

Теория вероятностей и
математическая статистика
**“Элементы
комбинаторики
”**

Тема 2



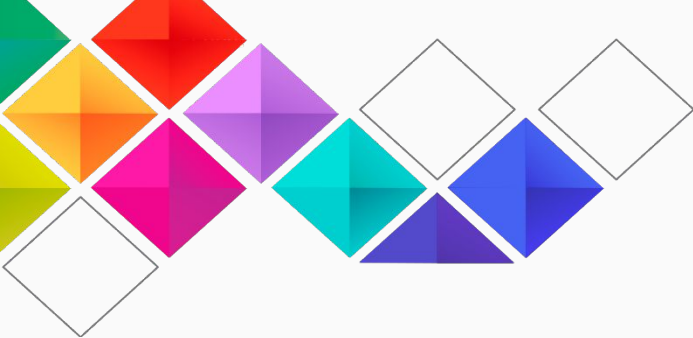
План лекции

1. Факториал
2. Основные формулы комбинаторики
 - 1) размещение
 - 2) перестановки
 - 3) сочетания
3. Бином Ньютона



Определени е

Комбинаторика или теория конечных множеств – это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.



Факториал

Факториалом натурального числа n называется произведение последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно

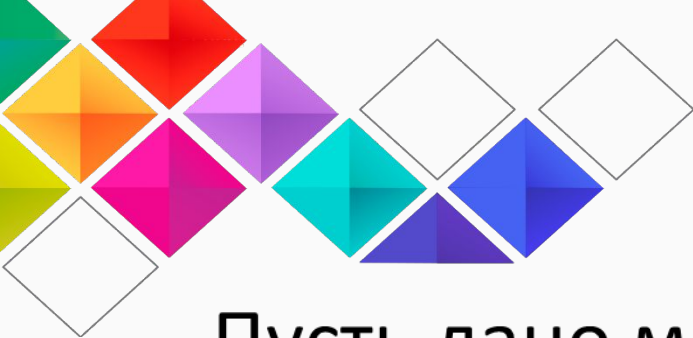
$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = (n-1)! * n$$

$$n! = (n-2)! * (n-1) * n$$

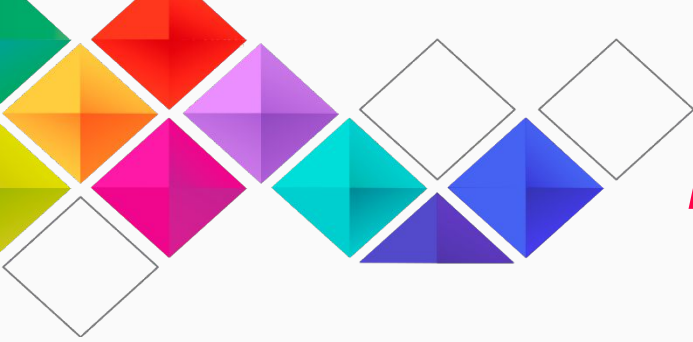


1. Размещение

Пусть дано множество, состоящее из n элементов: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$.

Размещениями из n элементов по m называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}, \quad (n > m)$$



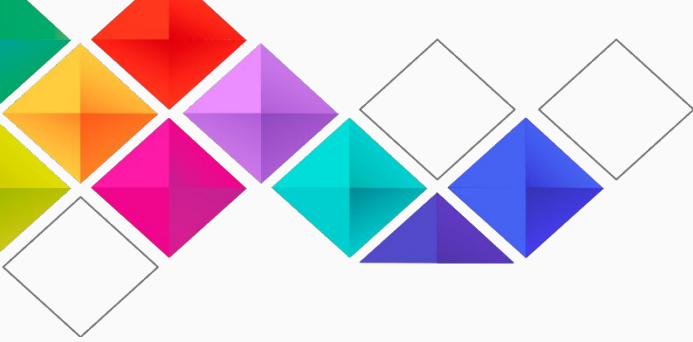
2.

Перестановки

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

Всякое его упорядоченное подмножество, состоящее из n элементов, называется *перестановкой из n элементов (т.е. $n=m$)*.

$$P_n = A_n^m = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$



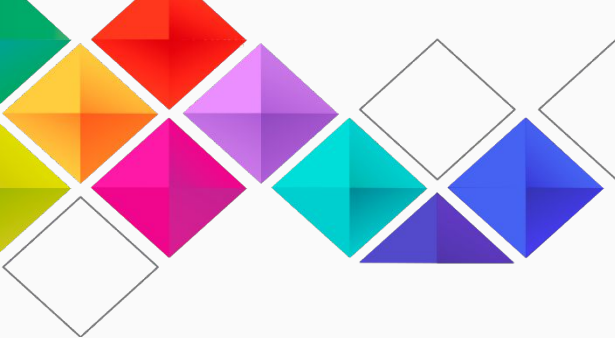
3. Сочетания

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

Всякое его подмножество, состоящее из m элементов, называется **сочетанием из n элементов по m** .

Число сочетаний без повторений из n элементов по m может быть вычислено по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n - m)! * m!}, (n \geq m)$$



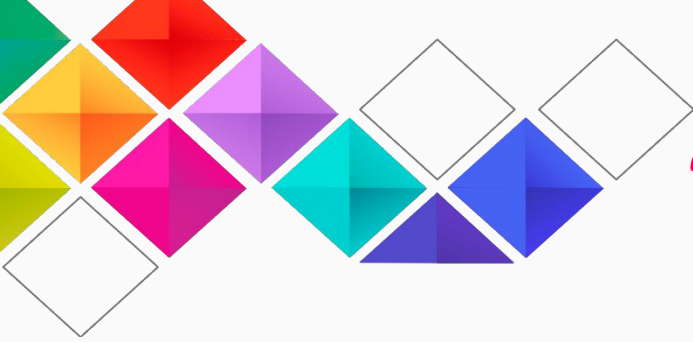
4. Размещение с повторением

Размещение с повторением –

упорядоченные m -элементные подмножества, которые отличаются и элементами, и порядком их следования, и возможностью повтора.

