Семинар №1

Логические функции, представляющие собой дизъюнкции отдельных членов, каждый из которых, есть некоторая функция, содержащая только конъюнкции, называют логическими функциями *дизъюнктивной нормальной формы* (ДНФ), например:

$$f_{СДНФ} = (a \cdot b \cdot c) \vee (a \cdot c).$$

Если же каждый член дизъюнкции нормальной формы от n аргументов содержит все эти аргументы, часть которых входит в него с инверсией, а часть – без нее, то такая форма представления функции называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ):

$$f_{СДНФ} = (a \cdot b \cdot c) \vee (a \cdot \overline{b} \cdot c) \vee (a \cdot b \cdot \overline{c}).$$

Каждая конъюнкция этой дизъюнкции включает каждую переменную только один раз в прямом или инверсном виде, обращаясь в единицу при определенном наборе значений переменных, носит название *конституента единицы* или *минтерм*.

Логические функции, представляющие собой конъюнкцию отдельных членов, каждый из которых есть функция содержащая только дизъюнкции прямых или инверсных значений аргументов, называются логическими функциями *конъюнктивной нормальной формы* (КНФ), например:

$$f_{СДНФ} = (a \vee \overline{b} \vee c)(b \vee c).$$

Если каждый член конъюнктивной нормальной формы от n аргументов содержит все эти аргументы, часть которых входит в него с инверсией, а часть – в прямом виде, то такая форма представления функции называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ), например:

$$f_{\text{СДНФ}} = (a \vee \overline{b} \vee c)(a \vee b \vee \overline{c}).$$

Каждая дизъюнкция этой конъюнкции включает каждую переменную только один раз, обращаясь в ноль при определенном наборе переменных, и носит название *конституента нуля* или *макстерм*.

Правило перехода от табличного задания переключательной функции к ее записи в СДНФ заключается в следующем:

1. Составить минтермы для строк таблицы истинности на которых функция F равна 1. Если значение переменной в этой строке равно 0, то в минтерме записывается отрицание этой переменной.

2. Записать дизъюнкцию составленных минтермов, которая будет представлять переключательную функцию в СДНФ.

Это правило называют *правилом записи переключательной функции по единицам.*

Количество переменных, содержащихся в логическом выражении (минтерме или макстерме) называется рангом. В приведенных примерах макстермы и минтермы имеют третий ранг.

Таблица 1.4.

Номер набора	c	b	a	F
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Пусть переключательная функция f(A, B, C) задана таблицей истинности (табл. 1.4).
Запись этой переключательной функции в СДНФ будет иметь следующий вид:

$$F_{\text{СДНФ}} = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c \vee \overline{a}\,b\,c \vee abc/$$

Алгоритм перехода от табличного значения переключательной функции к ее записи в СКНФ заключается в следующем:

1. Составить макстермы для строк таблицы истинности, на которых функция у равна 0. Если значение переменной (a, b, c) в этой строке равно 1, то в макстерм записывается отрицание этой переменной.

2. Записать конъюнкцию составленных макстермов.

Для таблицы истинности (табл. 1.5) переключательная функция в СКНФ будет иметь вид:

$$F_{\text{СКНФ}} = (a \vee b \vee \text{c}) \wedge (a \vee b \vee \overline{c}) \wedge (a \vee \overline{b} \vee \overline{c}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c}).$$

Если минтермам (макстермам) присвоить индекс (порядковый номер в таблице 3.4), то переключательная функция может быть записана:

$$F_{\text{СДНФ}} = M_0 \vee M_1 \vee M_3 \vee M_7,$$

$$F_{\text{СКНФ}} = m_2\, m_4\, m_5\, m_6\,.$$

Не полностью определенные переключательные функции – функции, для которых не определено их значение хотя бы на одном наборе переменных. В этом случае при записи функции в СДНФ или СКНФ данному набору можно присвоить Ф (функционал, т.е. значение 0 или 1). Доопределение такой функции производится на разных этапах обработки функции в зависимости от конкретной задачи, например, при *логической минимизации*.

На практике, как правило, используется запись функций в СДНФ. В связи с этим рассмотрим способ перехода от записи функции в ДНФ к СДНФ. Для перехода от ДНФ к СДНФ необходимо в каждый из членов, в которых представлены не все аргументы, ввести сомножители вида $(a \vee \overline{a})$, где a – отсутствующий в члене аргумент. Так как $(a \vee \overline{a}) = 1$, то такая операция не может изменить значения функции.

