

«Производная функции»

Производная



- Большинство функций, изучаемых в школьном курсе алгебры и начал анализа, имеют себе в пару другую функцию, называемую производная функция от данной, или просто **производная**.

Задача



- На станции метро расстояние от тормозной отметки до остановки первого вагона равно 80 м. С какой скоростью поезд должен подойти к тормозной отметке, если дальше он движется равнозамедленно с ускорением $1,6 \text{ м/с}^2$?

Решение



V -?(мгновенная скорость в этот момент времени)

Тормозной путь

Где a - ускорение, t -время торможения.

$S=80$, $a=1,6$, поэтому

$$80=0,8t^2$$

$$t=10 \text{ с}$$

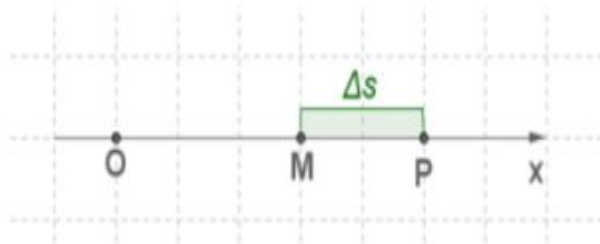
По формуле $V=at$.

$$V=1,6*10=16 \text{ м/с}$$

Задачи, приводящие к понятию производной

Задача 1 (о скорости движения). По прямой, на которой заданы начало отсчёта, единица измерения (метр) и направление, движется некоторое тело (материальная точка). Закон движения задан формулой $s = s(t)$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — положение тела на прямой (координата движущейся материальной точки) в момент времени t по отношению к началу отсчёта (в метрах). Найти скорость движения тела в момент времени t (в м/с).

Решение. Предположим, что в момент времени t тело находилось в точке M .



Дадим аргументу t приращение Δt и рассмотрим ситуацию в момент времени $t + \Delta t$. Координата материальной точки станет другой, тело в этот момент будет находиться в точке P : $OP = s(t + \Delta t)$.

Значит, за Δt секунд тело переместилось из точки M в точку P . Имеем: $MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t)$. Полученную разность мы назвали приращением функции: $s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$. Итак, $MP = \Delta s$ (м).

Нетрудно найти среднюю скорость $v_{\text{ср}}$ движения тела за промежуток времени $[t; t + \Delta t]$: $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (м/с).

А что такое скорость $v(t)$ в момент времени t (её называют мгновенной скоростью)? Можно сказать так: это средняя скорость движения за промежуток времени $[t; t + \Delta t]$ при условии, что Δt выбирается всё меньше и меньше; точнее: при условии, что $\Delta t \rightarrow 0$. Это значит, что $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{cp}}$.

Итак,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Тело движется по закону $x(t) = t^2$ (t – в секундах, x – в метрах). Какой будет скорость тела через 3 секунды после начала движения? Через какое время после начала движения скорость тела будет равна $10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$?

Дано: $x(t) = t^2, v(t_0) = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Найти: 1. $v(3) = ?$, 2. $t_0 = ?$

Прежде всего вспомним, что $v(t) = x'(t) = 2t$.

Отсюда мы можем вывести, что скорость через три секунды, то есть при $t = 3$, будет равна $6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

$$v(3) = 3 \cdot 2 = 6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

А $10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ скорость будет равна через 5 секунд ($t = 5$).

