n элементов: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

Размещениями из n элементов по m называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \qquad (n > m)$$

2. Перестановки

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

Всякое его упорядоченное подмножество, состоящее из n элементов, называется ***перестановкой из n элементов (т.е. n=m).***

$$P_n = A_n^m = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

3. Сочетания

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

Всякое его подмножество, состоящее из m элементов, называется ***сочетанием из n элементов по m.***

Число сочетаний без повторений из n элементов по m может быть вычислено по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! * m!}, (n \geq m)$$

4. Размещение с повторением

Размещение с повторением – упорядоченные m-элементные подмножества, которые отличаются и элементами, и порядком их следования, и возможностью повтора.

Число всех размещений с повторениями из n элементов по m можно вычислить по формуле:

$$\widehat{A}_n^m = n^m$$

5. Перестановки с повторениями

Перестановки с повторениями – упорядоченные подмножества, в которых первый элемент повторяется n_1 раз, второй элемент – n_2 раз, k-й элемент – n_k раз, причем

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

Число перестановок с повторениями можно вычислить по формуле:

$$\widehat{P}_n(n_1, n_2, \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1! * n_2! *. \; . \; .* n_k!}$$

6. Сочетания с повторениями

Сочетания с повторениями – это m-элементные подмножества, n-элементного множества, которые отличаются только элементами и возможностью повтора.

Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по m можно вычислить по формуле:

$$\widehat{C}_n^m = C_{n+m-1}^m, = \frac{(m+n-1)!}{m! * (n-1)!} \ (n \geq m)$$

Основные правила комбинаторики

1.Правило сложения

Если требуется осуществить последовательно какие-либо *k* действий, причем первое можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и т.д., то все k действий вместе могут выполнены $n_1+n_2+\ldots+n_k$ способами

2.Правило умножения

Если требуется осуществить последовательно какие-либо *k* действий, причем первое можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и т.д., то выполнить хотя бы одно из этих действий можно $n_1*n_2*\ldots*n_k$ способами

Бином Ньютона

Бином – алгебраическая сумма двух любых чисел.

$$(a+b)^n = \sum_{0}^{n} C_n^k * a^{n-k} * b^k$$

C_n^k - биномиальные коэффициенты

правая часть формулы – разложение бинома

Свойства биномиальных коэффициентов

1. $C_n^1 = n$
2. $C_n^0 = C_n^n = 1$
3. $C_n^m = C_n^{n-m}$ биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов, равны между собой.
4. $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \ldots + \mathrm{C}_n^n = 2^n$

треугольника Паскаля

n	C_n^k
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1