«Производная функции»

Производная

- Большинство функций, изучаемых в школьном курсе алгебры и начал анализа, имеют себе в пару другую функцию, называемую производная функция от данной, или просто производная.

Задача

- На станции метро расстояние от тормозной отметки до остановки первого вагона равно 80 м. С какой скоростью поезд должен подойти к тормозной отметке, если дальше он двигается равнозамедленно с ускорением 1,6 м/с^2?

Решение

V-?(мгновенная скорость в этот момент времени)

Тормозной путь

Где а- ускорение, t-время торможения.

S=80, a=1,6, поэтому

$80=0,8t^2$

t=10 c

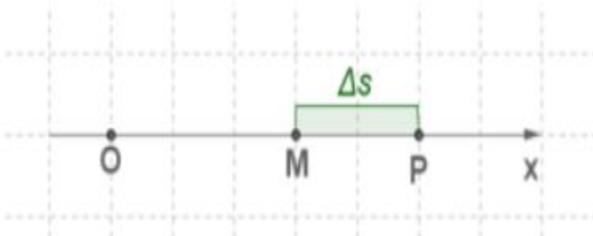
По формуле V=at.

V=1,6*10=16 м/с

Задачи, приводящие к понятию производной

Задача 1 (*о скорости движения*). По прямой, на которой заданы начало отсчёта, единица измерения (метр) и направление, движется некоторое тело (материальная точка). Закон движения задан формулой $s = s(t)$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — положение тела на прямой (координата движущейся материальной точки) в момент времени t по отношению к началу отсчёта (в метрах). Найти скорость движения тела в момент времени t (в $м/с$).

Решение. Предположим, что в момент времени t тело находилось в точке M.



Дадим аргументу t приращение Δt и рассмотрим ситуацию в момент времени $t+\Delta t$. Координата материальной точки станет другой, тело в этот момент будет находиться в точке $P: OP = s(t+\Delta t)$.

Значит, за Δt секунд тело переместилось из точки M в точку P. Имеем: $MP = OP - OM = s(t+\Delta t) - s(t)$. Полученную разность мы назвали приращением функции: $s(t+\Delta t) - s(t) = \Delta s$. Итак, $MP = \Delta s$ (м).

Нетрудно найти среднюю скорость $v_{\text{ср}}$ движения тела за промежуток времени $[t; t+\Delta t]$: $v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ (м/с).

А что такое скорость $v(t)$ в момент времени t (её называют мгновенной скоростью)? Можно сказать так: это средняя скорость движения за промежуток времени $[t; t+\Delta t]$ при условии, что Δt выбирается всё меньше и меньше; точнее: при условии, что $\Delta t \to 0$. Это значит, что $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}$.

Итак,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Тело движется по закону $x(t) = t^2$ (t – в секундах, x – в метрах). Какой будет скорость тела через 3 секунды после начала движения? Через какое время после начала движения скорость тела будет равна $10\ \frac{м}{с}$?

Дано: $x(t) = t^2, v(t_0) = 10\frac{м}{с}$.

Найти: 1. $v(3) =?$, 2. $t_0\ =?$

Прежде всего вспомним, что $v(t) = x'(t) = 2t$.

Отсюда мы можем вывести, что скорость через три секунды, то есть при $t = 3$, будет равна $6\frac{м}{с}$.

$$v(3) = 3 \cdot 2 = 6\frac{м}{с}$$

А $10\frac{м}{с}$ скорость будет равна через 5 секунд ($t = 5$).