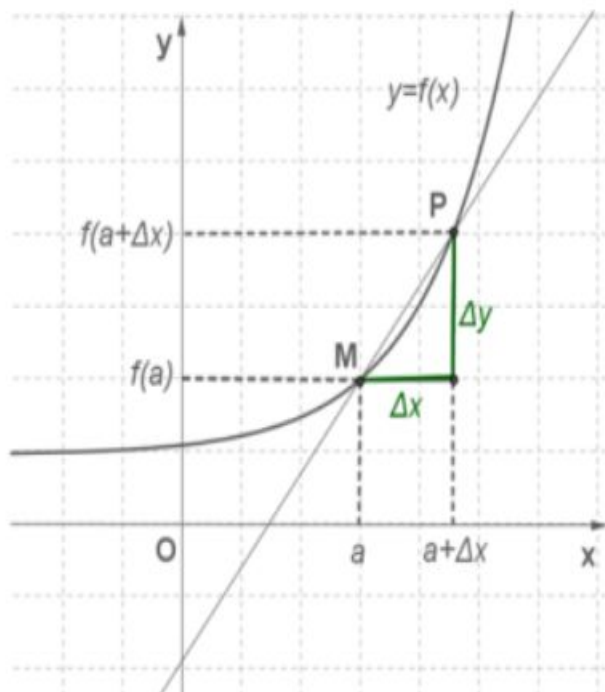
$$v(t_0) = 10$$

$$2t_0 = 10$$

$$t_0 = \frac{10}{2} = 5 \text{ с}$$

Ответ: $6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, 5 с.

Задача 2 (о касательной к графику функции). Дан график функции $y = f(x)$. На нём выбрана точка $M(a; f(a))$, в этой точке к графику функции проведена касательная (мы предполагаем, что она существует). Найти угловой коэффициент касательной.



Решение. Дадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике точку P с абсциссой $a + \Delta x$. Ордината точки P равна $f(a + \Delta x)$. Угловым коэффициентом секущей MP , т. е. тангенсом угла между секущей и осью x , вычисляется по формуле $k_{\text{сек}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если мы теперь устремим Δx к нулю, то точка P начнёт приближаться по кривой к точке M . Касательную мы охарактеризовали как предельное положение секущей при этом приближении. Значит, естественно считать, что угловым коэффициентом касательной $k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{сек}}$ будет вычисляться по формуле $k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{сек}}$.

Используя приведённую выше формулу для $k_{\text{сек}}$, получаем:

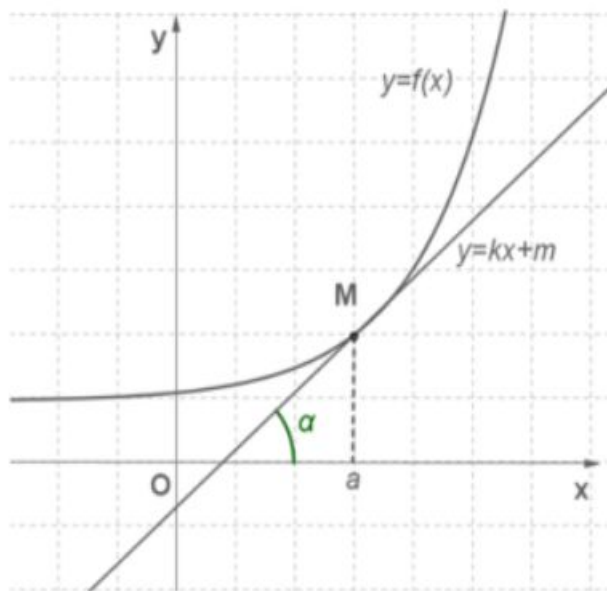
$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Физический (механический) смысл производной состоит в следующем. Если $s(t)$ — закон прямолинейного движения тела, то производная выражает **мгновенную скорость** в момент времени t :

$$v = s'(t).$$

Геометрический смысл производной состоит в следующем. Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, не параллельную оси y , то $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной:

$$k = f'(a).$$



Поскольку $k = \operatorname{tg} \alpha$, то верно равенство $f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$.

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 : $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Геометрический смысл производной

Если задан график функции $f(x)$, то производная в точке x_0 – это тангенс угла наклона касательной к данной функции в точке с абсциссой x_0 (или угловой коэффициент касательной).

Физический смысл производной

Если в качестве функции мы берем перемещение, зависящее от t , – $s(t)$, то $s'(t) = v(t)$, где s – перемещение, t – время, а v – мгновенная скорость в данной точке.



Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю (и этот предел существует), называется **производной этой функции**.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

(Часто вместо $f(x + \Delta x) - f(x)$ пишется Δy .)

$$\text{Итак, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Иногда используются обозначения $f'(x)$ или $\frac{dy}{dx}$.