Покажем переход от ДНФ к СДНФ на примере следующего выражения:

$$f(a, b, c) = a\,b \vee \overline{b}\,c.$$

Добавление в члены выражений недостающих аргументов $(c \vee \overline{c})$ и $(a \vee \overline{a})$ приведет к виду:

$$f(a, b, c) = a\,b\,(c \vee \overline{c}) \vee \overline{b}\,c\,(a \vee \overline{a}) = a\,b\,c \vee a\,b\,\overline{c} \vee a\,\overline{b}\,c \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c.$$

Полученная форма является СДНФ.

Функционально полные системы переключательных функций

Система элементарных булевых функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ называется *функционально полной,* или *базисом*, если любую функцию алгебры логики можно представить в виде их суперпозиции функций. Имея логические элементы, осуществляющие операции $f_0 - f_{15}$ можно выполнить любую сложную функцию. Однако условие наличия 16 различных типов логических элементов, каждый из которых реализует одну из 16 элементарных операций, является условием, достаточным, но не необходимым. Для синтеза логического устройства любой сложности можно ограничиваться меньшим набором элементарных функций. Последовательно исключая из базиса избыточные функции, можно получить *минимальный базис*. Под минимальным базисом понимают такой набор функций, исключение из которого любой функций превращает этот набор в неполную систему функций.

Возможны различные базисы и минимальные базисы, различающиеся числом входящих в них функций и видом этих функций. Выбор базиса связан с тем, насколько просто, удобно и экономично технически выполнять элементы, реализующие элементарные функции, которые входят в выбранный базис, и устройство в целом.

Функционально полными системами являются базисы (табл. 1.5):

Таблица 1.5

Базис	Наименование	Базис	Наименование
1	И, ИЛИ, НЕ	4	И – НЕ
2	И, НЕ	5	ИЛИ – НЕ
3	ИЛИ, НЕ	6	И – ИЛИ, НЕ

Базис И, ИЛИ, НЕ принято называть *основным*, так как любая сложная переключательная функция может быть записана в СДНФ или СКНФ. Базисы И, НЕ и ИЛИ, НЕ называют *универсальными*. Эти базисы приобрели большое значение в связи с широким использованием интегральных логических элементов при построении логических устройств.

Минимизация переключательных функций

Метод логических преобразований

Минимизация – процесс приведения булевых функций к такому виду, который допускает наиболее простую (с наименьшим числом элементов) физическую реализацию функции. Частная задача минимизации булевой функции сводится к такому представлению заданной функции, которое содержит наименьшее возможное число букв и наименьшее возможное число операций над ними, так как каждой элементарной логической функции соответствует определенный физический элемент.

Оценить различные представления одной и той же булевой функции, например ДНФ, можно по количеству входов логических элементов, реализующих заданную функцию. Такую оценку реализации булевой функции называют ценой реализации функции по Квайну (Мак-Класки) или ценой покрытия булевой функции системой логических элементов. Для минимизации переключательных функций применяют различные методы: последовательного исключения переменных с помощью законов алгебры логики, методом Квайна, карт Карно (Вейча) и др.

Метод последовательного исключения переменных с помощью законов и тождеств алгебры логики является наиболее простым методом минимизации. Любое упрощение переключательной функции происходит при вынесении за скобки общих множителей из минтермов, суммирование которых приводит к исключению отдельных переменных. Процесс подбора пары минтермов, сопровождающийся понижением ранга переменной, называется *склеиванием* минтермов.

В качестве примера рассмотрим минимизацию переключательной функции

$$F_{\text{СДНФ}} = a\bar{b}\,\bar{c} \vee a\,b\,\bar{c} \vee a\,b\,c$$

методом последовательного исключения переменных. Сгруппируем первый минтерм со вторым, второй с третьим и проведем логические преобразования:

$$F = (a\bar{b}\,\bar{c} \vee a\,b\,\bar{c})(a\,b\,\bar{c} \vee a\,b\,c) = a\,\bar{c}\,(\bar{b} + b) \vee a\,b\,(\bar{c} + c) = a\,\bar{c} + a\,b.$$

Коньюнкции $a\bar{c}$, $a\,b$ входящие в такую сокращенную нормальную форму, называются *импликантами.*

Простые *импликанты* – элементарные *конъюнкции наименьшего ранга*, входящие в данную булеву функцию.