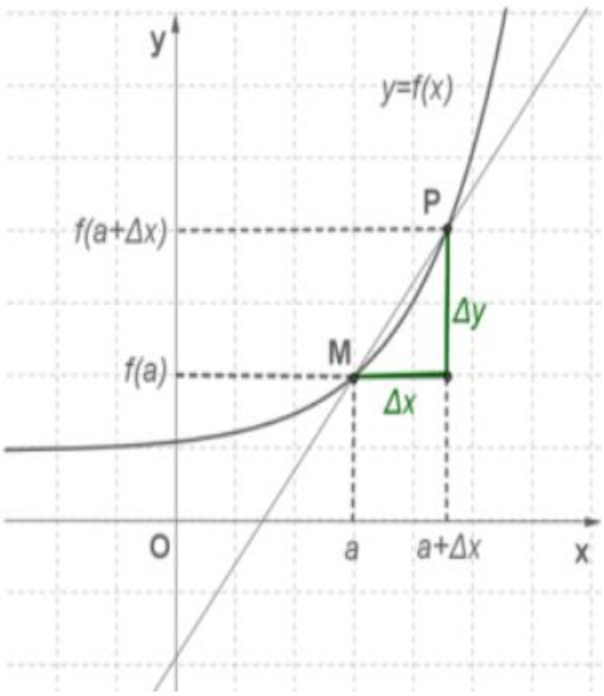
$$v(t_0) = 10$$

$$2t_0 = 10$$

$$t_0 = \frac{10}{2} = 5\ с$$

Ответ: $6\frac{м}{с}$, 5 с.

Задача 2 *(о касательной к графику функции).* Дан график функции $y = f(x)$. На нём выбрана точка $M(a; f(a))$, в этой точке к графику функции проведена касательная (мы предполагаем, что она существует). Найти угловой коэффициент касательной.



Решение. Дадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике точку P с абсциссой $a + \Delta x$. Ордината точки P равна $f(a + \Delta x)$. Угловой коэффициент секущей MP, т. е. тангенс угла между секущей и осью x, вычисляется по формуле $k_{\text{сек}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если мы теперь устремим Δx к нулю, то точка P начнёт приближаться по кривой к точке M. Касательную мы охарактеризовали как предельное положение секущей при этом приближении. Значит, естественно считать, что угловой коэффициент касательной $k_{\text{кас}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}}$ будет вычисляться по формуле $k_{\text{кас}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}}$.

Используя приведённую выше формулу для $k_{\text{сек}}$, получаем:

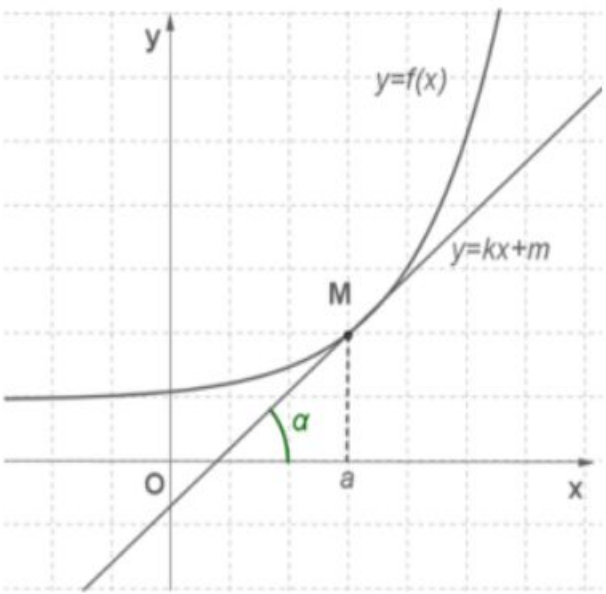
$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Физический (механический) смысл производной состоит в следующем. Если $s(t)$ — закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t:

$$v = s'(t).$$

Геометрический смысл производной состоит в следующем. Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, не параллельную оси y, то $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной:

$$k = f'(a).$$



Поскольку $k = tg\,\alpha$, то верно равенство $f'(a) = tg\,\alpha$.

Производная функции $f(x)$ *в точке* x_0: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Геометрический смысл производной

Если задан график функции $f(x)$, то производная в точке x_0 – это тангенс угла наклона касательной к данной функции в точке с абсциссой x_0 (или угловой коэффициент касательной).

Физический смысл производной

Если в качестве функции мы берем перемещение, зависящее от t, – $s(t)$, то $s'(t) = v(t)$, где s – перемещение, t – время, а v – мгновенная скорость в данной точке.

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю (и этот предел существует), называется производной этой функции.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

(Часто вместо $f(x+\Delta x) - f(x)$ пишется Δy.)

Итак, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Иногда используются обозначения $f\,'(x)$ или $\dfrac{dy}{dx}$.