Алгоритм нахождения производной для функции $y = f(x)$

1. Зафиксировать значение x , найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx , перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Этот предел и есть $f'(x)$.

Дальше рассмотрим производную функции $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 \end{aligned}$$

В силу того что x_0 – произвольна, имеем: $(x^2)' = 2x$

Теперь рассмотрим кубическую функцию $f(x) = x^3$.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2) = 3x_0^2 \end{aligned}$$

В силу того, что x_0 произволен, имеем:

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Доказательство

$$f(x) = x^n.$$

По формуле бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0^n + C_n^1 x_0^{n-1} \Delta x + \Delta x^2(\dots)) - x_0^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(C_n^1 x_0^{n-1} \Delta x + \Delta x^2(\dots))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (n x_0^{n-1} + \Delta x(\dots)) = n x_0^{n-1} \end{aligned}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Это доказательство верно только для натуральных n , так как бином Ньютона работает только для натуральных n .

Таблица производных

$$C' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(kx + b)' = k$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Таблица производных

$$\sin x \quad)' = \cos x$$

$$\cos x \quad)' = -\sin x$$

$$\operatorname{tg} x \quad)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} x \quad)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Правила дифференцирования

Теорема 1

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x , то и их сумма имеет производную в точке x , причём производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Теорема 2

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x , то и функция $y = kf(x)$ имеет производную в точке x , причём:

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Теорема 3

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x , то и их произведение имеет производную в точке x , причём:

$$(f(x)g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

На практике эту теорему формулируют так:

производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x и в этой точке $g(x) \neq 0$, то и функция

$y = \frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x , причём:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Короче:

$$(k_1 u + k_2 v)' = k_1 u' + k_2 v';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример:

$$u = x^2;$$

$$v = \sin x;$$

$$1. (2x^2 - 3\sin x)' = 2(x^2)' - 3(\sin x)' = 2 \cdot 2x - 3\cos x = 4x - 3\cos x;$$

$$2. (x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x;$$

$$3. \left(\frac{x^2}{\sin x} \right)' = \frac{(x^2)' \sin x - x^2 (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{2x \sin x - x^2 \cos x}{\sin^2 x}.$$

Правила дифференцирования

Формулами дифференцирования обычно называют формулы для нахождения производных конкретных функций, например:

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Формулы дифференцирования

1. $C' = 0;$

2. $x' = 1;$

3. $(Cu)' = C \cdot u';$

4. $(x^n)' = nx^{n-1};$

5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$

6. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2};$

7. $(\sin x)' = \cos x;$

8. $(\cos x)' = -\sin x;$

9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

Найти производную функции

$$1) f(x) = 3x^7 + 5x^5 - 2x^3 + 4x - 6$$

Решение

$$f'(x) = 3 \cdot (x^7)' + 5 \cdot (x^5)' - 2 \cdot (x^3)' + 4 \cdot (x)' - 6'$$

$$f'(x) = 3 \cdot 7x^6 + 5 \cdot 5x^4 + 2 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 1 - 0$$

$$f'(x) = 21x^6 + 25x^4 - 6x^2 + 4$$

Найти производную функции

$$2) f(x) = (5 \sin x - x^6)$$

Решение

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5 \sin x - x^6)' = \\ &= 5(\sin x)' - (x^6)' = \\ &= 5 \cos x - 6x^5 \end{aligned}$$

Найти производную функции

$$3) f(x) = 12x - \operatorname{tg}(x)$$

Решение

$$f'(x) = 12 \cdot (x') - (\operatorname{tg}(x))'$$

$$f'(x) = 12 \cdot 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \quad f'(x) = 12 - \frac{1}{\cos^2 x}$$