Сокращенной дизъюнктивной нормальной формой булевой функции называется такая функция, которая равна дизъюнкции всех своих простых импликант. Несмотря на то, что сокращенная ДНФ булевой функции содержит меньшее число букв, чем СДНФ этой функции, она в большинстве случаев допускает *упрощение* за счет поглощения некоторых простых импликант дизъюнкцией других простых импликант. В случае, если в дизъюнкции простых импликант, представляющих заданную функцию, ни одну из импликант исключить нельзя, то такую дизъюнкцию называют *тупиковой* дизъюнктивной нормальной формой.

Выявление групп минтермов, отличающихся между собой комбинациями одних и тех же переменных, при большом числе переменных является задачей довольно сложной. Кроме того, некоторые минтермы могут входить одновременно в несколько групп и, следовательно, задача образования групп не может быть решена однозначно. Группируя минтермы различными способами, можно получить различные упрощенные формы заданной функции. Возможно, что получена одна из тупиковых форм, но нельзя быть уверенным, что она является минимальной.

Метод Квайна

Метод Квайна применяется для переключательных функций невысокого ранга при условии, что исходные функции заданы в СДНФ. Метод Квайна выполняется в два этапа: на первом этапе осуществляется переход от канонической формы СДНФ к сокращенной, на втором этапе – переход от сокращенной формы логического выражения к минимальной.

Пусть задана функция:

$$F_{СДНФ} = \bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a} \vee \bar{c}\,\bar{b}\,a \vee \bar{c}\,b\,\bar{a} \vee c\,\bar{b}\,a \vee a\,b\,c$$

Составим следующие пары минтермов:

1. $\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a} \vee \bar{c}\,\bar{b}\,a = \bar{c}\,\bar{b}\,(\bar{a} \vee a) = \bar{c}\,\bar{b}$
2. $\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a} \vee \bar{c}\,b\,\bar{a} = \bar{c}\,\bar{a}\,(\bar{b}\,\bar{a} \vee b) = \bar{c}\,\bar{a}$
3. $\bar{c}\,\bar{b}\,a \vee c\,\bar{b}\,a = \bar{b}\,a\,(\bar{c} + c) = \bar{b}\,a$
4. $c\,\bar{b}\,a \vee a\,b\,c = c\,a\,(\bar{b} + b) = c\,a$

Сумма найденных импликант представляет сокращенную ДНФ исходной функции:

$$F_{ДНФ} = \bar{c}\,\bar{b} \vee \bar{c}\,\bar{a} \vee \bar{b}\,a \vee c\,a.$$

Каждой переключательной функции соответствует только одна нормальная форма, тогда как минимальных форм может быть несколько. Минимальная форма переключательной функции должна содержать все импликанты, перекрывающие все минтермы заданной функции. Для рассматриваемой функции можно получить две минимальные формы:

$$F_{min1} = \bar{c}\,\bar{b} \vee \bar{c}\,\bar{a} \vee c\,a \text{ и } F_{min2} = \bar{c}\,\bar{b} \vee \bar{b}\,\bar{a} \vee c\,a,$$

которые не совпадают с полученной ранее тупиковой формой. Проще всего эти преобразования можно выполнить с помощью карт Карно (Вейча).

Достоинством метода Квайна является четкость сформулированных правил проведения отдельных операций, благодаря чему возможно использование ЭВМ для минимизации достаточно сложных функций.

Минимизация логических функций по картам Карно

Метод минимизации по картам Карно (Вейча) находит широкое применение для минимизации переключательных функций 3 – 6 аргументов, поскольку обеспечивает простоту получения результата.

При использовании карт Карно (диаграмм Вейча) функцию предварительно следует привести к дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ) – выразить в виде логической суммы простых конъюнкций (минтермов).

После этого формируется таблица (исходная, образцовая), количество клеток в которой равно числу минтермов 2^m, где m – число переменных.