Алгоритм нахождения производной для функции $y = f(x)$

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Этот предел и есть $f'(x)$.

Дальше рассмотрим производную функции $f(x) = x^2$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

В силу того что x_0 – произвольна, имеем: $(x^2)' = 2x$

Теперь рассмотрим кубическую функцию $f(x) = x^3$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2) = 3x_0^2$$

В силу того, что x_0 произволен, имеем:

$(x^3)' = 3x^2$.

Доказательство

$f(x) = x^n$.

По формуле бинома Ньютона:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x_0^n + C_n^1 x_0^{n-1} \Delta x + \Delta x^2(\dots)\right) - x_0^n}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(C_n^1 x_0^{n-1} \Delta x + \Delta x^2(\dots))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (n x_0^{n-1} + \Delta x(\dots)) = n x_0^{n-1}$$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Это доказательство верно только для натуральных n, так как бином Ньютона работает только для натуральных n.

Таблица производных

$$C' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(kx + b)' = k$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\mathrm{x}^{\mathrm{n}})' = n \cdot x^{n-1}$$

Таблица производных

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Правила дифференцирования

Теорема 1

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их сумма имеет производную в точке x, причём производная суммы равна сумме производных:

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Теорема 2

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то и функция $y = kf(x)$ имеет производную в точке x, причём:

$(kf(x))' = kf'(x)$.

Теорема 3

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их произведение имеет производную в точке x, причём:

$$(f(x)g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

На практике эту теорему формулируют так:

производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x и в этой точке $g(x) \neq 0$, то и функция $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x, причём:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Короче:

$(k_1 u + k_2 v)' = k_1 u' + k_2 v';$

$(uv)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$

Пример:

$u = x^2;$

$v = sin\ x;$

1. $(2x^2 - 3sin\,x)' = 2(x^2)' - 3(sin\ x)' = 2 \cdot 2x - 3cos\,x = 4x - 3\cos\ x;$

2. $(x^2\ sin\ x)' = (x^2)'\,sin\ x + x^2(sin\ x)' = 2x\ sin\ x + x^2\ cos\ x;$

3. $\left(\frac{x^2}{sin\ x}\right)' = \frac{(x^2)'\,sin\ x - x^2(sin\ x)'}{(sin\ x)^2} = \frac{2x\ sin\ x - x^2\ cos\ x}{sin^2 x}.$

Правила дифференцирования

Формулами дифференцирования обычно называют формулы для нахождения производных конкретных функций, например:

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Формулы дифференцирования

1. $C' = 0;$
2. $x' = 1;$
3. $(Cu)' = C \cdot u';$
4. $(x^n)' = nx^{n-1};$
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$
6. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$
7. $(\sin x)' = \cos x;$
8. $(\cos x)' = -\sin x;$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

Найти производную функции

$$1)\ f(x) = 3x^7 + 5x^5 - 2x^3 + 4x - 6$$

Решение

$$f'(x) = 3\cdot(x^7)' + 5\cdot(x^5)' - 2\cdot(x^3)' + 4\cdot(x)' - 6'$$

$$f'(x) = 3\cdot 7x^6 + 5\cdot 5x^4 + 2\cdot 3x^2 + 4\cdot 1 - 0$$

$$f'(x) = 21x^6 + 25x^4 - 6x^2 + 4$$

Найти производную функции

$$2)\, f(x) = (5\sin x - x^6)$$

Решение

$$f'(x) = (5\sin x - x^6)' =$$

$$= 5(\sin x)' - (x^6)' =$$

$$= 5\cos x - 6x^5$$

Найти производную функции

$$3)\, f(x) = 12x - tg(x)$$

Решение

$$f'(x) = 12 \cdot (x') - (tg(x))'$$

$$f'(x) = 12 \cdot 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \qquad f'(x) = 12 - \frac{1}{\cos^2 x}$$

Найти производную функции

$$f(x) = x^4 \cdot \sin x$$

Решение

$$f'(x) = (x^4)' \cdot sinx + x^4 \cdot (\sin x)'$$

$$f'(x) = 4x^3 \cdot \sin x + x^4 \cdot \cos x$$

Найти производную функции

$$5)\ f(x)=\frac{2x}{4x+3}$$

Решение

$$f'(x)=\frac{(2x)'\cdot(4x+3)-2x\cdot(4x+3)'}{(4x+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2(4x+3)-2x\cdot 4}{(4x+3)^2}=\frac{8x+6-8x}{(4x+3)^2}=\frac{6}{(4x+3)^2}$$

Понятие и вычисление производной n-го порядка

Производная функции $f(x)$, $f'(x)$, сама является функцией. Значит, можно найти её производную.