Найти производную функции

$$f(x) = x^4 \cdot \sin x$$

Решение

$$f'(x) = (x^4)' \cdot \sin x + x^4 \cdot (\sin x)'$$

$$f'(x) = 4x^3 \cdot \sin x + x^4 \cdot \cos x$$

Найти производную функции

$$5) f(x) = \frac{2x}{4x + 3}$$

Решение

$$f'(x) = \frac{(2x)' \cdot (4x + 3) - 2x \cdot (4x + 3)'}{(4x + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(4x + 3) - 2x \cdot 4}{(4x + 3)^2} = \frac{8x + 6 - 8x}{(4x + 3)^2} = \frac{6}{(4x + 3)^2}$$

Понятие и вычисление производной n -го порядка

Производная функции $f(x)$, $f'(x)$, сама является функцией. Значит, можно найти её производную.

Назовём $f'(x)$ производной функции $f(x)$ первого порядка.

Производная от производной функции $f(x)$ называется производной второго порядка (или второй производной).

Производная от второй производной называется производной третьего порядка (или третьей производной) и т. д.



Производные, начиная со второй, называются производными высших порядков и обозначаются y'' (иногда $y^{(2)}$), y''' (иногда $y^{(3)}$), $y^{(4)}$, $y^{(5)}$... $y^{(n)}$...

Иногда используются обозначения $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$... $\frac{d^ny}{dx^n}$...

Ускорение есть вторая производная координаты по времени. В этом состоит механический смысл второй производной.

Производная n -го порядка является производной $(n - 1)$ порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

(Сама функция иногда считается производной 0-го порядка.)

Пример:

$$y = x^5;$$

$$y' = (x^5)' = 5x^4;$$

$$y'' = (y')' = (5x^4)' = 20x^3;$$

$$y^{(3)} = (y'')' = (5 \cdot 4x^3)' = 60x^2;$$

$$y^{(4)} = (y^{(3)})' = (60x^2)' = 120x;$$

$$y^{(5)} = (y^{(4)})' = (120x)' = 120;$$

$$y^{(6)} = y^{(7)} = y^{(8)} = \dots = 0.$$

$(e^x)' = e^x$, поэтому все производные функции $y = e^x$ равны:

$$y' = y'' = y^{(3)} = y^{(4)} = y^{(5)} = \dots = e^x.$$

Производная сложной функции

Пусть функция $u = g(x)$ определена на множестве X , и U — область её значений.

Пусть далее функция $y = f(u)$ определена на множестве U .

Поставим в соответствие каждому x из X число $f(g(x))$.

Тем самым на множестве X будет задана функция $y = f(g(x))$.

Её называют композицией функций, или сложной функцией.

Если известна производная функции $f(x)$, то производную сложной функции $f(u)$ можно вычислить с помощью следующей формулы:

$$(f(u))' = f'(u) \cdot u'.$$

Пример:

1) вычислить производную функции $(x + 2)^{10}$. Обозначим $u = x + 2$.

Так как $(x^{10})' = 10x^9$, то $((x + 2)^{10})' = (u^{10})' = 10u^9 \cdot u' = 10(x + 2)^9 \cdot 1 = 10(x + 2)^9$.

2) Вычислить производную функции $f(x) = \sin(\cos x)$. Обозначим $u = \cos x$.

$(\sin x)' = \cos x$, поэтому

$$(\sin(\cos x))' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' =$$

$$= \cos(\cos x) \cdot (\cos x)' =$$

$$= \cos(\cos x) \cdot (-\sin x) =$$

$$= -\cos(\cos x) \cdot \sin x.$$

Пример:

$$1) (x + 13)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x + 13) - (x + 13)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1;$$