Пример 1. Минимизировать функцию

$$F = \overline{\bar{b}\,a + b\,\bar{a}} + \overline{\bar{b}\,\bar{a}}\,.$$

Приводим функцию к ДНФ, пользуясь правилами де Моргана:

$$F = \overline{\bar{b}\,a + b\,\bar{a}} + \overline{\bar{b}\,\bar{a}} = \overline{\bar{b}\,a}\cdot\overline{b\,\bar{a}} + \overline{\bar{b}\,\bar{a}} = ba(\bar{b} + a) + (b+a) = ba + b + a =$$

$$= b+a = b(a+\bar{a}) + a(b+\bar{b}) = ba+b\bar{a}+\bar{b}\,a.$$

а

	$\bar{a}$	a
$\bar{b}$	$\bar{b}\bar{a}$	$\bar{b}\,a$
b	$b\bar{a}$	ba

б

		a
	M_0	M_1
b	M_2	M_3

в

		a
	0	1
b	1	1

Рис. 1.10. Таблицы Карно для двуместной функции: *а* – разметочная Карта; *б* – карта с номерами минтермов; *в* – карта с нанесенной функцией

На рис. 1.10, *а*, *б*, *в* приведены карты (таблицы) Карно для двух переменных. В табл. 1.10, *а* показана разметка карты. На карте 1.10, *б* в клетках карты указаны номера минтермов, расположенных в них. Принцип нумерации таков. Аргумент функции (крайний справа) имеет вес $2^0 = 1$, старший аргумент (крайний слева) – вес 2^{m-1}. Минтерм $M(\bar{b}\bar{a})$ имеет нулевой номер, минтерм $M(b, a)$ – номер три M_3.

Для приведенного примера

$$F(b, a) = M_3 + M_2 + M_1.$$

Нанесем на карту полученную функцию, записанную в СДНФ. В клетки 3–2–1 запишем единицы, а в нулевую клетку – ноль. Необходимо клетки с единицами обвести прямоугольными (квадратными) контурами и записать минимизированную функцию в виде суммы логических произведений, описывающих эти контура. Нетрудно заметить, что один контур описывается переменой a, второй контур – b. Минимизированное выражение исходной функции будет следующим: $F = b + a$.

Пример 2. Минимизировать функцию трех аргументов (трехместную)

$$F = \overline{(\bar{c} + \bar{b} + \bar{a})(\bar{c} + \bar{b} + a)} + c\bar{b}\bar{a} + \bar{c}\,\bar{a}\,.$$

Приедем функцию к ДНФ:

$$\overline{(\bar{c} + \bar{b} + \bar{a})} + \overline{(\bar{c} + \bar{b} + a)} + c\bar{b}\bar{a} + c\bar{a} = c\,b\,a + cb\bar{a} + c\bar{b}\bar{a} + \bar{c}\,\bar{a} =$$

$$= c\,b\,a + cb\bar{a} + c\bar{b}\bar{a} + \bar{c}b\bar{a} + \bar{c}\bar{b}\bar{a}$$

и запишем функцию в виде суммы минтермов:

$$F = \mathrm{M}_7 + \mathrm{M}_6 + \mathrm{M}_4 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_0.$$

На рис. 1.11 показаны две разметочные карты (карты 1.11 *а*, *б*), по которым можно понять принцип разметки.

менты функции делятся на две группы, комбинации значений аргу-
ной группы приписываются столбцам таблицы, комбинации значе-
ентов другой группы – строкам таблицы. Столбцы и строки обозна-
омбинациями, соответствующим последовательности чисел в коде
кольку в этом случае склеивающиеся клетки находятся рядом (лю-
оседние клетки отличаются друг от друга только одним аргумен-

сем ранее полученную функцию на карту (карта. 1.11 *в*).
дем клетки в которых расположены единицы контурами. Таких кон-
училось два. Запишем минимизированное выражение для исходной
$F = c + \overline{a}$.