Назовём $f'(x)$ производной функции $f(x)$ первого порядка.

Производная от производной функции $f(x)$ называется производной второго порядка (или второй производной).

Производная от второй производной называется производной третьего порядка (или третьей производной) и т. д.

Производные, начиная со второй, называются производными высших порядков и обозначаются
y'' (*иногда* $y^{(2)}$), y''' (*иногда* $y^{(3)}$), $y^{(4)}$, $y^{(5)} \ldots y^{(n)} \ldots$

Иногда используются обозначения $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots \frac{d^ny}{dx^n} \ldots$

Ускорение есть вторая производная координаты по времени. В этом состоит механический смысл второй производной.

Производная n-го порядка является производной $(n-1)$ порядка: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

(Сама функция иногда считается производной 0-го порядка.)

Пример:

$$y = x^5;$$
$$y' = \left(x^5\right)' = 5x^4;$$
$$y'' = (y')' = \left(5x^4\right)' = 20x^3;$$
$$y^{(3)} = (y'')' = (5 \cdot 4x^3)' = 60x^2;$$
$$y^{(4)} = (y^{(3)})' = (60x^2)' = 120x;$$
$$y^{(5)} = (y^{(4)})' = (120x)' = 120;$$
$$y^{(6)} = y^{(7)} = y^{(8)} = \ldots = 0.$$

$(e^x)' = e^x$, поэтому все производные функции $y = e^x$ равны:
$y' = y'' = y^{(3)} = y^{(4)} = y^{(5)} = \ldots = e^x$.

Производная сложной функции

Пусть функция $u = g(x)$ определена на множестве X, и U — область её значений.
Пусть далее функция $y = f(u)$ определена на множестве U.
Поставим в соответствие каждому x из X число $f(g(x))$.
Тем самым на множестве X будет задана функция $y = f(g(x))$.
Её называют композицией функций, или сложной функцией.

Если известна производная функции $f(x)$, то производную сложной функции $f(u)$ можно вычислить с помощью следующей формулы:

$(f(u))' = f'(u) \cdot u'$.

Пример:

1) вычислить производную функции $(x+2)^{10}$. Обозначим $u = x+2$.
Так как $\left(x^{10}\right)' = 10x^9$, то $\left((x+2)^{10}\right)' = (u^{10})' = 10u^9 \cdot u' = 10(x+2)^9 \cdot 1 = 10(x+2)^9$.

2) Вычислить производную функции $f(x) = sin(cos\ x)$. Обозначим $u = cos\ x$.
$(sin\ x)' = cos\ x$, поэтому
$(sin(cos\ x))' = (sin\ u)' = cos\ u \cdot u' =$

$= cos(cos\ x) \cdot (cos\ x)' =$

$= cos(cos\ x) \cdot (-\ sin\ x) =$

$= -\ cos(cos\ x) \cdot sin\ x.$

Пример:

1) $(x+13)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x+13)-(x+13)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1;$

2)