2)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x(x+\Delta x)} - \frac{x+\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Производная сложной функции

$$f(g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

Пример

$$f(x) = (-5x + 11)^4$$

Решение

$$f'(x) = ((-5x + 11)^4)' \cdot (5x + 11)'$$

$$f(x)' = 4 \cdot (-5x + 11)^3 \cdot (-5) = -20 \cdot (-5x + 11)^3$$

Производная сложной функции

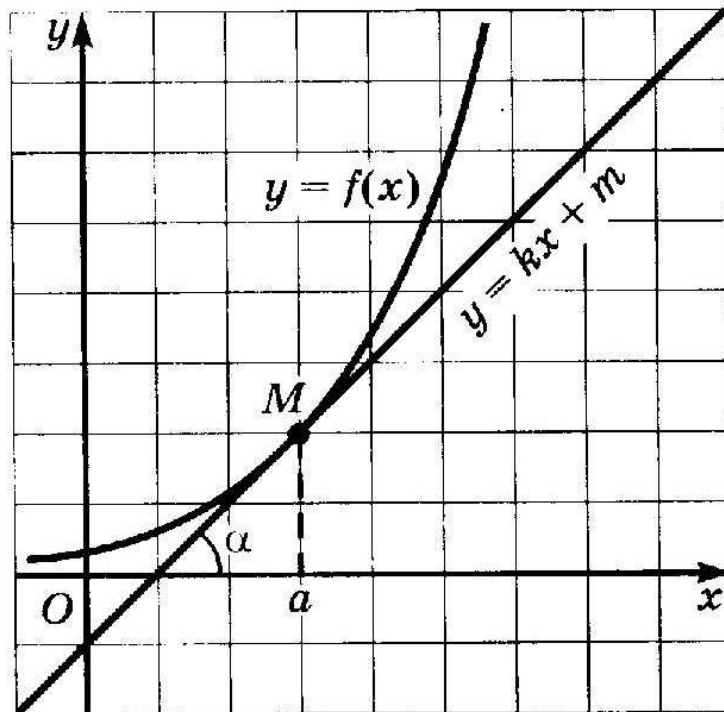
$$f(x) = \cos 5x$$

Решение

$$f'(x) = (\cos 5x)' \cdot (5x)' = -\sin 5x \cdot 5$$

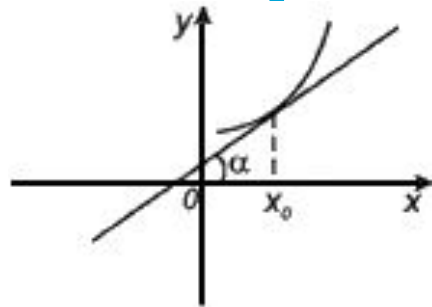
$$f'(x) = -5\sin 5x$$

Геометрический смысл производной

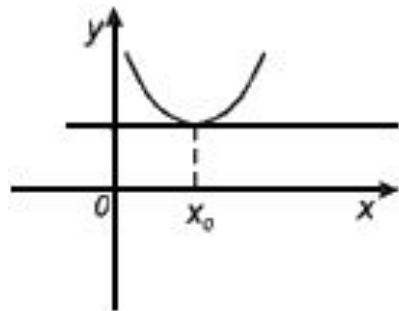


$$k = f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$$

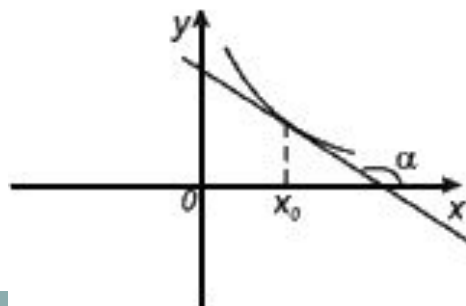
Какой угол образует производная?