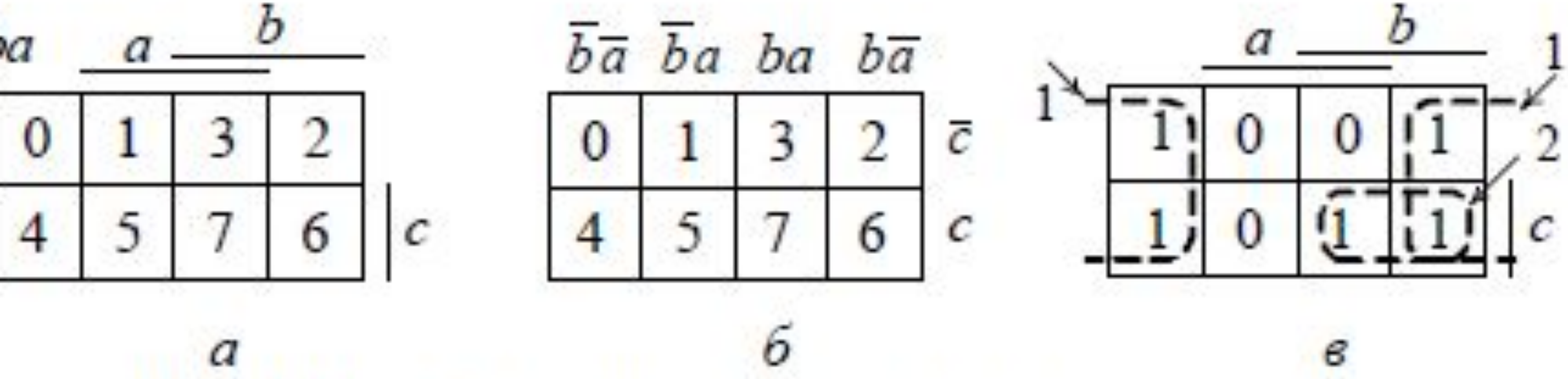

Рис. 1.11. Таблицы Карно для трех переменных:
разметочные – *а* и – *б*; рабочая карта – *в*

Пример 3. Минимизировать функцию четырех аргументов (четырех местную)

$$F=\overline{\overline{\bar{d}c\bar{b}a}\cdot\overline{\bar{d}cba}\cdot\overline{dc\bar{b}a}\cdot\overline{dcba}}+\overline{\overline{d\,\bar{b}\,\bar{a}}\cdot\overline{\bar{d}\,\bar{b}\bar{a}}}+d\bar{c}b+\bar{d}\bar{c}b\bar{a}.$$

Приведем функцию к ДНФ, пользуясь правилом отрицания:

$$F=\bar{d}c\bar{b}a+\bar{d}cba+dc\bar{b}a+dcba+d\,\bar{b}\bar{a}+\bar{d}\,\bar{b}\bar{a}+d\bar{c}b+\bar{d}\bar{c}b\bar{a}.$$

Преобразуем функцию к СДНФ

$$F=\bar{d}\,c\bar{b}a+\bar{d}cba+d\,c\bar{b}a+d\,c\,b\,a+d\,c\,\bar{b}\,\bar{a}+d\,\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}+\bar{d}\,c\,\bar{b}\,\bar{a}+$$

$$+\bar{d}\,\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}+d\,\bar{c}ba+d\,\bar{c}\,b\bar{a}+\bar{d}\bar{c}b\bar{a}.$$

Запишем выражение в виде суммы минтермов

$F = \mathrm{M}_5 + \mathrm{M}_7 + \mathrm{M}_{13} + \mathrm{M}_{15} + \mathrm{M}_{12} + \mathrm{M}_8 + \mathrm{M}_4 + \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_{11} + \mathrm{M}_{10} + \mathrm{M}_2$.

На рис. 1.12, *а*, *б* представлена разметочная карта для четырехместной функции (табл. 1.12, *а*). В клеточках карты указаны номера минтермов, помещающихся в эти клетки. Разместим функцию на такую карту: впишем единицы в те клеточки, номера которых имеются в полученном выражении .

Карта с нанесенной на нее функцией приведена на рис. 1. 12 (карта *б*).