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x}{x(x+\Delta x)} - \frac{x+\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Производная сложной функции

$$f(g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

Пример

$$f(x) = (-5x + 11)^4$$

Решение

$$f'(x) = ((-5x + 11)^4)' \cdot (5x + 11)'$$

$$f(x)' = 4 \cdot (-5x + 11)^3 \cdot (-5) = -20 \cdot (-5x + 11)^3$$

Производная сложной функции

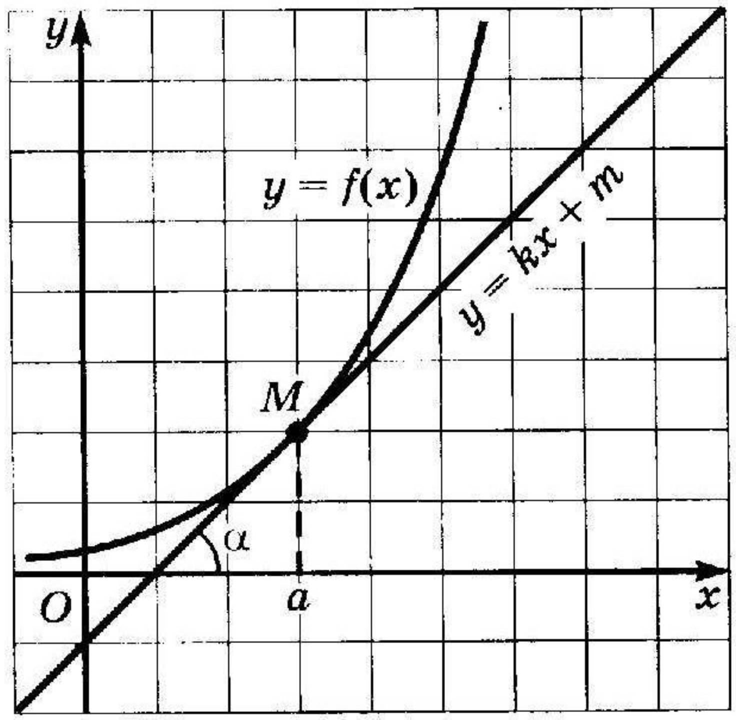
$$f(x) = \cos 5x$$

Решение

$$f'(x) = (\cos 5x)' \cdot (5x)' = -\sin 5x \cdot 5$$

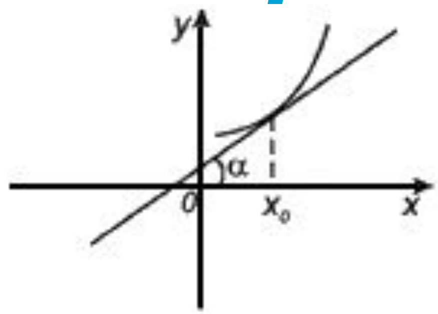
$$f'(x) = -5\sin 5x$$

Геометрический смысл производной

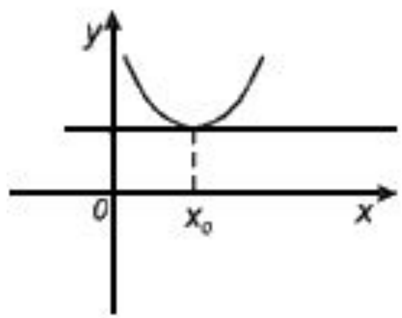


$$k = f'(a) = \operatorname{tg}\alpha$$

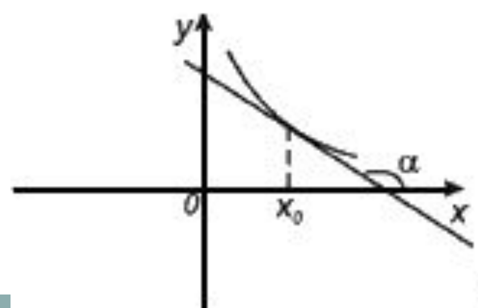
Какой угол образует производная?