$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$$



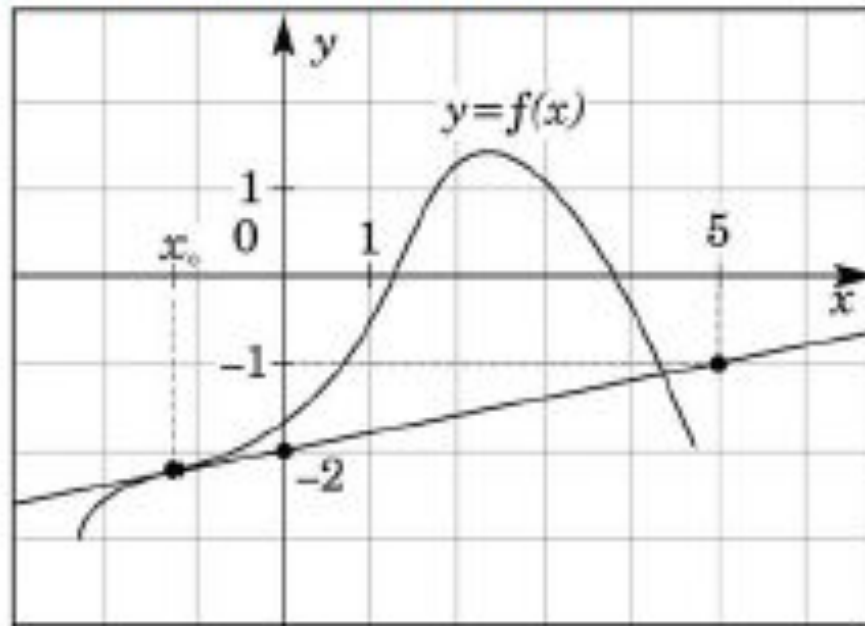
$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = 0$$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha < 0$$

Производная на ЕГЭ (задача В8)

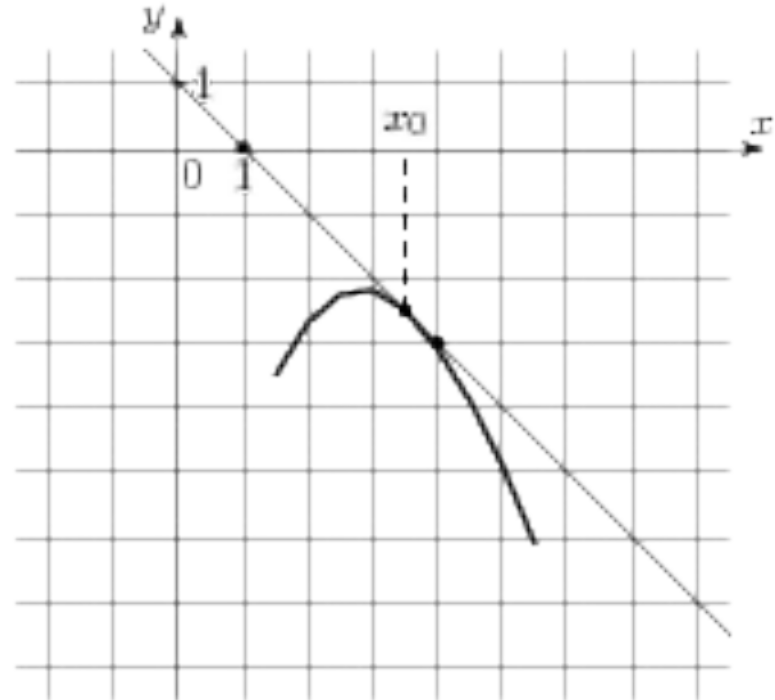
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Используя определение $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ получим

Производная на ЕГЭ (задача В8)