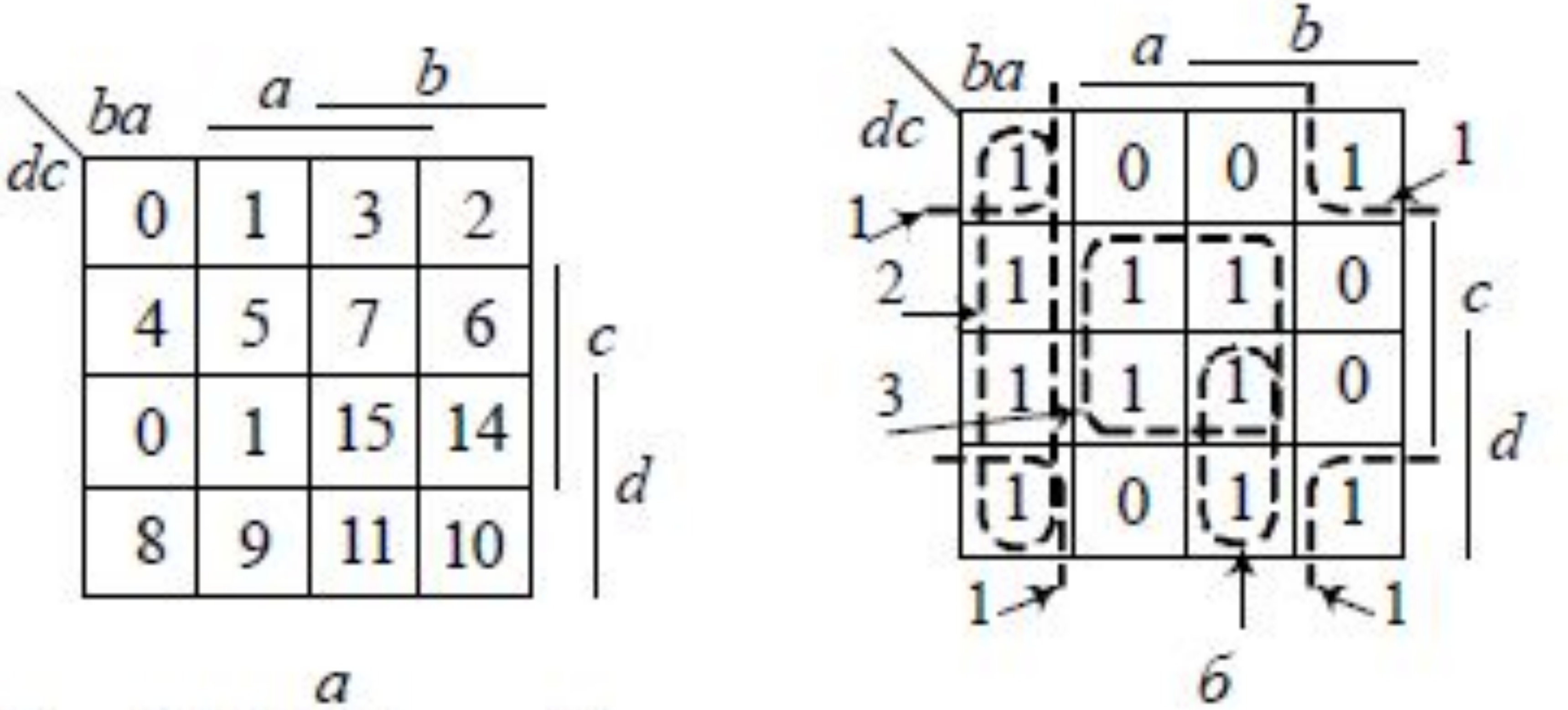

Рис. 1.12. Таблицы Карно для четырезх переменных:
разметочная карта – *а*; рабочая карта – *б*

Обведем клетки с единицами контурами и опишем их суммой конъюнкций. Минимизированное выражение для исходной функции

$$F = \overline{a}\,\overline{c} + \overline{b}\,\overline{a} + d\,b\,a\,.$$

Выводы

Карта Карно определяет значение функции на всех возможных наборах аргументов и, следовательно, является таблицей истинности. Карты Карно компактны и удобны для поиска склеиваемых членов переключательной функции СДНФ. Объясняется это тем, что два любых минтерма, находящихся в клетках, расположенных рядом друг с другом, являются соседними. Они могут быть заменены одной конъюнкцией, содержащей на одну переменную меньше. Группа из четырех минтермов, расположенных в соседних клетках, может быть заменена конъюнкцией, содержащей на две переменные меньше. В общем случае группа из 2^k соседних клеток будет заменена одной конъюнкцией с $n-k$ аргументами, при общем числе переменных равным n.

Минимизацию переключательных функций будем вести на основании следующих правил:

- все клетки, содержащие 1, объединяются в замкнутые области;
- каждая область должна представлять собой прямоугольник или квадрат с числом клеток 2^k;
- клетки, расположенные на противоположных гранях таблицы, являются соседними, так как карту можно сворачивать в цилиндр по горизонтали и по вертикали;
- угловые клетки, расположенные на противоположных углах, являются соседними, в том числе все четыре угловые клетки объединяются в одну область;
- области могут пересекаться, одни и те же клетки могут входить в разные области;
- клетки, значение функции в которых не определено (Ф), могут принимать любое значение (0 или 1);

- необходимо стремиться к тому, чтобы число областей было минимальным, а каждая область включала возможно большее число клеток.