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$



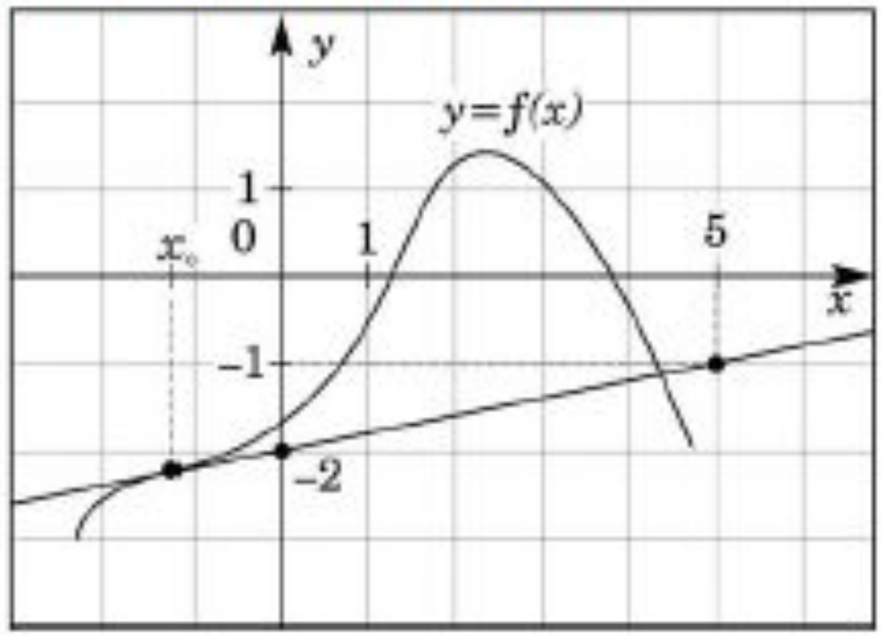
$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = 0$



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha < 0$

Производная на ЕГЭ (задача В8)

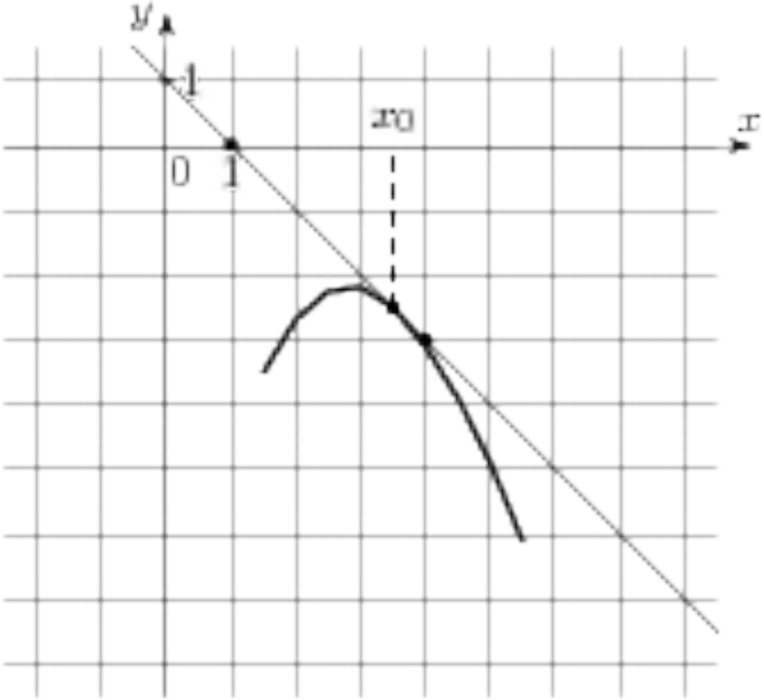
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Используя определение $f'(x_0) = tg\alpha$ получим

Производная на ЕГЭ (задача В8)