- На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

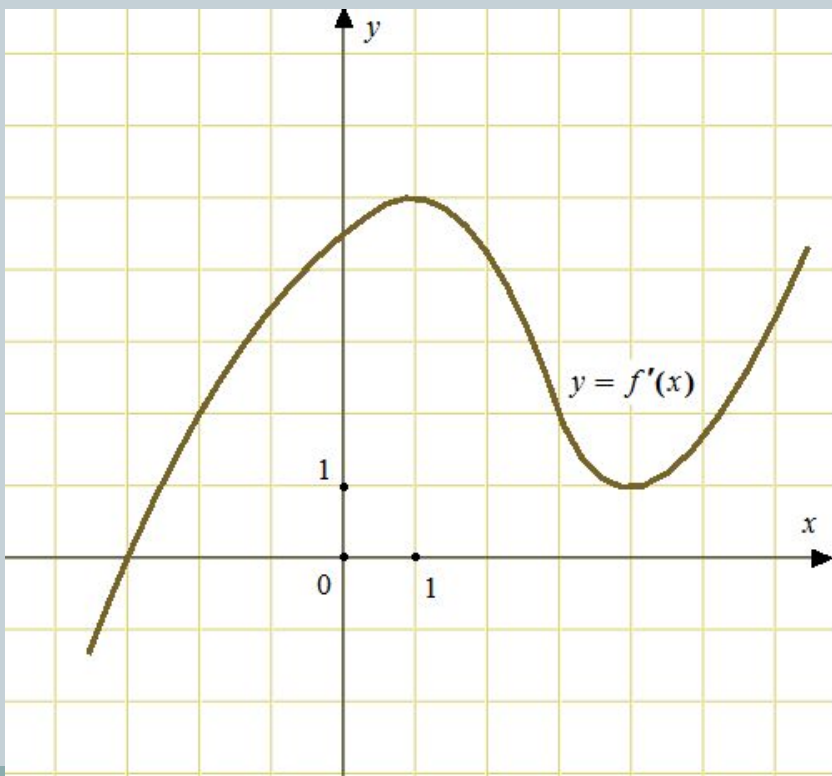


Ответ: $tg\alpha = -1$

B8)



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y=f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: $x = -3$

3) К графику функции $y = f(x)$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_0 = -3$. на рисунке изображен график производной этой функции. Определите градусную меру угла наклона касательной.