Пример 3. Минимизировать функцию пяти аргументов (пятиместную).

Карту Карно пяти аргументов создадим следующим образом. Перевернем четырехместную карту вокруг правой стороны (можно вращать вокруг нижней стороны). Разметку оставляем прежней (*d c b a*), лишь по строкам правой половине присваиваем имя старшего разряда (*e d c b a*).

Разметочная карта (таблица, диаграмма), с нанесенными номерами минтермов расположена на рис. 1.13, *а*.

Функция задана в виде суммы минтермов и нескольких минтермов – функционалов, способных принимать значение 1 или 0.

$$F = M_0 + M_2 + M_4 + M_5 + M_7 + Ф_8 + Ф_9 + M_{10} + M_{12} + M_{13} + Ф_{15} + M_{16} + Ф_{17} + M_{18} + M_{20} + M_{21} + M_{23} + Ф_{24} + M_{26} + M_{28} + Ф_{29} + Ф_{30} + M_{31}.$$

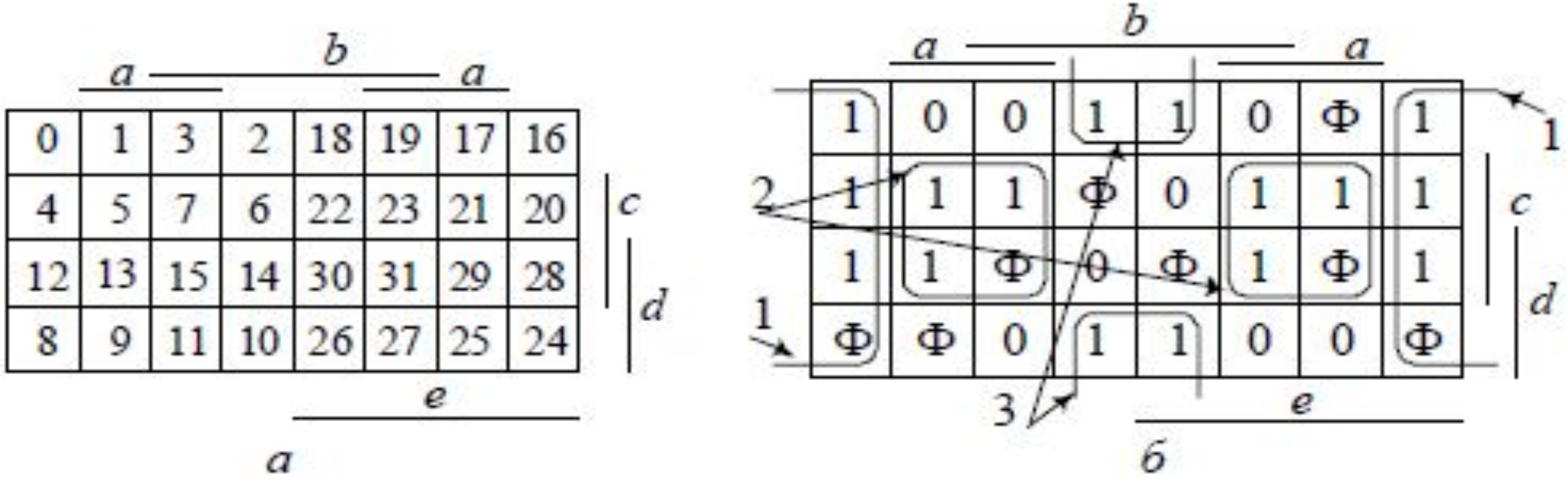

Рис. 1.13. Таблицы Карно для пяти переменных:
разметочная карта – *а*; рабочая карта – *б*

Заполним карту Карно для данной функции (рис. 3.11, *б*). Проведем контура, охватывающие единицы. Контур может содержать функционалы, поскольку тогда их значение по умолчанию равно единице. Потребовалось всего три контура для описания всех единиц. Запишем минимизированное выражение для этой функции:

$$F_{мин} = e\overline{b}\,\overline{a} + ca + \overline{c}b\overline{a}\ .$$

Во входной функции находилось 16×5 = 80 букв (переменных), а в минимизированной всего восемь, имеем 10-кратный выигрыш, что конечно впечатляет.