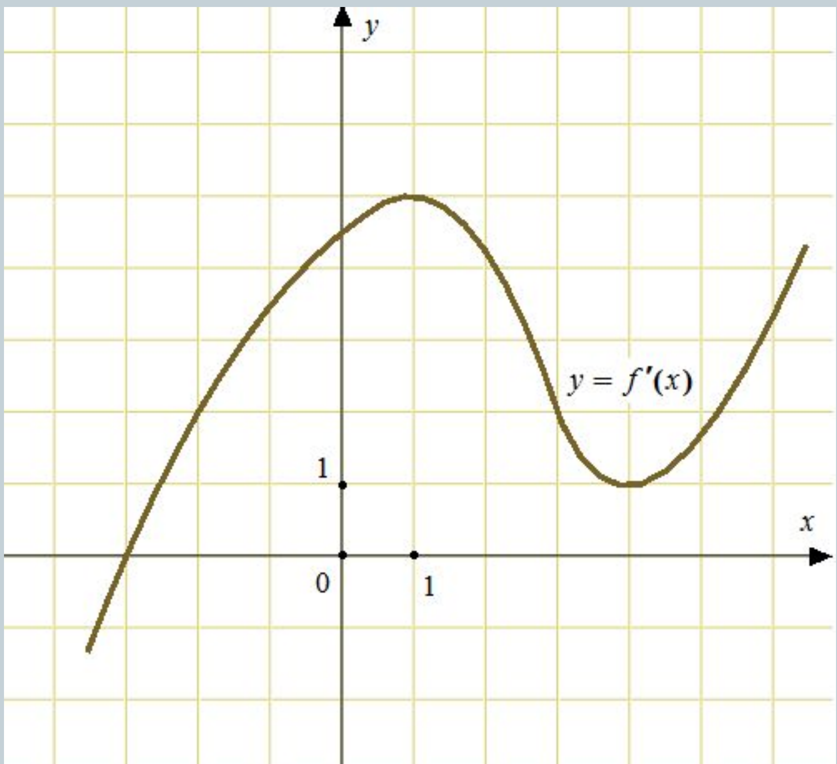
- На рисунке изображены график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 Найдите значение производной функции y = f(x) в точке x_0



Ответ: $tg\alpha = -1$

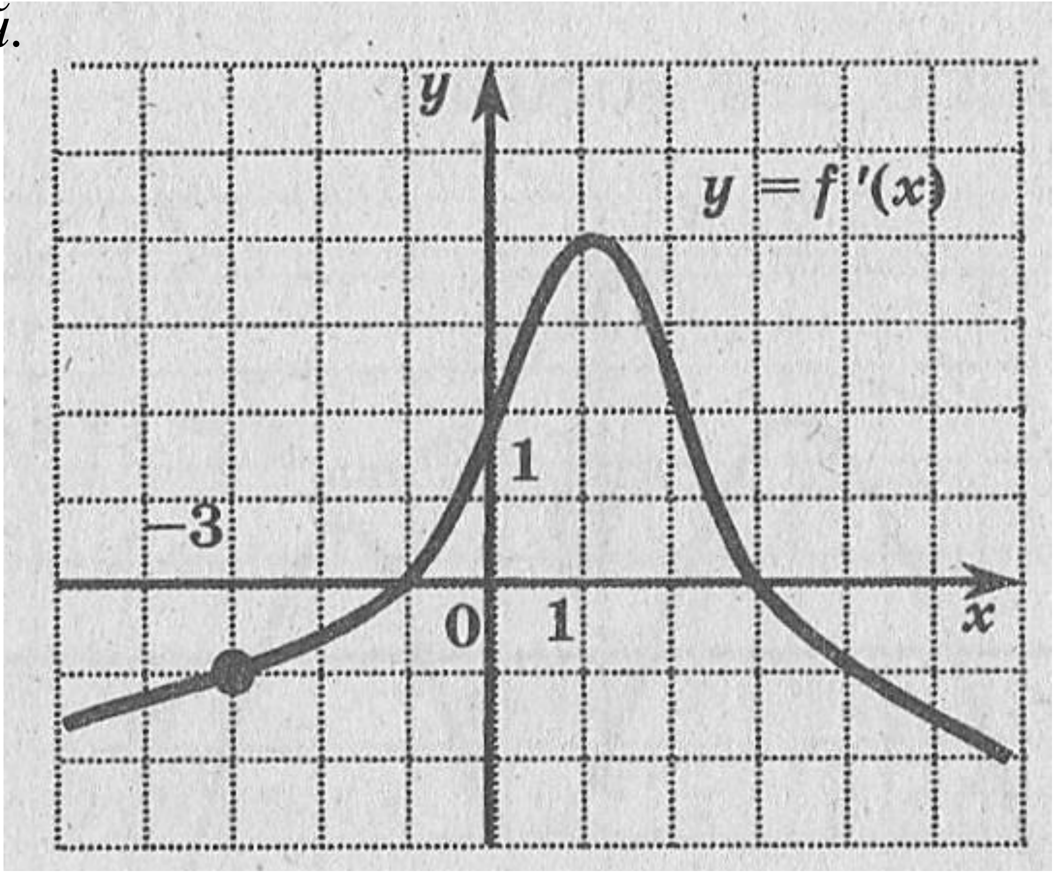
Производная на ЕГЭ (задача В8)