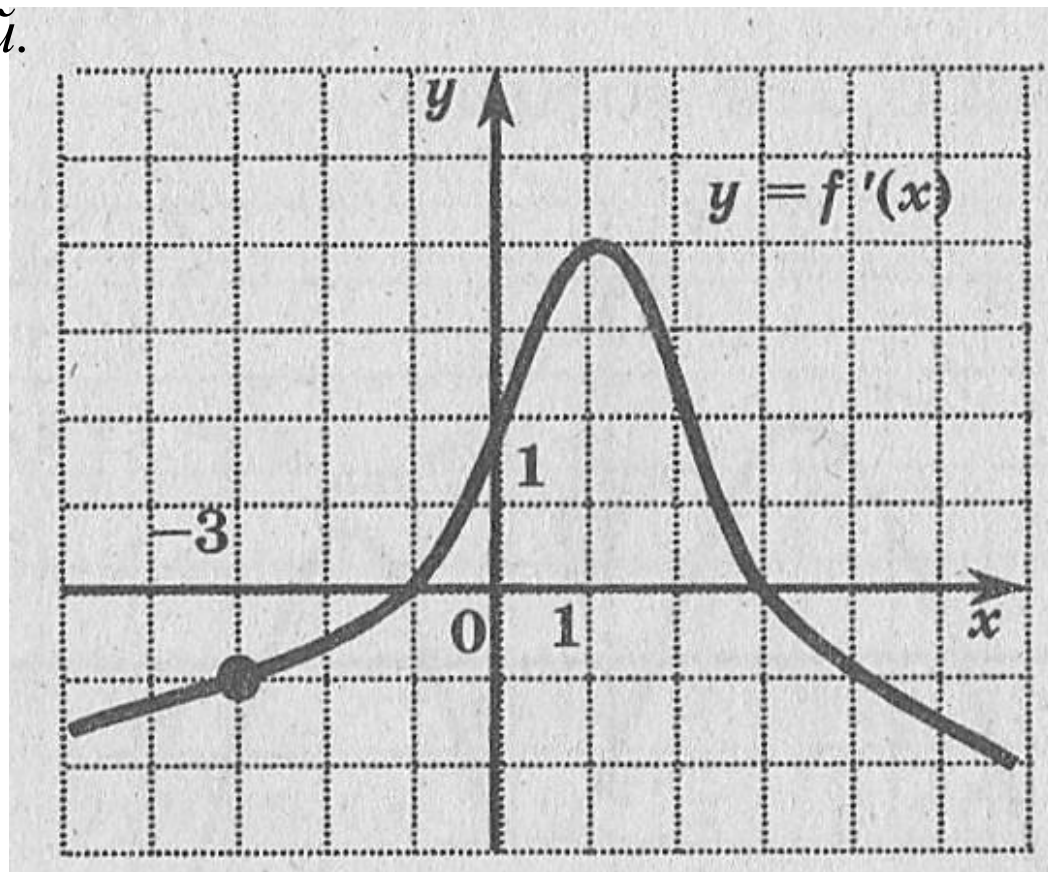
Решение

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

По графику
определяем, что

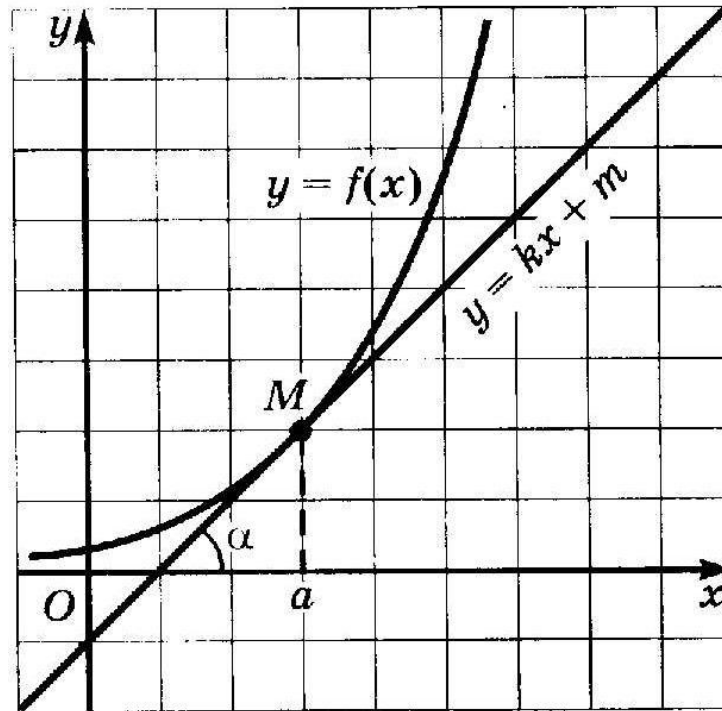
$$f'(-3) = -1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -1.$$



Ответ: $\alpha = 135^\circ$

Уравнение касательной



$$y = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0)$$

Пример

Составить уравнение касательной, проведенной к
графика функции $y = 2x^3 - 5x^2 - 2$ *точке*
графика с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение

$$y = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0)$$

$$y'(x) = 2 * (x^3)' - 5 * (x^2)' - 2' = 2 * 3x^2 - 5 * 2x - 0 = \\ = 6x^2 - 10x$$

$$y(x_0) = y(2) = 2 * 2^3 - 5 * 2^2 - 2 = -6$$

$$y'(x_0) = y'(2) = 6 * 2^2 - 10 * 2 = 4$$

$$y = -6 + 4 * (x - 2) = -6 + 4x - 8 = 4x - 14$$

Ответ: $y = 4x - 14$

**Физический
(механический)
смысл производной**

$$S'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = a(t)$$

Пример

Материальная точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна

$$v(t) = t^3 - 2t.$$

Найдите ускорение точки в момент времени $t = 3$.

Решение

$$a(t) = v'(t)$$
$$v'(t) = (t^3 - 2t)' = 3 * t^2 - 2$$

$$v'(3) = 3 * 3^2 - 2 = 25$$

Ответ: $a(3) = 25$

Найти производную функции

1) x^6 ; 2) x^7 ; 3) x^{11} ; 4) x^{13} .

1) x^{-2} ; 2) x^{-3} ; 3) x^{-4} ; 4) x^{-7} .

1) $x^{\frac{1}{2}}$; 2) $x^{\frac{1}{3}}$; 3) $x^{-\frac{2}{7}}$; 4) $x^{\sqrt{3}}$.

1) $\frac{1}{x^5}$; 2) $\frac{1}{x^9}$; 3) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\sqrt[3]{x^2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.