Число всех размещений с повторениями из n элементов по m можно вычислить по формуле:

$$\hat{A}_n^m = n^m$$



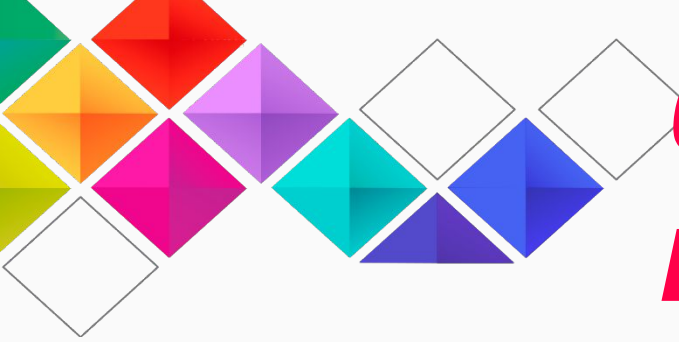
5. Перестановки с повторениями

Перестановки с повторениями – упорядоченные подмножества, в которых первый элемент повторяется n_1 раз, второй элемент – n_2 раз, k -й элемент – n_k раз, причем

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

Число перестановок с повторениями можно вычислить по формуле:

$$\hat{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_k!}$$

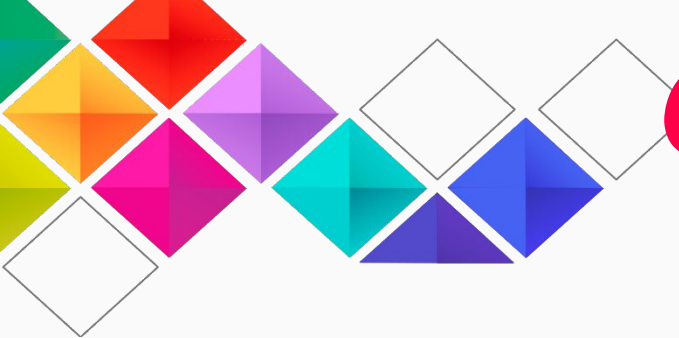


6. Сочетания с повторениями

Сочетания с повторениями – это m -элементные подмножества, n -элементного множества, которые отличаются только элементами и возможностью повтора.

Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по m можно вычислить по формуле:

$$\widehat{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(m+n-1)!}{m! * (n-1)!} \quad (n \geq m)$$



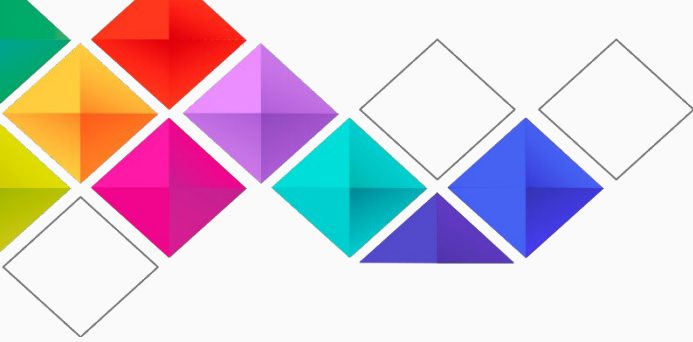
Основные правила комбинаторики

1. Правило сложения

Если требуется осуществить последовательно какие-либо k действий, причем первое можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и т.д., то все k действий вместе могут выполнены $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ способами

2. Правило умножения

Если требуется осуществить последовательно какие-либо k действий, причем первое можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и т.д., то выполнить хотя бы одно из этих действий можно $n_1 * n_2 * \dots * n_k$ способами



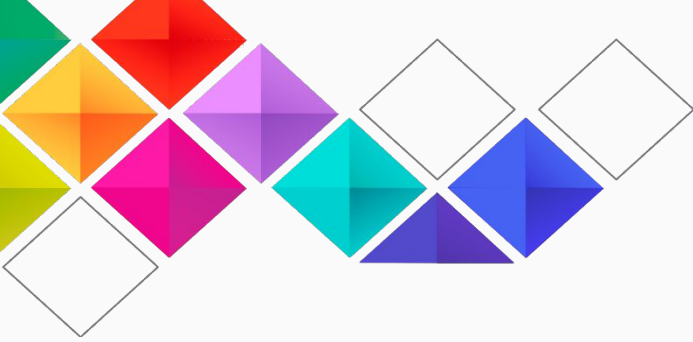
Бином Ньютона

Бином – алгебраическая сумма двух любых чисел.

$$(a + b)^n = \sum_0^n C_n^k * a^{n-k} * b^k$$

C_n^k - биномиальные коэффициенты

правая часть формулы – разложение бинома



Свойства биномиальных коэффициентов

1. $C_n^1 = n$

2. $C_n^0 = C_n^n = 1$

3. $C_n^m = C_n^{n-m}$ биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов, равны между собой.

4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$



треугольника Паскаля

n	C_n^k																				
0	1																				
1	1		1																		
2	1			2		1															
3	1				3		3		1												
4	1					4		6		4		1									
5	1						5		10		10		5		1						
6	1							6		15		20		15		6		1			
7	1								7		21		35		35		21		7		1