На рисунке изображен график производной функции f(x). Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику y=f(x) параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: x = - 3

3) *К графику функции y = f(x) проведена касательная в точке с абсциссой* $x_0 = -3$. *на рисунке изображен график производной этой функции. Определите градусную меру угла наклона касательной.*



Решение

$$tg\alpha = f'(x_0)$$

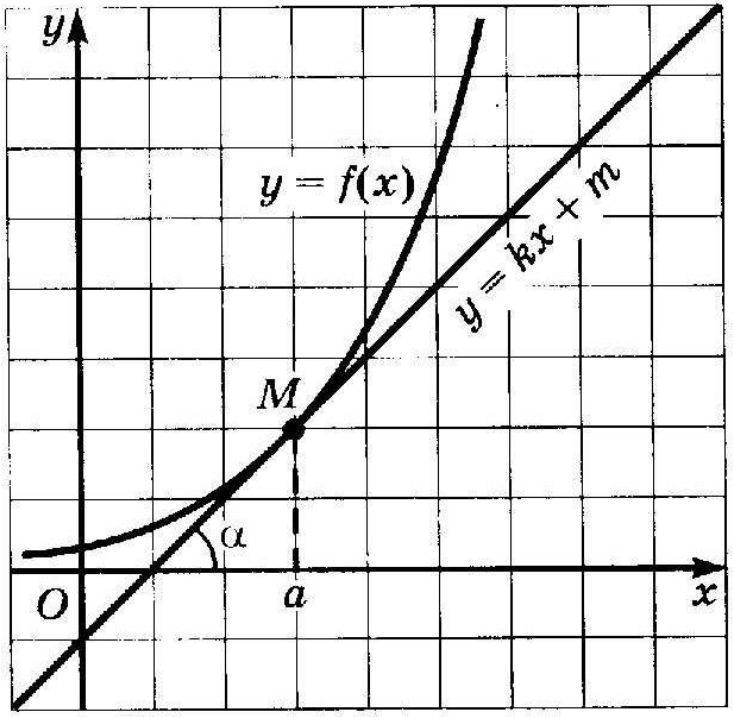
По графику определяем, что

$$f'(-3) = -1;$$

$$tg\alpha = -1.$$

Ответ: $\alpha = 135^0$

Уравнение касательной



$$y = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0)$$

Пример *Составить уравнение касательной, проведенной к графику функции* $y = 2x^3 - 5x^2 - 2$ *точке графика с абсциссой* $x_0 = 2.$

Решение

$$y = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0)$$

$$y'(x) = 2*(x^3)' - 5*(x^2)' - 2' = 2*3x^2 - 5*2x - 0 =$$
$$= 6x^2 - 10x$$

$$y(x_0) = y(2) = 2*2^3 - 5*2^2 - 2 = -6$$

$$y'(x_0) = y'(2) = 6*2^2 - 10*2 = 4$$

$$y = -6 + 4*(x-2) = -6 + 4x - 8 = 4x - 14$$

Ответ: $y = 4x - 14$

Физический (механический) смысл производной

$$S'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = a(t)$$

Пример

Материальная точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна

$$v(t)=t^3-2t.$$

Найдите ускорение точки в момент времени t = 3.

Решение

$$a(t)=v'(t)$$

$$v'(t)=(t^3-2t)'=3*t^2-2$$

$$v'(3)=3*3^2-2=25$$

Ответ: $a(3)=25$

Найти производную функции

1) x^6; 2) x^7; 3) x^{11}; 4) x^{13}.

1) x^{-2}; 2) x^{-3}; 3) x^{-4}; 4) x^{-7}.

1) $x^{\frac{1}{2}}$; 2) $x^{\frac{1}{3}}$; 3) $x^{-\frac{2}{7}}$; 4) $x^{\sqrt{3}}$.

1) $\frac{1}{x^5}$; 2) $\frac{1}{x^9}$; 3) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\sqrt[3]{x^2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.